

VEKTÖR OPERATÖRLER

KARTEZYEN $d\vec{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$, $d\tau = dx dy dz$

Gradyan: $\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{k}$

Diverjans: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Rotasyonel: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{k}$

Laplasien: $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

KÜRESEL $d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$, $d\tau = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$

Gradyan: $\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi}$

Diverjans: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

Rotasyonel: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$

Laplasien: $\nabla^2 t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$

SİLİNDİRİK $d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$, $d\tau = r dr d\phi dz$

Gradyan: $\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{z}$

Diverjans: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Rotasyonel: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{r} + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \hat{z}$

Laplasien: $\nabla^2 t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

ÇARPIM KURALLARI (ÖZDEŞLİKLER)

- (1) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
- (2) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$
- (3) $\vec{\nabla} (fg) = f (\vec{\nabla} g) + g (\vec{\nabla} f)$
- (4) $\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$
- (5) $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f)$
- (6) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$
- (7) $\vec{\nabla} \times (f \vec{A}) = f (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} f)$
- (8) $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$
- (9) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$
- (10) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$
- (11) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

David J. GRIFFITHS
Fizik Profesörü, Reed College

Elektromagnetik Teori

İngilizce 2. Basım çevirisi

Türkçesi: Bekir Karaoğlu
Fizik Profesörü

Bir

ARTe
GÜVEN

Yayınıdır.

Introduction to Electrodynamics, David J. Griffiths, 2th edition.

Copyright©1991

All rights reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Prentice-Hall Inc.

Translation copyright©1996 by ARTe Reklamcılık ve Tanıtım Ltd. Şti.

Türkçe yayın hakkı ARTe Reklamcılık ve Tanıtım Ltd. Şti. tarafından
Prentice-Hall, Inc. şirketinden satın alınmıştır.

Kütüphane katalog Kartı:

Griffiths, David J.

Elektromagnetik Teori

1. Elektrodinamik I. Kitap adı.
QC680.G74 1996 537.6-dc19

DAĞITIM :

GÜVEN KİTAP YAYIN DAĞITIM

Nuruosmaniye Cad. Mollafenari Sok. No: 36 Cağaloğlu İstanbul

Tel : (0212) 512 12 70 - 514 06 20 Faks : (0212) 519 05 02

KADIKÖY ŞUBESİ : GÜVEN KİTAP EĞİTİM Mühürdar Cad. No: 33/1

Kadıköy/İstanbul Tel : (0216) 414 13 59 Faks : (0216) 414 78 46

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	vii
TÜRKÇE BASKI İÇİN BİRKAÇ SÖZ	viii
AÇILIŞ	1
1 VEKTÖR ANALİZİ	5
1.1 VEKTÖR CEBİRİ	5
1.1.1 VEKTÖR İŞLEMLERİ	5
1.1.2 Bileşenlerle Vektör Cebiri	7
1.1.3 Üçlü Çarpımlar	10
1.1.4 Vektörler Nasıl Dönüşür?	11
1.2 DİFERANSİYEL HESAP	13
1.2.1 "Alışılmış" Türev	13
1.2.2 Gradyan	13
1.2.3 Nabla ($\vec{\nabla}$) Operatörü	16
1.2.4 Diverjans	17
1.2.5 Rotasyonel	18
1.2.6 Çarpım Kuralları	19
1.2.7 İkinci Türevler	21
1.3 İNTEGRAL HESAP	22
1.3.1 "Alışılmış" İntegral	22
1.3.2 Gradyanın Temel Teoremi	23
1.3.3 Diverjansın Temel Teoremi	25
1.3.4 Rotasyonelin Temel Teoremi	28
1.3.5 Temel Teoremler Arasındaki İlişkiler	30
1.4 EĞRİSEL KOORDİNATLAR	32
1.4.1 Küresel Koordinatlar	32
1.4.2 Silindirik Koordinatlar	35
1.5 DIRAC DELTA FONKSİYONU	36
1.5.1 Bir Boyutlu Dirac Delta Fonksiyonu	37
1.5.2 Üç Boyutlu Delta Fonksiyonu	40
2 ELEKTROSTATİK	45
2.1 ELEKTROSTATİK ALAN	45
2.1.1 Giriş	45

İÇİNDEKİLER

2.1.2	Coulomb Yasası	46
2.1.3	Elektrik Alan	46
2.1.4	Sürekli Yük Dağılımları	47
ELEKTROSTATİK ALANIN DİVERJANS VE ROTASYONELİ		51
2.2.1	Alan Çizgileri ve Gauss Yasası	51
2.2.2	\vec{E} 'nin Diverjansı	54
2.2.3	Gauss Yasası Uygulamaları	54
2.2.4	\vec{E} 'nin Rotasyoneli	59
ELEKTRİK POTANSİYEL		60
2.3.1	Potansiyel Kavramına Giriş	60
2.3.2	Potansiyelin Özellikleri	61
2.3.3	Poisson ve Laplace Denklemleri	64
2.3.4	Yerel Bir Yük Dağılımının Potansiyeli	65
2.3.5	Özet; Elektrostatik Sınır Koşulları	67
İŞ VE ELEKTROSTATİK ENERJİ		70
2.4.1	Bir Yük Üzerinde Yapılan İş	70
2.4.2	Noktasal Bir Yük Dağılımının Enerjisi	70
2.4.3	Sürekli Bir Yük Dağılımının Enerjisi	72
2.4.4	Elektrostatik Enerjinin Özellikleri	73
İLETKENLER		74
2.5.1	İletkenlerin Temel Özellikleri	74
2.5.2	Toplanan Yükler	76
2.5.3	İletkenin Yüzey Yükü ve Kuvvetler	78
2.5.4	Kapasitörler	80
POTANSİYEL HESAP TEKNİKLERİ		85
LAPLACE DENKLEMİNİN GENEL ÖZELLİKLERİ		85
3.1.1	Giriş	85
3.1.2	Bir Boyutlu Laplace Denklemi	86
3.1.3	İki Boyutlu Laplace Denklemi	86
3.1.4	Üç boyutlu Laplace Denklemi	87
3.1.5	Sınır Koşulları ve Tek Çözüm Teoremleri	88
3.1.6	İletkenler ve İkinci Tek Çözüm Teoremi	90
GÖRÜNTÜ YÖNTEMİ		92
3.2.1	Klasik Görüntü Problemi	92
3.2.2	Toplanan Yüzey Yükü	93
3.2.3	Kuvvet ve Enerji	94
3.2.4	Diğer Görüntü Problemleri	94
DEĞİŞKEN AYRIMI		96
3.3.1	Kartezyen Koordinatlar	96

İÇİNDEKİLER

iii

3.3.2	Küresel Koordinatlar	104
3.4	MULTİPOL AÇILIMI	112
3.4.1	Uzak Bölgede Yaklaşık Potansiyeller	112
3.4.2	Monopol ve Dipol Terimleri	114
3.4.3	Multipol Açılımında Orijin Seçimi	116
3.4.4	Dipolün Elektrik Alanı	117
4	DİELEKTRİK ORTAMLAR	121
4.1	POLARİZASYON	121
4.1.1	Dielektrikler	121
4.1.2	Etkileşmeli Dipoller	121
4.1.3	Polar Moleküller	123
4.1.4	Polarizasyon	125
4.2	POLARİZE OLMUŞ BİR CİSMİN ELEKTRİK ALANI	125
4.2.1	Bağlı Yükler	125
4.2.2	Bağlı Yüklerin Fiziksel Yorumu	128
4.2.3	Dielektrik İçinde Elektrik Alan	130
4.3	ELEKTRİK DEPLASMAN VEKTÖRÜ	132
4.3.1	Dielektrik Ortamlarda Gauss Yasası	132
4.3.2	Yanıtıcı Bir Paralellik	134
4.4	LİNEER DİELEKTRİKLER	134
4.4.1	Duygunluk, Geçirgenlik ve Dielektrik Sabiti	134
4.4.2	Lineer Dielektrikler için Özel Problemler	139
4.4.3	Dielektrik Sistemlerde Enerji	143
4.4.4	Dielektriklerde Kuvvetler	145
4.4.5	Polarizabilite ve Duygunluk	147
5	MAGNETOSTATİK	151
5.1	LORENTZ KUVVETİ	151
5.1.1	Magnetik Alan	151
5.1.2	Magnetik Kuvvet	152
5.1.3	Akım	155
5.2	BIOT-SAVART YASASI	159
5.2.1	Kararlı Akımlar	159
5.2.2	Kararlı Bir Akımın Magnetik Alanı	160
5.3	MAGNETİK ALANIN DİVERJANS VE ROTASYONELİ	164
5.3.1	Doğrusal Akımlar	164
5.3.2	\vec{B} 'nin Diverjans ve Rotasyoneli	165
5.3.3	Ampere Yasası ve Uygulamaları	167
5.3.4	Magnetostatik ve Elektrostatiğin Karşılaştırması	173

5.4	MAGNETİK VEKTÖR POTANSİYEL	174
5.4.1	Vektör Potansiyel	174
5.4.2	Özet; Magnetostatik Sınır Koşulları	179
5.4.3	Magnetik Dipol Momenti	181
6	MAGNETİK ORTAMLAR	189
6.1	MAGNETİZASYON	189
6.1.1	Diamagnetik, Paramagnetik, Ferromagnetik Maddeler	189
6.1.2	Magnetik Dipol Üzerindeki Kuvvet ve Tork	189
6.1.3	Atomik Yörüngeler Üzerinde Magnetik Alanın Etkisi	192
6.1.4	Magnetizasyon	194
6.2	MIKNATISLANMIŞ BİR CİSMİN MAGNETİK ALANI	194
6.2.1	Bağlı Akımlar	194
6.2.2	Bağlı Akımların Fiziksel Yorumu	197
6.2.3	Madde İçinde Magnetik Alan	198
6.3	H ALANI	199
6.3.1	Magnetik Ortamlarda Ampere Yasası	199
6.3.2	Yanıtıcı Bir Paralellik	201
6.4	LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ORTAMLAR	202
6.4.1	Magnetik Duygunluk ve Geçirgenlik	202
6.4.2	Ferromagnetizma	204
7	ELEKTRODİNAMİK	209
7.1	ELEKTROMOTOR KUVVETİ	209
7.1.1	Ohm Yasası	209
7.1.2	Elektromotor Kuvveti	214
7.1.3	Hareket Kaynaklı Emk	216
7.2	FARADAY YASASI	220
7.2.1	Elektromagnetik İndüksiyon	220
7.2.2	İndüktans	227
7.2.3	Magnetik Alanda Enerji	232
7.3	MAXWELL DENKLEMLERİ	235
7.3.1	Maxwell'den Önceki Elektrodinamik	235
7.3.2	Ampere Yasasını Maxwell Nasıl Tamir Etti?	236
7.3.3	Maxwell Denklemleri ve Magnetik Yük	238
7.3.4	Madde İçinde Maxwell Denklemleri	239
7.3.5	Sınır Koşulları	241
7.4	ELEKTROMAGNETİK TEORİNİN POTANSİYEL FORMÜLASYONU	243
7.4.1	Skaler ve Vektör Potansiyeller	243
7.4.2	Ayar Dönüşümleri	245

7.4.3	Coulomb Ayarı ve Lorentz Ayarı	246
7.4.4	Lorentz Kuvvetinin Potansiyel İfadesi	248
7.5	ELEKTRODİNAMİKTE ENERJİ VE MOMENTUM	249
7.5.1	Elektrodinamikte Newton'un 3. Yasası	249
7.5.2	Poynting Teoremi	250
7.5.3	Maxwell Gerilme Tansörü	253
7.5.4	Momentum Korunumu	256
8	ELEKTROMAGNETİK DALGALAR	265
8.1	DALGA DENKLEMİ	265
8.1.1	Giriş	265
8.1.2	Bir Boyutlu Dalga Denklemi	266
8.1.3	Sinüsel Dalgalar	269
8.1.4	Polarizasyon	272
8.1.5	Sınır Koşulları; Yansıma ve Geçme	274
8.2	DİELEKTRİK ORTAMDA ELEKTROMAGNETİK DALGA	276
8.2.1	Boşlukta Tekrenkli Düzlem Dalgalar	276
8.2.2	Elektromagnetik Dalganın Enerji ve Momentumu	279
8.2.3	Lineer Ortamda Elektromagnetik Dalga	281
8.2.4	Normal Gelişte Yansıma ve Geçme	282
8.2.5	Eğimli Gelişte Yansıma ve Kırılma	284
8.3	İLETKEN ORTAMDA ELEKTROMAGNETİK DALGA	288
8.3.1	Değişik Bir Dalga Denklemi	288
8.3.2	İletken Ortamda Tekrenkli Düzlem Dalgalar	291
8.3.3	İletken Yüzeyden Yansıma ve Geçme	294
8.4	DİSPERSİYON	296
8.4.1	ϵ , μ ve σ 'nın Frekansa Bağlılığı	296
8.4.2	Dielektriklerde Dispersiyon	297
8.4.3	İletken ve Plazmalarda Serbest Elektronlar	301
9	ELEKTROMAGNETİK RADYASYON	305
9.1	DİPOL RADYASYONU	305
9.1.1	Gecikmeli Potansiyeller	305
9.1.2	Elektrik Dipol Radyasyonu	309
9.1.3	Magnetik Dipol Radyasyonu	314
9.1.4	Herhangi Bir Yük ve Akım Dağılımının Radyasyonu	317
9.2	NOKTASAL YÜKÜN RADYASYONU	321
9.2.1	Liénard-Wiechert Potansiyelleri	321
9.2.2	Hareketli Noktasal Yükün Elektromagnetik Alanı	325
9.2.3	Noktasal Yükün Radyasyon Gücü	330

İÇİNDEKİLER

RADYASYON TEPKİSİ	334
9.3.1 Abraham-Lorentz Formülü	334
9.3.2 Radyasyon Tepkisinin Fiziksel Kökeni	337
RELİ ELEKTRODİNAMİK	343
ÖZEL GÖRELİLİK TEORİSİ	343
10.1.1 Einstein Postülatları	343
10.1.2 Göreliliğin Geometrisi	348
10.1.3 Lorentz Dönüşümleri	355
10.1.4 Uzay-zaman Yapısı	360
GÖRELİ MEKANİK	366
10.2.1 Öz Zaman ve Öz Hız	366
10.2.2 Görelî Enerji ve Momentum	368
10.2.3 Görelî Kinematik	371
10.2.4 Görelî Dinamik	374
GÖRELİ ELEKTRODİNAMİK	378
10.3.1 Magnetizmanın Görelî Karakteri	378
10.3.2 Elektromagnetik Alanın Dönüşümü	380
10.3.3 Alan Tansörü	387
10.3.4 Tansör Gösteriminde Elektrodinamik	389
10.3.5 Görelî Elektrodinamiğin Potansiyel Formülasyonu	392
R	396
GRİSEL KOORDİNATLARDA VEKTÖR HESABI	396
İRİMLER	401
İS	403

ÖNSÖZ

Kitabın bu ikinci baskısında, öğretim üyelerinin çoğunlukla önerdiği değişiklikleri yaptım. Birçok dizgi hatasını düzelttim, bazı örnekleri değiştirdim, bazı problemleri çıkardım ve yenilerini ekledim. Fakat, problemleri bölüm sonlarına alma önerilerine karşı çıktım; çünkü bu problemlerin hemen tümü belli bir amaç içindir ve ilgili kısım okunduktan hemen sonra çözümleri gerekir. Böylece problemlerin pedagojik değerini korumuş oluruz. Bazı problemlerin sonuçları daha sonraki bölümlerde kullanılacaktır; bu tür problemleri (•) ile işaretledim. Zor veya uzun problemlerin önüne de ünlem (!) işareti koydum. Birçok meslekdaşım tek sayılı problem yanıtlarını kitabın sonuna koymamı önerirken, diğerleri buna karşı çıkıyordu. Ben de ilk baskıdaki şeklini korudum; gereken yerlerde problemle birlikte yanıtları da verdim.

Metinde en önemli değişiklik şudur: Bölüm 1'de Dirac delta fonksiyonunu tanımladım ve Bölüm 2 ve 3'teki birçok ispatı basitleştirmekte kullandım. Danıştığım herkes bu yaklaşımı destekliyordu. Delta fonksiyonundan ürken öğrenci varsa, ona kişisel garanti veriyorum: delta fonksiyonunu öğrenmek için harcayacağınız birkaç günlük zaman sadece elektromagnetik teoride değil, fizik ve matematikteki diğer birçok konuda size yararlı olacaktır.

Bir elektromagnetik teori kitabına buradakilerin dışında eklenebilecek daha birçok konu elbette vardır: plazma, alternatif akım devreleri, iletişim hatları, anten teorisi, magnetik devreler, sayısal yöntemler, Lagrangian formalizmi, vb. Fakat kitabın olabildiği kadar yalın olmasını ve konunun temel kavramlarının belirgin halde kalmasını istedim.

Kitabın hazırlanışında ve daha sonraki kullanımında birçok kişinin bilgi ve önerilerinden yararlandım. Özellikle, Washington Üniversitesi'nden John Bjorkstam, City College of New York'tan Timothy Boyer, Bard College'den Burton Brody, Middlebury College'den Jeffrey Dunham, Texas Tech Üniversitesi'nden Stefan Estreich, Swarthmore College'den Mark Heald, Denison Üniversitesi'nden Michael M. Michelson, Stanford Üniversitesi'nden C.J. Mortoff, College of the Holy Cross'dan R.S. Rena, Oregon State Üniversitesi'nden Larry Schecter, City College of New York'tan Martin Tiersten ve Reed College'den Nicholas Wheeler'e teşekkür ederim.

Son olarak, üzerime düşen bir görevi burada yerine getirmek isterim: Elektromagnetik teori konusunda ne öğrendiysem Edward Purcell'e borçluyum.

David J. Griffiths

TÜRKÇE BASKI İÇİN BİRKAÇ SÖZ

(Çevirmenimiz yazara gönderdiği bir mektupta, Türkçe baskı için kendisinden özgeçmişini ve elektromagnetik teori öğretimi konusunda birkaç satır istemişti. Yazarın cevabını buraya alıyoruz.)

Kitabımın Türkçeye çevriliyor olmasından mutluluk ve biraz da övünç duymaktayım. Benden istediğiniz yaşam öykümü şöyle özetleyeyim: 1942 yılında doğdum. Berkeley (California), Appleton (Wisconsin) ve Putney (Vermont) da büyüdüm. Harvard Üniversitesinden fizik lisans diploması aldıktan sonra yine doktora eğitimi için Harvard'da kaldım ve araştırma asistanı olarak görev yaptım. Bu görevim sırasında Nobel ödülü sahibi Edward M. Purcell'in elektromagnetik teori dersinin asistanlığını yapıyordum. Bu büyük bilim adamı ve eğitimci elektromagnetik teoriye bakış açımı derinden etkilemiştir. Harvard'da danışmanım Sidney Coleman'la yaptığım çalışma sonucu 1970 yılında doktora diploması aldım. Değişik üniversitelerde (Utah, Massachusetts, Mont-Holyoke ve Trinity College) araştırmacı olarak çalıştıktan sonra 1978 yılında Reed College'de öğretim üyesi olarak çalışmaya başladım ve halen sürdürüyorum. Şimdiye kadar 20 makale ve üç kitap yayınladım. Evli ve iki çocuk babasıyım.

Elektromagnetik teori öğretiminde doğrudan Maxwell denklemleriyle başlama konusunda görüşümü sormuşsunuz. Bence lisans düzeyinde bu yanlış bir yaklaşım olur. Soyutlama eğitimin düşmanıdır. (Soyutlama öğrenmenin SONUdur, BAŞI değil.) İnsan basitten başlayarak karmaşığa, özelden başlayarak genele doğru öğrenir. Elbette bir konuyu öğrendiğimizde, bunu diğerlerine en doğal ve soyut biçimde anlatma isteği duyarız; bu doğaldır ve tüm genç eğitimciler bu tuzağa düşerler. Ama bu iyi hocalık olmaz.

Son olarak, elektromagnetik teoriyi görelilikle başlatma konusunda görüşümü sormuşsunuz. Bu aslında doğru bir yaklaşım olurdu ve Purcell gibi eğitimcilerin elinde çok güzel işlerdi. Fakat bu yaklaşımı iki yönden doğru bulmuyorum (bu yüzden kitabımda görelilik teorisini en sona aldım): (1) Elektrostatik + Görelilik = Elektromagnetik Teori mantığının yapısı görüldüğü kadar sağlam değildir. Purcell dahi bunu kabul ediyordu. Örneğin, doğrusal tel dışında, Ampere yasasını elde edemezsiniz; Purcell çember akımın magnetik alanını bu yolla elde edebilmek için çok uğraştı, ama başaramadı. Her kim ki elektrostatik ve görelilikten başlayarak elektromagnetik teoriyi geliştirdiğini iddia ediyorsa, mutlaka bir yerlerde fazladan varsayımlar yapmış olmalıdır; bu gayet doğal olabilir ama bence öykünün tadını bozar. (2) Bu yaklaşım öğrencileri, Einstein'ın dehasının erimini anlamaktan yoksun bırakır. Einstein'ı görelilik teorisine götüren yol, elektromagnetik teorisinin iç yapısı idi; bu düşünce yöntemini tersine çevirip kullanmak insanlık düşünce tarihindeki en büyük gelişmelerden birinin öyküsünden mahrum kalmak anlamına gelir. Fakat, yine de bu konuda pek emin değilim.

David J. Griffiths

AÇILIŞ

Elektromagnetik teori nedir, ve fizik dünyasında yeri nerededir?

MEKANİĞİN DÖRT ARENASI

Mekanikğin dört büyük uğraş alanı şöyle bir tabloda özetlenebilir:

	Klasik Mekanik (Newton)	Kuantum Mekanikği (Schrödinger, Heisenberg, Bohr, ve diğerleri)
Yüksek hızlar ↓	Görelilik Mekanik (Einstein)	Kuantum Alan Teorisi (Dirac, Pauli, Schwinger, Feynman, ve diğerleri)
		→ Küçük boyutlar

Newton mekanikğinin yetersiz olduğu bu yüzyılın başlarında anlaşılmıştı—bu mekanik “günlük yaşam” deneyimlerine uygundu, fakat yüksek (ışık hızına yakın) hızlarda yanlış sonuçlar veriyordu. Yerini 1905 yılında Einstein'ın özel görelilik teorisine bıraktı. Yine, Newton mekanikği çok küçük (atomik) boyutlarda başka nedenlerle hatalı oluyordu ve yerini 1920 lerde Bohr, Schrödinger, Heisenberg ve diğerlerinin geliştirdiği kuantum mekanikği aldı. Hem çok hızlı ve hem de çok küçük cisimler (ki modern parçacık fizikğinde bolca bulunur) için, hem görelilik ve hem de kuantum ilkelerini birlikte sağlayan bir teori gerekiyordu; kuantum alan teorisi denilen bu teori anahatlarıyla 1930-40 lı yıllarda geliştirilmesine rağmen, bugün dahi tam yeterli sayılmamaktadır. Bu kitapta, son bölüm dışında, tümüyle klasik mekanik çerçevesinde kalacağız. Fakat, elektromagnetik teori çok doğal bir şekilde diğer üç arenaya genişletilebilir. (Örneğin, elektromagnetik teori özel görelilik ilkesini otomatik olarak sağlar; hatta görelilik teorisinin gelişmesinde başlıca itici güç olmuştur.)

DÖRT KUVVET

Mekanik bize, bir cisme kuvvet uygulandığında nasıl davranacağını öğretir. Bugün fizikte bilinen dört temel kuvvet vardır; bunları kuvvet şiddetine göre sıralayalım:

1. Çekirdek kuvveti
2. Elektromagnetik kuvvet
3. Zayıf kuvvet
4. Gravitasyon (yerçekimsel) kuvvet

Bu listenin kısa oluşu sizi şaşırtabilir. Peki sürtünme kuvveti nerde? Odanın zemininden aşağı düşmemi engelleyen "normal" tepki kuvveti nerede? Molekülleri bir arada tutan kimyasal kuvvetler nerede? Çarpışan iki bilyardo topunun birbirine uyguladığı kuvvet nerede? Yanıt: Tüm bunlar *elektromagnetik* kuvvetin belirtileridir. Neredeyse tüm yaşamımızı elektromagnetik bir dünyada geçirdiğimizi söylersem abartmış olmam. (Gravitasyon kuvvetini de unutmayalım.)

Atom çekirdeğinde proton ve nötronları bir arada tutan çekirdek kuvveti çok kısa erimlidir; bu yüzden, elektriksel kuvvetlerden yüzlerce kat daha şiddetli olmasına rağmen, etkisini duymayız. Yine, bazı radyoaktivite olaylarına neden olan "zayıf" kuvvet ise, hem kısa erimli ve hem de elektriksel kuvvetten daha zayıftır. Son olarak, gravitasyon kuvveti diğer üçüne göre o kadar zayıftır ki, etkisini duyabilmemiz için, Dünya veya Güneş gibi muazzam büyüklükte kütleler gerekir. İki elektron arasındaki elektrostatik itme kuvveti, ikisi arasındaki gravitasyon kuvvetinin 10^{42} katıdır.

Elektromagnetik kuvvet sadece günlük yaşamda en fazla hissedilen kuvvet olmayıp, aynı zamanda *tümüyle anlaşılmış olan tek kuvvettir*. Gerçi, klasik bir gravitasyon kuvveti teorisi (Newton'un evrensel çekim kuvveti), veya görelî bir gravitasyon kuvveti teorisi (Einstein'ın genel görelilik teorisi) vardır, ama tam tutarlı bir kuantum gravitasyon teorisi (çok kişinin çabalarına rağmen) henüz yapılamamıştır. Halen, zayıf kuvvetin başarılı (ama karmaşık) bir teorisi ve çekirdek kuvvetleri için iyi bir aday teori (kromodinamik) vardır. Bu iki teorisin de ilham kaynağı elektromagnetik teori olmuştur. O halde, tam anlaşılmış ve tutarlı bir teori olarak elektromagnetik teori, tüm fizikçiler için bir tür referans kaynağı, diğer teorilerin ulaşmaya çalıştığı bir amaç olmaktadır.

Klasik elektromagnetik teori küçük aşamalar halinde ve büyük zorluklarla Franklin, Coulomb, Ampère, Faraday ve diğer bilim adamları tarafından geliştirildi. Fakat, tüm bu parçaları bir araya getirip tutarlı bir teori oluşturan kişi James Clerk Maxwell'dir. Klasik elektromagnetik teori şimdilerde yüz yaşına basmıştır.

FİZİK TEORİLERİNİN BİRLEŞTİRİLMESİ

Başlangıçta elektrik ve magnetizma ayrı iki fizik dahiydi. Biri bakelit çubuklar ve kedi postlarıyla uğraşırken, diğeri mıknatıslar, demir tozları ve pusula iğneleriyle uğraşıyordu. 1820 yılında Oersted bir *elektrik* akımının *mıknatıslı* pusula iğnesini saptırabildiğini gözledi. Kısa süre içinde Ampère tüm magnetik olayların hareketli yüklerden kaynaklandığını bir postula olarak ileri sürdü. Daha sonra Faraday hareketli bir *mıknatısın elektrik* akımı ürettiğini keşfetti. Sonunda Maxwell ve Lorentz teoriiyi tamamladığında, elektrik ve magnetizma ayrılmaz bir bütün içinde yer almışlardı. Artık iki ayrı konu olarak değil, *elektromagnetizma* adıyla biliniyorlardı.

Faraday ışığın da elektriksel karakterde olduğunu ileri sürmüştü. Maxwell'in birleştirdiği teori bu hipotezin muhteşem bir ispatı oldu, ve kısa sürede optik —yani mercek, ayna, prizma, girişim ve kırınım bilimi— elektromagnetizma içinde yerini aldı. 1888 yılında Maxwell teorisinin deneysel kanıtını bulan Hertz şöyle yazıyordu: "Işık ve elektrik arasındaki bağlantı artık sağlanmıştır. . .Yanan veya ışık saçan her cisimde elektriksel bir olayın varlığını görürüz. . .İnsanın da artık elektriksel bir organı vardır: göz." 1900 'lü yıllara gelindiğinde, fizikğin üç büyük dalı, elektrik, magnetizma ve optik, birleşik bir teori' olmuştur.

Einstein daha büyük bir birleşmenin, elektromagnetizma ve gravitasyonu birleştirmenin düşünüyordu. Onun kurduğu birleşik alan teorisi pek başarılı olmadı, fakat peşinden bir sürü birleşik teoriyi sürükledi. 1960 'lı yıllarda Glashow, Weinberg ve Salam'ın *elektrozayıf* teorisi, 70 'li yıllarda çekirdek kuvvetini de içine alan *büyük birleşik teoriler* geldi. Bunun son aşaması, 1980 'li yıllarda *süpersicim* teorisi olup, kurucularına göre dört kuvveti

de birleştiriyor, bir çeşit "Her Şeyin Teorisi" oluyordu. Bu aşamaların her birinde matematik zorluklar daha da artıyor, hipotez ile deneysel test arasındaki uçurum daha da artıyordu. Ama yine de, elektromagnetik teorisin öncülük ettiği kuvvetleri birleştirme çabası, fizikğin gelişmesinde önemli bir yer tutar.

ELEKTROMAGNETİZMANIN ALAN TEORİSİ

Bir elektromagnetizma teorisinin yanıt vermesi gereken temel problem şudur: *Burada tuttuğum elektrik yüklerin şuradaki diğer yükler üzerindeki etkisi nedir?* Bu sorunun klasik çözümü bir alan teorisi şeklinde olur: Bir elektrik yükü, tüm uzayda varlığını hissettiren elektrik ve magnetik alanlar oluşturur; bu alan içinde yer alan diğer her yük bir kuvvet hisseder. O halde, iki yük arasındaki etkileşme *alan tarafından iletilmiş olur*.

Bir yük *imlendiği* zaman bu alanın bir kısmı yükten "kopar" (söz gelişi) ve ışık hızıyla ilerleyerek enerji, momentum ve açıl momentum götürür. Buna *elektromagnetik radyasyon* diyoruz. Radyasyonun varlığı elektromagnetik alanın kendi başına (bir atom veya futbol topu gibi), bağımsız bir dinamik varlık olduğunu gösterir. Bu durumda, yükler arasındaki kuvveti incelemek yerine, dikkatimizi elektromagnetik alanın özelliklerine çeviririz. Fakat, elektromagnetik alanı doğuran bir yük ve onu hisseden diğer bir yük vardır; bu nedenle önce elektrik yükünün özelliklerine bir göz atalım.

ELEKTRİK YÜKÜNÜN ÖZELLİKLERİ

1. *İki farklı türde yük vardır*; bunlara "artı" ve "eksi" diyoruz, çünkü aynı noktaya $+q$ ve $-q$ yükü birlikte konursa, birbirinin etkisini sıfırladıkları (yani, hiç yük yokmuş gibi davrandıkları) gözlenir. Bu nokta size çok açık gelebilir, ama diğer olasılıkları bir düşünün: ya 8 veya 10 farklı türde yük olsaydı? (Örneğin, kromodinamik teorisinde üç farklı yük vardır.) Veya, iki farklı yük birbirini sıfırlamasaydı? Madde içinde artı ve eksi yüklerin inanılmaz bir duyarlılıkla birbirine eşit miktarda bulunuşu ve birbirinin etkisini yokedişi hayret vericidir. Böyle olmasaydı, çok büyük kuvvetlerin etkisiyle yaşamak zorunda kalırdık. Bir patates içindeki artı ve eksi yükler arasındaki bağıl fark 10^{-10} kadar bile olsaydı, patates bomba gibi patlardı.

2. *Yük korunumludur*. Yoktan varedilemez, veya yokedilemez. (Gerçi, artı bir yük ile eksi bir yük birlikte yokolabilirler, fakat bir yük tek başına yokolamaz.) Buna göre, evrendeki net elektrik yükü sonsuzdan bu yana sabit değerdedir. Buna *global yük korunumu* denir. Bu korunum yasaasına göre bir yük İstanbul'da yokolup, aynı anda Rize'de ortaya çıkabilmelidir. Fakat, bunun gerçekleşmediğini biliyoruz. Çünkü, İstanbul'dan Rize'ye sürekli bir yol izleyerek gitmiş olmalıdır. Buna *yerel yük korunumu* denir. Daha sonra, yerel yük korunumunun matematik ifadesi olan *sürekli denklemini* göreceğiz.

3. *Yük kuantalanmıştır*. Bu özellik, klasik elektromagnetik teori için gerekli değildir, ama yükün belirli bir yük biriminin katları oluşu deneysel olarak gözlenmiş bir olgudur. Protonun yüküne $+e$ dersek, elektronun yükü $-e$, nötronunki 0, pi mezonlarının $+e$, 0, $-e$ olur. Karbon çekirdeğinde $+6e$ yük vardır. Yani, hiçbir zaman 7.39e veya $\frac{1}{2}e$ olmaz.¹ Bu temel yük birimi o kadar küçüktür ki, pratikte yükün sürekli artıp azaldığını düşünebiliriz. (Su da moleküllerden oluşmuştur, ama büyük miktarda suyu sürekli bir akışkan gibi düşünürüz.)

Yükün bu üç temel özelliğini gördük. Yükler arasındaki kuvvetlere geçmeden önce, biraz matematik bilgisine gerek vardır. Bu matematik bagajımızı Bölüm 1'de hazırlayacağız.

¹ Temel parçacıklar teorisine göre, proton ve nötronları oluşturan kuark adındaki parçacıkların yükleri kesirli ($\pm \frac{2}{3}e$ veya $\pm \frac{1}{3}e$) olabilir. Fakat, kuarklar doğada gözlenmemişti; ayrıca bu, yükün kuantalanmış olduğunu da değiştirmez, sadece temel yük birimini daha küçük yapar.

BİRİMLER

Elektromagnetik teorideki birim sistemi karmaşası bazan fizikçilerin birbiriyle iletişimini zorlaştıracak boyutlara varır. Bu durum mekanikten çok daha karmaşıktır. Mekanikte hiç olmazsa denklemler her birim sisteminde aynı olurlar. $F = ma$ denklemini, kuvveti hangi birimde seçerseniz seçin, yine $F = ma$ olarak yazılır. Fakat, elektromagnetik teoride seçilen birim sistemine göre, denklemler değişebilir. Örneğin, Coulomb yasası üç ayrı birim sisteminde şöyle ifade edilir:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ (CGS) veya } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ (MKS) veya } F = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ (HL)}$$

En çok kullanılan iki birim sistemi CGS (veya, Gauss) ve MKS (veya, SI) birim sistemleridir. Parçacık fizikçileri Heaviside-Lorentz sistemi denilen üçüncü birini tercih ederler. CGS sisteminin birçok teorik avantajı olmakla beraber, lisans eğitiminde MKS sistemi tercih edilir; sanıyorum günlük yaşamdaki birimlerle (volt, ampere, watt) doğrudan bağlantısı olduğu içindir. Bu kitapta da MKS birimleri kullanacağız. Ek B 'de birim sistemleri ve birbiriyle ilişkileri daha ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

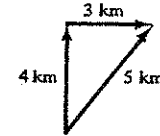
1

VEKTÖR ANALİZİ

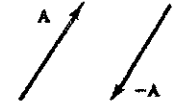
1.1 VEKTÖR CEBİRİ

1.1.1 Vektör İşlemleri

Şek. 1.1'de olduğu gibi, önce kuzey yönünde 4 km ve sonra doğu yönünde 3 km gittiğinizi düşünün; toplam 7 km yol almış olursunuz; ama başlangıç konumundan sadece 5 km yer değiştirmiş oldunuz. Alıştığımız toplamadan farklı biçimde toplanabilen bu tür büyüklükler için bir cebire gerek duyarız. Bu farklılığın kaynağı, yer değiştirmenin hem *büyüklik* ve hem de *yöne* sahip oluşudur; bunları toplarken her ikisini de dikkate almak gerekir. Bu tür nesnelere vektör adı verilir; diğer örnekler arasında hız, ivme, kuvvet ve momentum sayılabilir. Buna karşın, yönü olmayıp sadece büyüklüğü olan nesnelere *skaler* denir; örnek olarak kütle, yük, yoğunluk ve sıcaklık sayılabilir. Vektörleri göstermek için *kalm* ve üzerinde ok bulunan harfler kullanacağız (\vec{A} , \vec{B} gibi). Skalerleri normal harflerle göstereceğiz. Şekil ve diyagramlarda vektörler birer okla (\rightarrow) gösterilir; okun uzunluğu vektörün büyüklüğüyle orantılı çizilir ve ok yönü vektörün yönü olur. ($-\vec{A}$) vektörü, \vec{A} ile aynı büyüklükte fakat zıt yöndeki vektör olur (Şek. 1.2). Dikkat ederseniz, vektörlerin büyüklük ve yönü vardır, ama *yeri yoktur*. Ankara'dan kuzeye doğru 4 km lik yer değiştirme ile, Van'dan kuzeye doğru 4 km yer değiştirme aynı vektörle gösterilir. (Tabii dünya yüzeyinin eğriliğini yok sayarsanız.) O halde, şekiller üzerinde vektörler, büyüklük ve yönlerini değiştirmeden, istenildiği gibi kaydırılabilir.

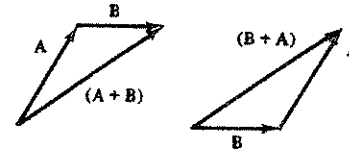


Şekil 1.1

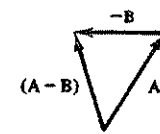


Şekil 1.2

Vektörler üzerinde dört cebirsel işlem tanımlanabilir: bir toplama ve üç türlü çarpma.



Şekil 1.3



Şekil 1.4

(i) İki vektörün toplamı. \vec{B} vektörünü alın ve başlangıç noktası \vec{A} vektörünün bitiş noktasına gelecek şekilde kaydırın; \vec{A} nın başlangıcından \vec{B} nin bitiş noktasına çizilen vektör $\vec{A} + \vec{B}$ olur (Şek. 1.3). (Böylece iki yer değiştirmenin toplama kuralını genelleştirmiş oluyoruz.) Toplamanın sıra *değiştirme özelliği* vardır:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

Yani, önce doğuya 3 km sonra kuzeye 4 km gitmekle, veya önce kuzeye 4 km sonra doğuya 3 km gitmek aynı yere çıkar. Toplamanın *dağılma özelliği* de vardır:

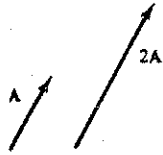
$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

Bir vektörü çıkartmak için, onun zıt vektörü toplanır:

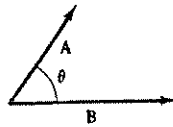
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

(ii) Bir skalerle çarpma. Bir vektörün pozitif bir a skaler sayısıyla çarpılması sırasında, sadece vektörün büyüklüğü çarpılır fakat yönü değişmez (Şek. 1.5). (Eğer a negatif ise vektörün yönü zıt olur.) Skalerle çarpma işlemi *dağılma özelliğine* sahiptir:

$$a(\vec{A} + \vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$$



Şekil 1.5



Şekil 1.6

(iii) İki vektörün skaler çarpımı. İki vektörün skaler çarpımı

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır; burada θ aynı noktadan başlayan iki vektör arasındaki açıdır (Şek. 1.6). $\vec{A} \cdot \vec{B}$ nin skaler bir büyüklük olduğuna dikkat edin. Skaler çarpımın sıra değiştirmesi

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

ve dağılma özelliği vardır:

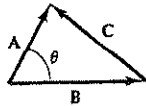
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (1.2)$$

Geometrik yoruma göre $\vec{A} \cdot \vec{B} = A(B \cos \theta)$ yazılırsa, \vec{B} nin \vec{A} doğrultusundaki izdüşümünün A ile çarpımı olur. İki vektör paralel ise $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$ olur. Özel olarak, herhangi bir \vec{A} vektörü için

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 \quad (1.3)$$

olur. Keza, \vec{A} ile \vec{B} birbirine dikse, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ olur.

Örnek 1.1: $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ olsun (Şek. 1.7). \vec{C} nin kendisiyle skaler çarpımını hesaplayın.



Şekil 1.7

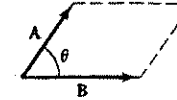
Çözüm: $\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B}$ veya,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

olur. Bu sonuç, trigonometride kosinüs teoremi olarak bilinir.

(iv) İki vektörün vektörel çarpımı. İki vektörün vektörel çarpımı

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n} \quad (1.4)$$



Şekil 1.8

olur. Burada \hat{n} birim vektörü (yani, büyüklüğü 1 olan vektör) \vec{A} ile \vec{B} nin oluşturduğu düzleme diktir. Tabii bir düzleme dik vektör iki zıt yönde olabilir; bu karışıklığı çözmek için sağ-el kuralı kullanılır: dört parmağınızı birinci vektörden ikinciye doğru (aralarındaki küçük açı yönünde) kıvrırın; bu durumda baş parmağınız \hat{n} nin yönünü verir. (Şek. 1.8'de $\vec{A} \times \vec{B}$ sayfanın içine doğru, $\vec{B} \times \vec{A}$ ise sayfanın dışına doğru yönde olur.) $\vec{A} \times \vec{B}$ çarpımının bir vektör olduğuna dikkat edin. Vektörel çarpımın dağılma özelliği vardır:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C}) \quad (1.5)$$

Fakat, vektörel çarpım sıra *değiştirmesiz*:

$$(\vec{B} \times \vec{A}) = -(\vec{A} \times \vec{B}) \quad (1.6)$$

Geometrik yoruma göre $|\vec{A} \times \vec{B}|$ büyüklüğü, \vec{A} ile \vec{B} vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarın alanı olur (Şek. 1.8). İki vektör paralel ise, vektörel çarpımları sıfırdır. Özel olarak, her \vec{A} vektörü için

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

olur.

Problem 1.1 (1.1) ve (1.4) tanımlarını kullanarak ve uygun şekiller çizerek,

(a) Aynı düzlemdeki üç vektör,

(b) Herhangi üç vektör

için, skaler çarpım ve vektörel çarpımın dağılma özelliği olduğunu gösterin.

Problem 1.2 Vektörel çarpımın *birleşme* özelliği var mıdır? Yani,

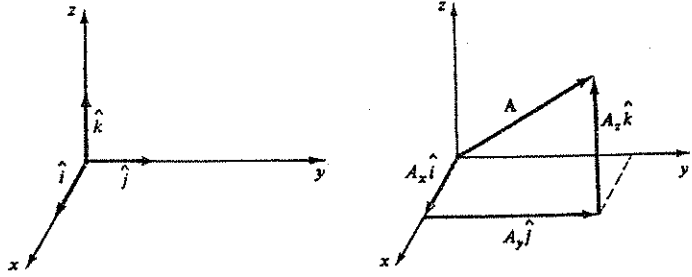
$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \stackrel{?}{=} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

olur mu? Cevabınız evetse, ispatlayın; hayırsa, bir karşı örnek bulun.

1.1.2 Bileşenlerle Vektör Cebiri

Bir önceki kısımda dört vektör işlemi (toplama, skalerle çarpma, skaler çarpma ve vektörel çarpma) "soyut" olarak tanımladım—yani, herhangi bir koordinat sistemine gerek duymadım. Oysa pratikte, bir x, y, z Kartezyen (dik) koordinat sistemi seçip "vektörlerin bileşenleri" ile çalışmak kolaylık sağlar. Şek. 1.9a'da gösterildiği gibi, x, y, z eksenlerine paralel birim vektörler sırasıyla $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ olsun. Herhangi bir \vec{A} vektörü bu bileşenler cinsinden şöyle ifade edilebilir (Şek. 1.9b):

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$



Şekil 1.9

A_x, A_y, A_z sayılarına \vec{A} vektörünün bileşenleri denir; geometrik yorumu göre bileşenler, vektörün her üç koordinat eksenine doğrultusundaki izdüşümleri olurlar. Şimdi, daha önce tanımladığımız dört işlemi bileşenler cinsinden şöyle yazabiliriz:

$$(i) \quad \vec{A} + \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k} \quad (1.7)$$

Kural: Vektörler toplandığında bileşenler toplanır.

$$(ii) \quad a\vec{A} = a(A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) = (aA_x) \hat{i} + (aA_y) \hat{j} + (aA_z) \hat{k} \quad (1.8)$$

Kural: Bir skalerle çarpıldığında, her bileşen çarpılır.

$$(iii) \quad \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \text{ birbirine dik birim vektörler olduğundan,} \\ \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \quad (1.9)$$

Bu özellikler dikkate alınırsa, skaler çarpım şöyle yazılabilir:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.10)$$

Kural: Skaler çarpımda aynı indisli bileşenler çarpılıp toplanır.

Özel olarak,

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

olduğundan

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.11)$$

olur. İsterseniz buna Pisagor teoreminin üç boyuta genelleme diyebilirsiniz. Dikkat edilirse, \vec{A} 'nın herhangi bir birim vektör ile skaler çarpımı, \vec{A} 'nın o yöndeki izdüşümünü verir (yani, $A_x = \vec{A} \cdot \hat{i}$, $A_y = \vec{A} \cdot \hat{j}$, $A_z = \vec{A} \cdot \hat{k}$).

(iv) Yine, birim vektörler arasında

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{i} &= \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \\ \hat{i} \times \hat{j} &= -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} &= -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} &= -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j} \end{aligned} \quad (1.12)$$

bağıntıları gözönüne alınırsa

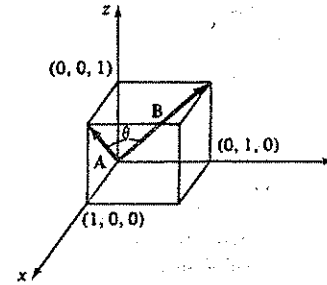
$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \quad (1.13)$$

olur. Bu karmaşık ifadeyi daha temiz olarak bir determinant şeklinde yazabiliriz:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

Kural: Vektörel çarpımı hesaplamak için yazılan determinantın birinci sırasına $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ vektörleri, ikinci sıraya \vec{A} 'nın bileşenleri ve üçüncü sıraya \vec{B} 'nin bileşenleri konur.

Örnek 1.2: Bir kübün yüzey köşegenleri arasındaki açığı hesaplayın.



Şekil 1.10

Çözüm: Kenar uzunluğu 1 olan kübü alıp, Şek. 1.10'daki gibi, bir köşesi orijinde olacak şekilde yerleştirelim. \vec{A} ve \vec{B} ile gösterdiğimiz yüzey köşegenleri şöyle yazılabilir:

$$\vec{A} = 1\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k}, \quad \vec{B} = 0\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k}$$

Bu bileşenler cinsinden skaler çarpımı hesaplarız:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

Öte yandan, skaler çarpımın "soyut" tanımını yazalım:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = \sqrt{2}\sqrt{2} \cos \theta = 2 \cos \theta$$

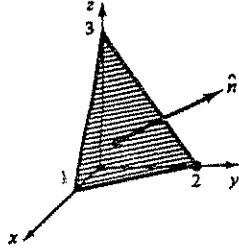
Bu iki ifadenin eşitliğinden aradaki açı bulunur:

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \text{veya} \quad \theta = 60^\circ$$

Bu sonucu daha kolay bulma yolu, kübün üst yüzeyindeki diğer köşegeni çizip eşkenar bir üçgen elde etmektir. Ancak, geometrinin böyle basit olmadığı durumlarda açıları bulmak için, skaler çarpımın bileşenli ve soyut ifadelerini karşılaştırmak çok daha kullanışlı olur.

Problem 1.3 (a) (2, 8, 7) noktasından (7, 5, 11) noktasına giden yerdeğiştirme vektörünün bileşenlerini hesaplayın.

(b) (x_0, y_0, z_0) noktasından (x, y, z) 'ye giden yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri ne olur?



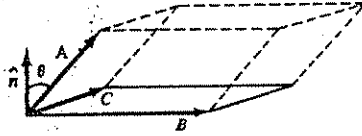
Şekil 1.11

Problem 1.4 Bir kübenin cisim köşegenleri arasındaki açıyı bulun.

Problem 1.5 Vektörel çarpımı kullanarak, Şek. 1.11'de gösterilen düzleme dik olan \hat{n} birim vektörünün bileşenlerini bulun.

1.1.3 Üçlü Çarpımlar

Vektörel çarpımın sonucu bir vektör olduğuna göre, bunu da üçüncü bir vektörle skaler veya vektörel olarak çarpabiliriz.



Şekil 1.12

(i) Üçlü skaler çarpım: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$. Şek. 1.12'de görüldüğü gibi, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ üzerine kurulu paralelkenar prizmada, $|\vec{B} \times \vec{C}|$ büyüklüğü taban alanı ve $|\vec{A} \cos \theta|$ yükseklik olduğundan, $|\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$ büyüklüğü bu paralelkenar prizmanın hacmi olur. Ayrıca, sıra değiştirme özelliği vardır:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (1.15)$$

Burada, vektörlerin dönerli permütasyonu yapıldığına dikkat edilmelidir; zira, diğer permütasyonlar

$$\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A})$$

ters işaretli sonuç verirler. Bileşenler cinsinden şöyle yazılır:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1.16)$$

Skaler ve vektörel çarpımların kendi aralarında sıra değiştirdiğine dikkat edin:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

[bu özellik (1.15) denkleminde kaynaklanır]; ancak, parantezlerin yeri önemlidir: $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \times \vec{C}$ gibi bir ifade anlamsızdır— bir skaler ve bir vektör ile vektörel çarpım olmaz.

(ii) Üçlü vektörel çarpım: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$. Üçlü vektörel çarpım şöyle sadeleşir:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (1.17)$$

Çarpımlarda sıra ve gruplandırma önemlidir; örneğin

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B}$$

1.1. VEKTÖR CEBİRİ

Denklem (1.17) deki kural uygulanarak, diğer tüm yüksek dereceden vektörel çarpımlar indirgenebilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \\ \vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) &= (\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}))\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{C} \times \vec{D}) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Problem 1.6 Denklem 1.17'deki kuralı, vektör bileşenleri kullanarak ispatlayın.

Problem 1.7 Şu özdeşliğin doğru olduğunu ispatlayın:

$$[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})] + [\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A})] + [\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})] = 0$$

Hangi durumda $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ olur?

1.1.4 Vektörler Nasıl Dönüşür?

Bir vektörü "büyüklük ve yönü olan bir nesne" olarak tanımlamak pek yeterli değildir. "Yön" ne demektir? Bu soru size akademik gelebilir, ama birazdan vektöre benzeyen öyle bir türev cinsiyile karşılaşacağız ki bunun vektör olup olmadığına zor karar vereceksiniz. Öte yandan, bir vektörü "üç bileşeni olan ve toplama kuralına uyan her nesne" diye tanımlamak da isteyebilirsiniz. Şunu bir düşünün: Bir meyva sepetinde N_x sayıda elma, N_y sayıda armut ve N_z sayıda şeftali olsun. $\vec{N} \equiv N_x \hat{i} + N_y \hat{j} + N_z \hat{k}$ bir vektör müdür? Bunun da üç bileşeni vardır; diğer bir sepetteki M_x elma, M_y armut ve M_z şeftaliyi sepetimize eklersek, sonuçta $(N_x + M_x)$ sayıda elma, $(N_y + M_y)$ sayıda armut ve $(N_z + M_z)$ sayıda şeftali olur. Yani, \vec{N} de vektör gibi toplanır. Oysa, fizikçinin bakış açısından, bunun bir vektör olmadığı açıktır, çünkü yönü yoktur. Burada eksik olan nedir?

Yanıt şudur: *Koordinat sistemi değiştirildiğinde \vec{N} uygun biçimde dönüşmez.* Uzayda konumları tanımlamakta kullandığımız koordinat sistemi tamamen keyfi olarak seçilebilir; fakat bir sistemdeki vektör bileşenlerini diğer sistemdekine dönüştürmenin belirli kuralları vardır. Örneğin, x, y, z sistemine göre, ortak $x = x'$ eksenini etrafında ϕ açısıyla döndürülmüş olan bir x', y', z' sistemi düşünelim. Şek. 1.13'e göre, yz - düzlemindeki bir \vec{A} vektörünün x, y, z sistemindeki bileşenleri

$$A_y = A \cos \theta, \quad A_z = A \sin \theta$$

olur. Diğer x', y', z' sisteminde ise

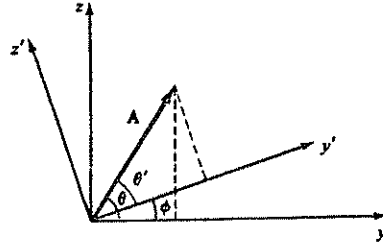
$$\begin{aligned} A'_y &= A \cos \theta' = A \cos(\theta - \phi) = A(\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi) = \cos \phi A_y + \sin \phi A_z \\ A'_z &= A \sin \theta' = A \sin(\theta - \phi) = A(\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi) = -\sin \phi A_y + \cos \phi A_z \end{aligned}$$

olur. Bu sonucu matris gösteriminde şöyle ifade edebiliriz:

$$\begin{pmatrix} A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Dağa genel olarak, üç boyutta herhangi bir eksen etrafındaki dönmenin dönüşüm ifadesi

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1.20)$$



Şekil 1.13

olur, veya daha kısa yazmak istersek

$$A'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} A_j \quad (1.21)$$

olur; burada 1,2,3 indisleri sırasıyla x, y, z yerine geçer. Verilen bir dönme için R matrisinin elemanları, yukardaki örnekte olduğu gibi, geometrik yolla hesaplanabilir.

Şimdi tekrar soralım: \vec{N} 'nin bileşenleri böyle mi dönüşür? Elbette hayır—uzayda hangi koordinat sistemini kullanırsanız kullanın, sepetteki elma sayısı aynıdır. Farklı bir koordinat sistemi seçerek bir armutu elmaya dönüştüremezsiniz. O halde vektör, koordinat sistemi değiştiğinde yerdeğiştirme vektörü gibi dönüşen üç bileşenli bir nesnedir. (Tüm vektörler için yerdeğiştirme vektörünü örnek alıyoruz.)

Sırası gelmişken, ikinci dereceden tansör adıyla, $T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yx}, \dots, T_{zz}$ gibi dokuz bileşenli bir nesne tanımlarsak, bunun da dönüşümü iki R matrisiyle sağlanır:

$$T'_{xx} = R_{xx}(R_{xx}T_{xx} + R_{xy}T_{xy} + R_{xz}T_{xz}) + R_{xy}(R_{xx}T_{yx} + R_{xy}T_{yy} + R_{xz}T_{yz}) + R_{xz}(R_{xx}T_{zx} + R_{xy}T_{zy} + R_{xz}T_{zz})$$

veya, daha kısa olarak

$$T'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 R_{ik} R_{jl} T_{kl} \quad (1.22)$$

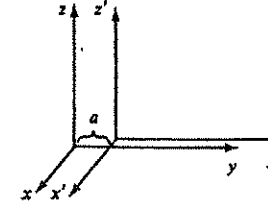
yazılır. Genel olarak, n .ci dereceden bir tansörün n sayıda indisi, 3^n sayıda bileşeni olur ve dönüşümü sırasında n tane R matrisi kullanılır. Bu hiyerarşiye göre, vektörler 1. dereceden, skalerler ise 0. dereceden tansör olurlar.

Problem 1.8 (a) Denklem (1.19) ile verilen iki-boyutlu dönme matrisinin, \vec{A} vektörünün boyunu değiştirmediğini, yani $A'^2_x + A'^2_y = A^2_x + A^2_y$ olduğunu gösterin. (b) Denklem (1.20) deki üç-boyutlu dönme matrisi elemanları (R_{ij}) arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır ki her \vec{A} vektörünün boyu değişmez kalsın?

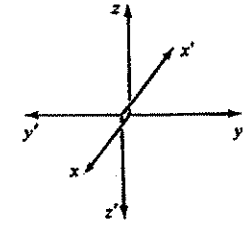
Problem 1.9 Orijin ile $(1, 1, 1)$ noktasından geçen bir eksen etrafında 120° lik bir dönmenin R dönüşüm matrisi elemanlarını bulun. (Yukardan orijine bakıldığında dönme saat yönünde olsun.)

Problem 1.10 (a) Şek. 1.14a'daki öteleme dönüşümü $x' = x, y' = y - a, z' = z$ bağıntılarıyla belirlenir. Bu öteleme sırasında bir \vec{A} vektörünün bileşenleri nasıl değişir? (b) Şek. 1.14b'de $x' = -x, y' = -y, z' = z$ bağıntılarıyla belirlenen tersinme (inversiyon) dönüşümü altında bir vektörün bileşenleri nasıl değişir?

(c) İki vektörün (1.13) denklemiyle tanımlanan vektörel çarpımı, tersinme dönüşümü altında nasıl değişir? (Bu özel davranışı nedeniyle, iki vektörün çarpımı olan vektörlere psödo-vektör denir.) İki psödo-vektörün çarpımı bir vektör mü, yoksa psödo-vektör mü olur? Üçlü



(a)



(b)

Şekil 1.14

vektörel çarpım psödo-vektör olur mu? Psödo-vektörlere klasik mekanikten iki örnek bulun. (d) Üçlü skaler çarpım tersinme dönüşümü altında nasıl dönüşür? (Bu tür büyüklüklere psödo-skaler denir.)

1.2 DİFERANSİYEL HESAP

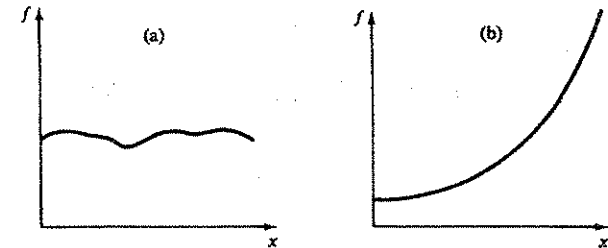
1.2.1 "Alışılmış" Türev

Soru: Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonumuz var. Bunun türevi olan df/dx bize ne anlatır? **Yanıt:** x değişkenini küçük bir dx kadar değiştirdiğimizde $f(x)$ fonksiyonunun ne kadar hızlı değişeceğini söyler:

$$df = \left(\frac{df}{dx} \right) dx \quad (1.23)$$

Diğer bir deyişle, x değerini dx kadar değiştirirsek f değeri df kadar değişir; orantı katsayısı türev olur. Örneğin, Şek. 1.15a'daki fonksiyon x 'e göre yavaş değişmektedir, dolayısıyla türevi küçük olur. Şek. 1.15b'deki fonksiyon x 'e göre hızlı değişmektedir ve df/dx türevi büyüktür.

Geometrik yorum: df/dx türevi $f(x)$ eğrisinin eğimi olur.



Şekil 1.15

1.2.2 Gradyan

Şimdi üç bağımsız değişkenli bir fonksiyon, örneğin bir odadaki $T(x, y, z)$ sıcaklık dağılımını düşünelim. (Odanın bir köşesini orijin alıp bir eksen takımı seçilirse, her (x, y, z) konumlu yerdeki sıcaklık $T(x, y, z)$ fonksiyonu ile verilir.) T gibi üç değişkene bağlı fonksiyonlar için türev kavramını genişletmek istiyoruz.

Türev küçük bir yerdeğiştirme için fonksiyonun ne kadar hızlı değiştiğini verir demiştik. Fakat bu kez durum biraz karışıktır; çünkü hangi yönde yer değiştirdiğimiz önemli olabilir:

Dikey yönde yer değiştirdiğimizde sıcaklık hızı değişirken, yatay yöndeki yer değiştirme sırasında çok az değişebilir. O halde, " $T(x, y, z)$ ne kadar hızlı değişiyor?" sorusunun cevabı, gidilen yöne bağlı olarak, sonsuz sayıda olabilir. Görünüşe bakılırsa, $T(x, y, z)$ nin değişimini belirtmek için sonsuz sayıda türeve gerek olacaktır.

Oysa durum o kadar kötü sayılmaz. Kısmi türevler konusunda bilinen bir kural vardır. Buna göre,

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz \quad (1.24)$$

olur. Bu kural, değişkenler dx, dy, dz kadar arttığında T 'nin ne kadar değişeceğini vermektedir. Yani, sonsuz değil, üç tane türeve gerek vardır: Fakat bunlar, herbir koordinat eksenine doğrultusundaki kısmi türevlerdir. Şimdi, bu kuralı biraz değişik yazacağım ve buradan bazı sonuçlar çıkaracağım.

(1.24) denklemi bir skaler çarpımı hatırlatmaktadır:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k}\right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) = (\vec{\nabla} T) \cdot (d\vec{l}) \quad (1.25)$$

Burada iki sembol kullandım: Bunlardan birincisi infinitezimal yerdeğiştirme vektörü

$$d\vec{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \quad (1.26)$$

diğeri ise

$$\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \quad (1.27)$$

olup T nin **gradyanı** adını alır; bu, üç bileşenli bir vektörel büyüklük olup, türevi genelleştirmek için aradığımız büyüklüktür. Yani, (1.25) denklemi (1.23) denkleminin üç boyutlu sürümüdür.

Gradyanın geometrik yorumu. Diğer vektörler gibi, gradyanın da bir büyüklüğü ve bir yönü vardır. Geometrik yorumu bulmak için, (1.25) denklemi skaler çarpımın "soyut" ifadesini yazalım:

$$dT = (\vec{\nabla} T) \cdot (d\vec{l}) = |\vec{\nabla} T| |d\vec{l}| \cos \theta \quad (1.28)$$

Burada θ açısı $\vec{\nabla} T$ ile $d\vec{l}$ arasındadır. Şimdi $d\vec{l}$ büyüklüğünü sabit tutup θ açısını değiştirirsek, T 'deki maksimum artışın $\theta = 0$ (yani, $\cos \theta = 1$) değerinde oluşacağını buluruz. Yani, aynı bir $|d\vec{l}|$ yolunu $\vec{\nabla} T$ yönünde gidersem, dT artışı en büyük olur. O halde,

$\vec{\nabla} T$ **gradyanı**, T fonksiyonundaki maksimum artış yönünde bir vektördür.

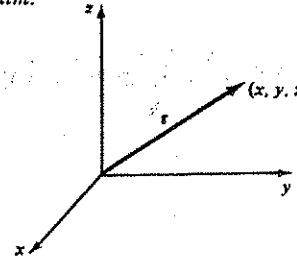
Buna ek olarak,

$|\vec{\nabla} T|$ **büyüklüğü**, bu maksimum artış yönünde T 'nin eğimidir.

Bir tepenin yamacında durduğunuz varsayın. Çevrenize bakın ve yamacın en sarp yükseldiği yönü bulun; gradyan vektörü bu yöndedir. Sonra, bu yöndeki eğimi (yani, yükseliş/yatay gidiş oranını) hesaplayın; gradyanın büyüklüğü bu değerdedir. (Buradaki fonksiyon yamacın yüksekliğidir; bağlı olduğu koordinatlar ise, örneğin enlem ve boylam olabilir. Bu örnekteki fonksiyon, üç değil iki değişkene bağlıdır, ama gradyanın geometrik yorumunu anlamak iki boyutta daha kolaydır.) (1.28) denklemine tekrar dönersek, en keskin inişin gradyana zıt yönde olduğunu, ayrıca gradyana dik doğrultuda ($\theta = 90^\circ$) eğimin sıfır olduğunu görürüz (gradyan eşyükseklik eğrilerine diktir). Bu özelliklere sahip olmayan yüzeyler elbette düşünebilirsiniz; ama herbirinde kırık çıkıklar olur ve türevi alınamayan fonksiyonlara karşılık gelirler.

Gradyanın sıfır olması ne anlama gelir? (x, y, z) noktasında $\vec{\nabla} T = 0$ ise, bu nokta etrafındaki her küçük yerdeğiştirme için $dT = 0$ olacaktır. Bu, $T(x, y, z)$ fonksiyonu için bir kararlı nokta olur; yani, bir maksimum (tepe), minimum (vadi tabanı), bir "eyer noktası" (geçit) veya bir "omuz" olabilir. Bu durum, tek değişkenli fonksiyonlardaki gibidir; orada da türevin sıfır oluşu maksimum, minimum veya dönüm noktasına işaret eder. O halde, üç değişkenli bir fonksiyonun ekstremum noktalarını bulmak isterseniz, gradyanını sıfıra eşitleyin.

Örnek 1.3: (x, y, z) noktasının orijinden uzaklığı $r(x, y, z)$ olsun; yani $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (Şek. 1.16). Hesaba geçmeden önce, $\vec{\nabla} r$ nin ne anlama geldiğini düşünelim ve bunu hesabımızla doğrulayalım.



Şekil 1.16

İlk olarak, $\vec{\nabla} r$ 'nin yönü nedir? Kolayca göreceğimiz gibi, r deki en hızlı artış orijinden radyal olarak uzaklaştığımızda meydana gelir. Öte yandan, radyal yönde dl kadar uzaklaşırsak, r deki artış da tam bu kadardır:

$$dr = dl$$

O halde, $\vec{\nabla} r$ nin büyüklüğü 1 olur. Sonuç olarak $\vec{\nabla} r$, radyal yönde birim vektör olmalıdır.

Şimdi bunun böyle olduğunu kontrol edelim:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} r &= \frac{\partial r}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \hat{k} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{i} + \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{j} + \frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{k} \\ &= \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r} \end{aligned}$$

Burada $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ orijinden (x, y, z) noktasına çizilen vektördür.

Problem 1.11 Şu fonksiyonların gradyanlarını hesaplayın:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4$

(b) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$

(c) $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$

Problem 1.12 Bir dağ yamacının yüksekliği (metre cinsinden)

$$h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$$

olarak veriliyor. Burada x ve y , km cinsinden, deniz düzeyindeki bir orijinden sırasıyla doğu ve kuzey yönünde uzaklıklardır.

(a) Dağın tepesi nerededir?

(b) Dağ ne kadar yüksektir?

(c) Orijinden 1 km kuzey ve 1 km doğu yönündeki bir noktada yamacın eğimi ne kadardır? Aynı noktada, yamacın en sarp olduğu yönü bulun.

• **Problem 1.13** Sabit bir (x_0, y_0, z_0) noktasından (x, y, z) noktasına çizilen vektörü \vec{R} ile gösterelim. Şu sonuçları doğrulayın:

(a) $\vec{\nabla}(\mathcal{R}^2) = 2\vec{R}$

(b) $\vec{\nabla}(1/\mathcal{R}) = -\vec{R}/\mathcal{R}^2$ (\hat{R} : \vec{R} yönündeki birim vektör).

(c) $\vec{\nabla}(\mathcal{R}^n)$ için genel formül ne olur?

! **Problem 1.14** y ve z gibi sadece iki bağımsız değişkenin fonksiyonu f olsun. $\vec{\nabla}f = (\partial f/\partial y)\hat{j} + (\partial f/\partial z)\hat{k}$ gradyanının (1.19) denklemindeki dönme altında bir vektör gibi dönüştüğünü gösterin. (Yol gösterme: $\partial f/\partial y' = (\partial f/\partial y)(\partial y/\partial y') + (\partial f/\partial z)(\partial z/\partial y')$ olup, buna benzer bir bağıntı $\partial f/\partial z'$ için yazılabilir. Ayrıca, $y' = y \cos \phi + z \sin \phi$ ve $z' = -y \sin \phi + z \cos \phi$ olduğunu biliyoruz; bu denklemleri y ve z' 'ye göre çözün ve $\partial y/\partial y'$, $\partial z/\partial y'$, vb. gibi gerekli türevleri hesaplayın.)

1.2.3 Nabla ($\vec{\nabla}$) Operatörü

Gradyan, biçimsel olarak, bir $\vec{\nabla}$ vektörünün skaler T ile "çarpımı" görüntüsündedir:

$$\vec{\nabla}T = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) T \quad (1.29)$$

(Burada birim vektörleri öne yazdım, aksi takdirde $\partial \hat{i}/\partial x$ anlaşılabilir.) Parantez içindeki terime "nabla operatörü" denir:

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.30)$$

Yanlış anlaşılmasın: nabla operatörü bildiğimiz anlamda bir vektör değildir. Üzerine etkiyeceği bir fonksiyon bulunmadıkça bir anlamı yoktur. Ayrıca, T fonksiyonuyla "çarpılıyor" değildir. Tek anlamı bu fonksiyonun nasıl türevi alınacağını bildirmesidir. O halde, daha açık söylersek, $\vec{\nabla}$ bir vektör operatörü olup T üzerine etki eder, onunla çarpılmaz.

Bu uyarıyı verdikten sonra, $\vec{\nabla}$ 'nin diğer tüm bakımlardan bir vektör gibi davrandığını ekleyelim. Vektörlerle yapılan tüm işlemler $\vec{\nabla}$ ile de yapılabilir; sadece "çarpma" sözcüğü yerine "etkime" anlamak yeterlidir. Lütfen $\vec{\nabla}$ nin vektör karakterini ciddiye alın; bu harika notasyonun getirdiği kolaylık o kadar önemlidir ki, Maxwell'in elektromagnetizma üzerine yazdığı orijinal makalelerine bakarsanız, $\vec{\nabla}$ kullanmanın değerini anlarsınız.

Bir vektörün üç türlü çarpımı olabiliyordu:

1. Bir a skaleriyle çarpma: $\vec{A}a$
2. Diğer bir \vec{B} vektörüyle skaler çarpma: $\vec{A} \cdot \vec{B}$
3. Diğer bir vektörle vektörel çarpma: $\vec{A} \times \vec{B}$

Benzer şekilde, $\vec{\nabla}$ operatörü üç türlü etkiyebilir:

1. Skaler bir T fonksiyonu üzerine: $\vec{\nabla}T$ (gradyan)
2. Bir \vec{v} vektör fonksiyonu üzerine skaler çarpımla etkime: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ ("diverjans")

1.2. DİFERANSİYEL HESAP

2. Bir \vec{v} vektör fonksiyonu üzerine vektörel çarpımla etkime: $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ ("diverjans"). Gradyanı yukarda gördük. Şimdi diğer iki türden vektörel türevleri ele alalım.

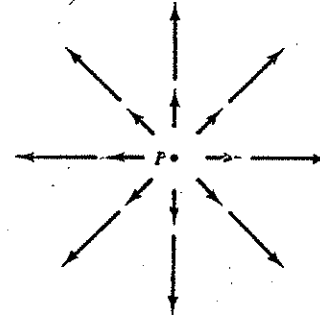
1.2.4 Diverjans

(1.30) denklemindeki $\vec{\nabla}$ tanımını kullanırsak

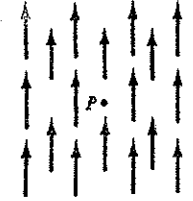
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} v_x + \hat{j} v_y + \hat{k} v_z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.31)$$

Vektör \vec{v} fonksiyonunun $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ diverjansının bir skaler olduğuna dikkat edelim. (bir skalerin diverjansından söz etmek anlamsız olur.)

Geometrik yorum. Diverjans İngilizcede "ıraksama" anlamına gelir; bu sözcüğün seçimi isabetli olmuştur, çünkü $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ bir noktadaki \vec{v} vektör çizgilerinin ne kadar ıraksadığının bir ölçüsüdür. Şek. 1.17'deki vektör fonksiyonun P noktasında diverjansı büyük (pozitif) olur. (Oklar içe doğru olsaydı, negatif diverjans olurdu.) Buna karşılık, Şek. 1.18'deki fonksiyonun P noktasındaki diverjansı sıfırdır; çünkü oklar ıraksamadan geçerler. (Buradaki \vec{v} nin bir vektör fonksiyonu olduğunu unutmayın- yani, uzayın her noktasına bağlı bir vektör vardır; şekilde ancak birkaçını çizebiliyoruz.)



Şekil 1.17



Şekil 1.18

Örnek 1.4: (a) Şek. 1.17'deki fonksiyona \vec{v}_1 dersek, bu fonksiyon P orijininden çıkan \vec{r} konum vektörünü andırır. $\vec{v}_1 = \vec{r}$ alalım:

$$\vec{v}_1 = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Diverjansı hesaplayalım:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Beklendiği gibi, diverjans pozitif çıkar.

(b) Şek. 1.18'deki ikinci fonksiyona \vec{v}_2 dersek, bunların herbirini, örneğin z -ekseni yönünde, birim vektörler olarak alalım: $\vec{v}_2 = \hat{k}$. Buna göre

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Problem 1.15 Şu vektör fonksiyonların diverjansını hesaplayın:

- (a) $\vec{v}_1 = x^2\vec{i} + 3xz^2\vec{j} + 2xz\vec{k}$
 (b) $\vec{v}_2 = xy\vec{i} + 2yz\vec{j} + 3xz\vec{k}$
 (c) $\vec{v}_3 = y^2\vec{i} + (2xy + x^2)\vec{j} + 2yz\vec{k}$

Problem 1.16 Skaler bir t fonksiyonu ile vektör bir \vec{v} fonksiyonu için, $\vec{\nabla} \cdot (t\vec{v}) = (\vec{\nabla}t) \cdot \vec{v} + t(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ olduğunu gösterin.

• **Problem 1.17** $\vec{v} = \vec{r}/r^2$ vektör fonksiyonunun grafiğini çizin ve diverjansını hesaplayın. (\vec{r} yerdeğiştirme vektörü (1.13) denklemiyle tanımlanmıştır.) Sonuç sizi şaşırtabilir... bunu açıklayabilir misiniz?

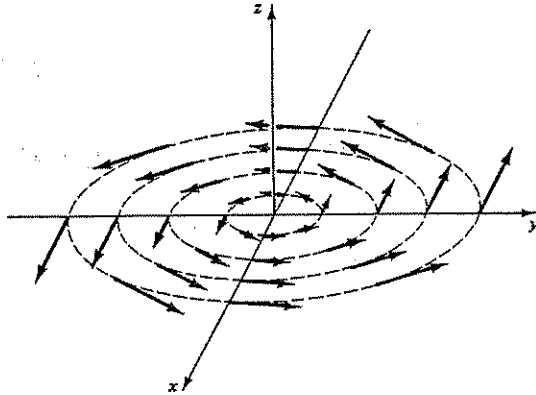
! **Problem 1.18** İki boyutta diverjansın bir skaler gibi dönüştüğünü gösterin. (Yol gösterme: (1.19) denklemini kullanarak v'_y ve v'_z yi bulun ve türevleri bulmak için Problem 1.14'deki yöntemi kullanın. Amacınız, $\partial v'_y/\partial y = \partial v'_z/\partial z = \partial v_y/\partial y = \partial v_z/\partial z$ olduğunu göstermektir.)

1.2.5 Rotasyonel

(1.30) denklemindeki $\vec{\nabla}$ tanımına göre,

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (1.32)$$

Her vektörel çarpım gibi, rotasyonelin de bir vektör olduğuna dikkat edelim. (Skaler bir fonksiyonun rotasyoneli olmaz; anlamsızdır.)



Şekil 1.19

Geometrik yorum. $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ rotasyoneli, \vec{v} vektörünün bir nokta etrafında dolanış miktarının bir ölçüsüdür. Buna göre, Örnek 1.4'de ele aldığımız iki fonksiyonun rotasyonelleri sıfırdır (bunu hesaplayarak görebilirsiniz), buna karşın Şek. 1.19'daki fonksiyonun rotasyoneli büyük olur. Üstelik, sağ-el kuralına göre, rotasyonel vektörü z-yönünde olur.

Bir gölün kenarında durduğunuzu varsayalım. Su yüzeyine biraz saman veya talaş tozu

1.2. DİFERANSİYEL HESAP

serpiştirin. Eğer tozlar dışa doğru açılarak yayılıyorsa, bıraktığınız noktada pozitif bir diverjans var demektir. Şimdi suda yüzebilen küçük bir fırıldak su yüzüne bırakın. Fırıldak dönmeye başlıyorsa, bıraktığınız noktada sıfırdan farklı bir rotasyonel vardır. Rotasyonelin büyük olduğu bir noktada girdap olur. Diverjansın (pozitif) büyük olduğu noktada bir kaynak (örneğin, musluk) vardır; negatif diverjans olan yerde ise bir kuyu olur. Bu modeldeki vektör fonksiyonu su yüzeyindeki hız vektörüdür. Gradyan örneğinde olduğu gibi, bu fonksiyon iki değişkene bağlı olup sadece iki bileşene sahiptir- ama burada diverjans ve rotasyonelin ne olduğunu fiziksel olarak anlamanızı istiyorum, ve bunu iki boyutta anlatmak daha kolaydır.

Örnek 1.5: Şek. 1.19'daki fonksiyon $\vec{v}_3 = -y\vec{i} + x\vec{j}$ olarak veriliyor. Rotasyonelini bulun.

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{k}$$

Beklendiği gibi, \vec{v}_3 'nin rotasyoneli z-yönünde oluşur. (Bu arada, şekilden de göreceğiniz gibi, bu fonksiyonun diverjansı sıfırdır; çünkü, noktadan dışa doğru yayılma yoktur, sadece dolanım vardır.)

Problem 1.19 Problem 1.15'deki üç vektör fonksiyonun rotasyonelini hesaplayın.

Problem 1.20 Uzayda her noktada diverjansı ve rotasyoneli sıfır olan bir vektör fonksiyon kurun. (Sabit bir fonksiyon elbette olur; siz daha ilginç birşey bulun!)

1.2.6 Çarpım Kuralları

Genel türev alma kurallarını hatırlayalım: Toplama kuralı

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

bir skalerle çarpım kuralı

$$\frac{d}{dx}(kf) = k \frac{df}{dx}$$

çarpım kuralı

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}$$

ve bölüm kuralı

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Vektörel türevler için de benzer kurallar vardır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(f+g) &= \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g, & \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

ve

$$\vec{\nabla}(kf) = k \vec{\nabla}f, \quad \vec{\nabla} \cdot (k\vec{A}) = k(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}), \quad \vec{\nabla} \times (k\vec{A}) = k(\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

bağıntılarının doğru olduğunu kolayca kontrol edebilirsiniz. Çarpım kuralları o kadar basit değildir. İki fonksiyonun çarpımının skaler oluşu iki türlü sağlanabilir:

fg (iki skaler fonksiyonun çarpımı)

$\vec{A} \cdot \vec{B}$ (iki vektör fonksiyonun skaler çarpımı)

ve, bir vektör de iki türlü oluşabilir:

$f\vec{A}$ (skaler kere vektör)

$\vec{A} \times \vec{B}$ (iki vektörün vektörel çarpımı)

Buna göre, altı tane çarpım kuralı vardır. Bunlardan ikisi gradyan içindir:

$$(i) \quad \vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$$

$$(ii) \quad \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

İkisi diverjans içindir:

$$(iii) \quad \vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f)$$

$$(iv) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Son ikisi de rotasyonel içindir:

$$(v) \quad \vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} f)$$

$$(vi) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

Bu çarpım kurallarını o kadar sık kullanacaksınız ki şimdiden ezberleseniz iyi olur. (Kullanırken kolaylık olsun diye, kitabın ön kapağı içine aldım.) Bunların ispatı doğrudan türev kurallarından gelir. Örneğin,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}A_x + f\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}A_y + f\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &= f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f) \end{aligned}$$

Bunlara ek olarak, üç tane bölüm kuralı yazılabilir:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(\frac{f}{g} \right) &= \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2} \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{A}}{g} \right) &= \frac{g(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} g)}{g^2} \\ \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{A}}{g} \right) &= \frac{g(\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} g)}{g^2} \end{aligned}$$

Problem 1.21 (i), (iv) ve (v) no.lu kuralları ispatlayın.

Problem 1.22 (a) \vec{A} ve \vec{B} iki vektör fonksiyon ise, $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$ ne anlama gelir? (Yani, $\vec{A} \cdot \vec{\nabla}$ nin bileşenleri cinsinden bunun x, y, z bileşenleri ne olur?)

(b) Örnek 1.3'de tanımlanan \hat{r} vektörü için, $(\hat{r} \cdot \vec{\nabla})\hat{r}$ ifadesini hesaplayın.

(c) Problem 1.15'deki fonksiyonlar için $(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_2$ ifadesini hesaplayın.

Problem 1.23 (Zoru sevenler için.) (ii) ve (vi) no.lu kuralları ispatlayın.

Problem 1.24 Yukarda verilen üç bölüm kuralını ispatlayın.

Problem 1.25 (a) Aşağıdaki \vec{A} ve \vec{B} fonksiyonlarını kullanarak (iv) no.lu kuralın doğruluğunu kontrol edin:

$$\vec{A} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}; \quad \vec{B} = 3y\vec{i} - 2x\vec{j}$$

(b) Aynı işlemi (ii) no.lu kural için yapın. (c) (vi) no.lu kural için devam.

1.2.7 İkinci Türevler

$\vec{\nabla}$ kullanarak yapılabilen birinci türevler gradyan, diverjans ve rotasyonel olur. $\vec{\nabla}$ operatörünü iki kez kullanarak beş farklı ikinci türev yapılabiliriz:

1. Gradyanın diverjansı: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T)$

2. Gradyanın rotasyoneli: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} T)$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ skaler olduğundan, sadece gradyanını alabiliriz:

3. Diverjansın gradyanı: $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$

$\vec{\nabla} \times \vec{v}$ vektör olduğundan, hem diverjansı ve hem de rotasyoneli alınabilir:

4. Rotasyonelin diverjansı: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$

5. Rotasyonelin rotasyoneli: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$

Bu beş türevin hepsi de yeni bir şey vermez. Bunları sırayla ele alalım:

$$\begin{aligned} 1. \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Bu büyüklük $\nabla^2 T$ ile gösterilir ve T 'nin Laplasyeni adını alır; bunu daha sonra ayrıntılı olarak ele alacağız. Laplasyenin bir skaler olduğuna dikkat edelim. Bazen bir vektörün de Laplasyeninden sözedeceğiz; $\nabla^2 \vec{v}$ yazıldığında, bu vektörün örneğin x -bileşeni, v_x 'in Laplasyeni olur:

$$\nabla^2 \vec{v} \equiv (\nabla^2 v_x)\vec{i} + (\nabla^2 v_y)\vec{j} + (\nabla^2 v_z)\vec{k} \quad (1.34)$$

2. Gradyanın rotasyoneli özdeş olarak sıfırdır:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} T) = 0 \quad (1.35)$$

Bu önemli özelliği defalarca kullanacağız; (1.30) daki $\vec{\nabla}$ tanımını kullanarak bunu kolayca ispat edebilirsiniz. İspat karışık ikinci türevlerin şu özelliğine dayanır:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1.36)$$

3. $\nabla(\nabla \cdot \vec{v})$ büyüklüğü, nedendir bilinmez, fizikte pek az rastlanır ve bu nedenle özel bir adı yoktur-diverjansın gradyanı denir o kadar. Bunun bir vektörün Laplasyeniyle aynı olmadığına dikkat edin: $\nabla^2 \vec{v} \neq \nabla(\nabla \cdot \vec{v})$.

4. Rotasyonelin gradyanı da özdeş olarak sıfırdır:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 \quad (1.37)$$

Bunu da kolayca ispat edebilirsiniz. (Daha kestirme bir ispat için $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ özdeşliği kullanılır.)

5. Yine $\vec{\nabla}$ 'nin tanımından giderek

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} \quad (1.38)$$

olduğu görülür. Buna göre, rotasyonelin rotasyoneli yeni bir şey olmaz; birinci terim 3. sıktaki terimle aynı, ikincisi de bir vektörün Laplasyenidir.

O halde, gerçekte yeni olan iki tane ikinci türev vardır: temel önemi olan Laplasyen ve pek rastlanmayan diverjansın gradyanı. Benzer şekilde üçüncü türevlere de bakabiliriz, ama tüm fiziksel uygulamalarda ikinci türevler yeterli olmaktadır.

Vektör diferansiyel hesabı için son bir uyarı: Herşey (1.30) ile tanımlanan $\vec{\nabla}$ operatörünün vektör karakterini ciddiye almakla başlar. Sadece $\vec{\nabla}$ 'nin tanımını hatırlarsanız bile, ilke olarak diğer tüm sonuçları elde edebilirsiniz.

Problem 1.26 Şu fonksiyonların Laplasyenini hesaplayın:

(a) $T = x^2 + 2xy + 3z + 4$

(b) $T = \sin x \sin y \sin z$

(c) $T = e^{-5x} \sin 4y \cos 3z$

(d) $\vec{v} = x^2 \hat{i} + 3xz^2 \hat{j} - 2xz \hat{k}$

Problem 1.27 Rotasyonelin diverjansının sıfır olduğunu ispatlayın. Sonucu Problem 1.15'deki \vec{v}_2 fonksiyonunu kullanarak kontrol edin.

Problem 1.28 Gradyanın rotasyonelinin sıfır olduğunu ispatlayın. Sonucu Problem 1.11b'deki fonksiyonu kullanarak kontrol edin.

1.3 İNTEGRAL HESAP

1.3.1 "Alışılmış" İntegral

Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu alalım. Temel teoreme göre

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f(b) - f(a) \quad (1.39)$$

olur. Bunu pek tanıdık bulmadıysanız, şöyle yazalım:

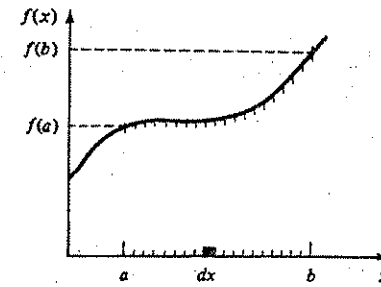
$$\int_a^b F(x) dx = f(b) - f(a)$$

Burada $df/dx = F(x)$ olur. Temel teorem $F(x)$ 'in integralini nasıl alacağınızı söyler: türevi $F(x)$ 'e eşit olan bir $f(x)$ fonksiyonu bulmanız gerekir.

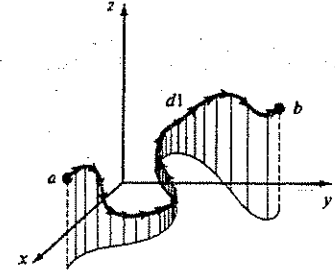
1.3. İNTEGRAL HESAP

Geometrik yorum. (1.23) denklemine göre, x 'den $x + dx$ 'e gidildiğinde f 'deki küçük artış $df = (df/dx)dx$ olur. (1.39) daki temel teorem ise, $[a, b]$ aralığını dx uzunluğunda çok küçük parçalara böler (Şek. 1.20) ve her parçadaki df artışlarını toplarsanız, sonucun f 'deki toplam artışa, yani $f(b) - f(a)$ 'ya eşit olacağını söyler. Diğer bir deyişle, bir fonksiyondaki artış iki türlü bulunabilir: ya uç değerleri arasındaki farkı alırsınız, veya adım adım gidip her adımdaki küçük artışları toplarsınız. Her iki sonuç da aynıdır.

Temel teoremin bu yapısına dikkat edin: Bir türevin integrali fonksiyonun o aralığın sınırlarında aldığı değerlerin farkına eşittir. Vektör hesabında üç tür türev vardır (gradyan, diverjans ve rotasyonel) ve bunların herbiri için bir "temel teorem" bulacağız. Burada teoremlerin ispatını vermeyip, ne anlama geldiklerini açıklamaya çalışacağım. İspatları Ek A'da bulabilirsiniz.



Şekil 1.20



Şekil 1.21

1.3.2 Gradyanın Temel Teoremi

Üç değişkene bağlı skaler bir $T(x, y, z)$ fonksiyonu düşünelim. Bir $a = (a_x, a_y, a_z)$ noktasından yola çıkıp (Şek. 1.21) küçük bir $d\vec{l}_1$ kadar uzaklaşalım. (1.25) denklemine göre, T fonksiyonundaki artış şöyle olur:

$$dT = (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l}_1$$

Şimdi yine bir $d\vec{l}_2$ kadar daha uzaklaşalım; T 'deki ek artış $(\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l}_2$ olacaktır. Bu şekilde, sonsuz küçük adımlar atarak $b = (b_x, b_y, b_z)$ noktasına ulaşırız. Her adımda T 'nin o noktadaki gradyanını hesaplayıp $d\vec{l}$ yer değiştirmesiyle skaler çarpımını alıp T 'deki artışı buluruz. Seçilen yol boyunca a 'dan b 'ye giderken T 'deki toplam artışın şöyle olacağı açıktır:

$$\int_a^b (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l} = T(b) - T(a) \quad (1.40)$$

(eğri) ^a

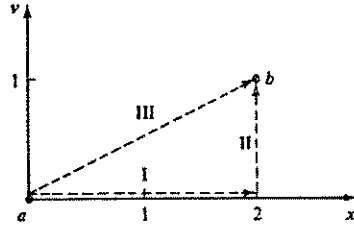
Bu, gradyanın temel teoremidir.

Buradaki integralin "seçilen bir yol boyunca" olduğunu özellikle vurguladım; çünkü sol taraftaki integral sonucunun gidilen yola bağımlı olduğunu sanabilirsiniz. Ama durun bakalım: eşitliğin sağ tarafı hiç de gidilen yola bağıl değildir. Sadece uç noktalarına bağlıdır. Buradan iki sonuç çıkarabiliriz:

Sonuç 1: $\int_a^b (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l}$ integrali a 'dan b 'ye gidiş yolundan bağımsızdır.

Sonuç 2: $\oint (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l} = 0$. İntegral işaretindeki yuvarlak integralin kapalı bir eğri üzerinde alındığını gösterir. Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olduğuna göre, elbette $T(b) - T(a) = 0$ olacaktır.

Örnek 1.6 : a noktasını orijin $(0,0,0)$ ve b noktasını $(2,1,0)$ alın ve $T = xy^2$ fonksiyonu için gradyanın temel teoremini kontrol edin.



Şekil 1.22

Çözüm : Her ne kadar integral yoldan bağımsız ise de, integrali kolay alabileceğimiz bir yol seçmeliyiz. Örneğin, önce x -ekseni boyunca (1. adım) ve sonra y -ekseni boyunca (II. adım) gidelim (Şek. 1.22). Daha önce olduğu gibi $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ alır ve gradyanı hemen buluruz: $\vec{\nabla}T = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j}$.

I. adım: $x : 0 \rightarrow 2$; $y = 0$; $dy = dz = 0$. Bu adımda $\vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = y^2 dx = 0$ olur. O halde

$$\int_I \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = 0$$

II. adım: $x = 2$; $y : 0 \rightarrow 1$; $dx = dz = 0$ Bu adımda $\vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = 2xy dy = 4y dy$ olur. Buna göre

$$\int_{II} \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = \int_0^1 4y dy = 2y^2 \Big|_0^1 = 2$$

O halde, $\int_a^b (\vec{\nabla}T) \cdot d\vec{l} = 2$ olur. Bu sonuç gradyanın temel teoremini sağlar mı? Evet, çünkü $T(b) - T(a) = 2 - 0 = 2$ dir.

Şimdi, integralin gerçekten yoldan bağımsız olduğunu görmemiz için, bir de şekildeki III. adım (a 'dan b 'ye giden doğru parçası) boyunca hesaplayalım:

III. adım: $x : 0 \rightarrow 2$; $y = \frac{1}{2}x$; $dy = \frac{1}{2}dx$. Bu adımda $\vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = y^2 dx + 2xy dy = \frac{3}{4}x^2 dx$ olur. Buna göre

$$\int_{III} \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = \int_0^2 \frac{3}{4}x^2 dx = \frac{1}{4}x^3 \Big|_0^2 = 2$$

(Burada herşeyi bir değişken cinsinden yazmak gerekir; isteseydim x 'leri y cinsinden de yazabilirdim.)

Problem 1.29 $T = x^2 + 4xy + 2yz^3$ fonksiyonu, $a = (0,0,0)$ ve $b = (1,1,1)$ noktalarını alıp, Şek. 1.23'deki üç yol boyunca gradyanın temel teoremini sağlayın:

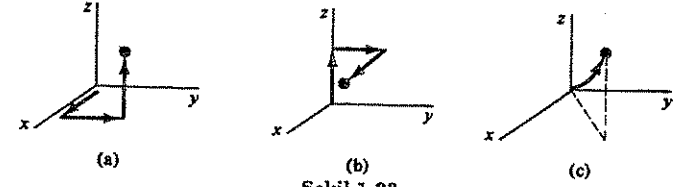
(a) $(0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (1,1,1)$

(b) $(0,0,0) \rightarrow (0,0,1) \rightarrow (0,1,1) \rightarrow (1,1,1)$

(c) $z = x^2$; $x = y$ parabolü üzerinde.

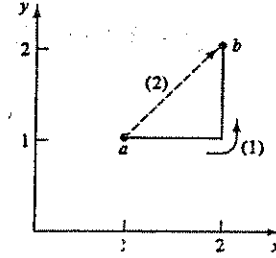
Problem 1.30 Gradyanın eğrisel integrali yoldan bağımsız olduğu halde, herhangi bir vektör fonksiyonu için bu doğru değildir. $\vec{v} = y^2\vec{i} + 2x(y+1)\vec{j}$ fonksiyonu için

$$\int_a^b \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad a = (1,1,0) \quad \text{ve} \quad b = (2,2,0)$$



Şekil 1.23

integralini hesaplayın. Önce Şek. 1.24'deki (1) yolu boyunca, sonra (2) yolu boyunca hesaplayın. Kapalı eğri üzerinde (yani, önce (1) yolundan gidip sonra (2) yolundan geri geldiğinde) $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$ ne olur?



Şekil 1.24

1.3.3 Diverjansın Temel Teoremi

Diverjansın temel-teoremi şöyledir:

$$\int_{\text{hacim}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) d\tau = \oint_{\text{yüzey}} \vec{v} \cdot d\vec{a} \quad (1.41)$$

Bu denklemin büyük önemi şerefine üç farklı adı vardır: **Gauss teoremi**, **Green teoremi** veya, daha basit olarak **diverjans teoremi**. Diğer "temel teoremler" gibi bu da, bir türevin (burada, diverjansın) belirli bir aralıkta (burada hacim) integralinin, fonksiyonun uç bölgede (burada hacmi saran yüzeyde) aldığı değere eşit olduğunu söyler. $d\tau$ hacim elemanıdır (Kartezyen koordinatlarda $d\tau = dx dy dz$) ve hacim integrali gerçekte üç katlı bir integraldir. Üç tane integral işareti yazacağıma, integralin cinsini altına yazıyorum.

(1.39) ve (1.40) daki teoremlerin tersine, burada sınır teriminin kendisi de bir integraldir:

$$\oint_{\text{yüzey}} \vec{v} \cdot d\vec{a} \quad (1.42)$$

Bunun böyle olması doğaldır: bir *çizginin* sınırları iki noktadır, oysa bir hacmin sınırı kapalı bir yüzey olur. (Integral üzerindeki yuvarlak işaret yüzeyin *kapalı* olduğunu, açık bir yeri olmadığını gösterir. (Aynı işareti kapalı bir eğri üzerindeki eğrisel integralde de kullandık.) $d\vec{a}$ sembolü vektörel yüzey elemanı gösterir; bu vektörün büyüklüğü elemanın *yüzey alanı*, yönü ise o noktada yüzeye dik ve dışa doğru (yani, normal yönünde) olur. Örneğin, ele alınan yüzey Şek. 1.25'te gösterilen küp yüzeyi olsun. Kübün öne bakan yüzündeki yüzey elemanı şöyle olur:

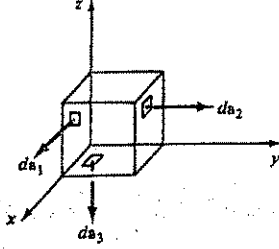
$$d\vec{a}_1 = (dy dz)\vec{i}$$

Sağ taraftaki yüzün yüzey elemanı

$$d\vec{a}_2 = (dx \, dz)\hat{j}$$

ve alttaki yüzün yüzey elemanı ise şöyle olur:

$$d\vec{a}_3 = (dx \, dy)(-\hat{k})$$



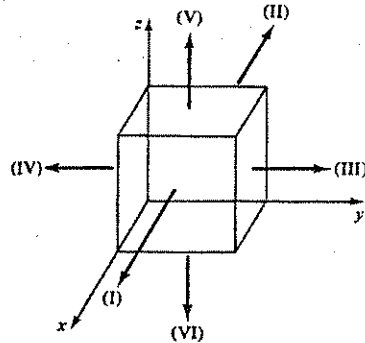
Şekil 1.25

Geometrik yorum. (1.42) denklemindeki integral gibi, bir vektörün yüzeye dik bileşeninin (skaler çarpım dik bileşeni sağlar) yüzey integraline akı adı verilir. Eğer, \vec{v} vektörü bir sıvıdaki hızı temsil ediyorsa (hız her noktada farklı olabilir), \vec{v} nin akısı kapalı yüzeyden birim zamanda geçen sıvı miktarını verir (bkz. Prob 1.32). Şimdi diverjansın geometrik yorumunu hatırlayın: bir noktadan itibaren vektörlerin ıraksayışını ölçüyordu; diverjansı büyük olan bir noktada “musluk” gibi bir kaynak oluyordu. Sabit bir hacim içinde sıkışmaz bir sıvıda böyle musluklar varsa, mutlaka bu bölgenin sınırlarından dışarı sıvı akışı olacaktır. Ne kadar su girdiğini iki yolla ölçebiliriz: (a) muslukların herbirinin verdiği sıvı miktarlarını toplarız, veya (b) bölgenin sınır yüzeyine gidip her küçük yüzey elemanındaki akıları toplarız. Sıkışmaz bir sıvı olduğu sürece her iki hesap aynı olacaktır:

$$\int (\text{hacim içindeki tüm musluklar}) = \int (\text{yüzeyden dışarı akan sıvı})$$

Diverjans teoreminin söylediği şey esas olarak budur.

Örnek 1.7: $\vec{v} = y^2\hat{i} + (2xy + z^2)\hat{j} + 2yz\hat{k}$ fonksiyonunu ve Şek. 1.26'daki küp hacmini kullanarak diverjans teoremini sağlayın.



Şekil 1.26

Çözüm: Bu fonksiyon için $\nabla \cdot \vec{v} = 2(x + y)$ olur ve

$$\int_{\text{hacim}} 2(x + y) \, d\tau = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y) \, dx \, dy \, dz$$

$$\int_0^1 (x + y) \, dx = \frac{1}{2} + y, \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right) \, dy = 1, \quad \int_0^1 1 \, dz = 1$$

Buna göre

$$\int_{\text{hacim}} (\nabla \cdot \vec{v}) \, d\tau = 2$$

Teoremin sol tarafı böyle. Sağ taraftaki yüzey integralini hesaplamak için kübün altı yüzeyini ayrı ayrı ele alalım:

$$(i) \quad d\vec{a} = dy \, dz \hat{i}; \quad x = 1; \quad \vec{v} \cdot d\vec{a} = y^2 \, dy \, dz$$

$$\int \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int_0^1 \int_0^1 y^2 \, dy \, dz = \frac{1}{3}$$

$$(ii) \quad d\vec{a} = -dy \, dz \hat{i}; \quad x = 0; \quad \vec{v} \cdot d\vec{a} = -y^2 \, dy \, dz$$

$$\int \vec{v} \cdot d\vec{a} = -\int_0^1 \int_0^1 y^2 \, dy \, dz = -\frac{1}{3}$$

$$(iii) \quad d\vec{a} = dx \, dz \hat{j}; \quad y = 1; \quad \vec{v} \cdot d\vec{a} = (2x + z^2) \, dx \, dz$$

$$\int \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int_0^1 \int_0^1 (2x + z^2) \, dx \, dz = \frac{4}{3}$$

$$(iv) \quad d\vec{a} = -dx \, dz \hat{j}; \quad y = 0; \quad \vec{v} \cdot d\vec{a} = -z^2 \, dx \, dz$$

$$\int \vec{v} \cdot d\vec{a} = -\int_0^1 \int_0^1 z^2 \, dx \, dz = -\frac{1}{3}$$

$$(v) \quad d\vec{a} = dx \, dy \hat{k}; \quad z = 1; \quad \vec{v} \cdot d\vec{a} = 2y \, dx \, dy$$

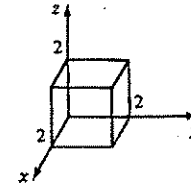
$$\int \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int_0^1 \int_0^1 2y \, dx \, dy = 1$$

$$(vi) \quad d\vec{a} = -dx \, dy \hat{k}; \quad z = 0; \quad \vec{v} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\int \vec{v} \cdot d\vec{a} = 0$$

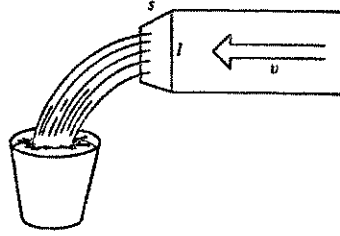
Toplam akı, beklendiği gibi, aynı olur:

$$\oint_{\text{yüzey}} \vec{v} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 0 = 2$$

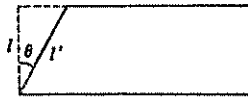


Şekil 1.27

Problem 1.31 $\vec{v} = (xy)\hat{i} + (2yz)\hat{j} + (3zx)\hat{k}$ fonksiyonunu ve Şek. 1.27'deki hacmi kullanarak diverjans teoreminin doğruluğunu gösterin.



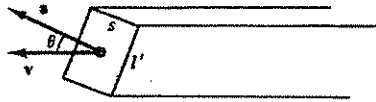
Şekil 1.28



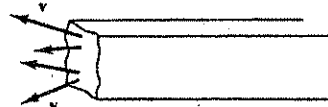
Şekil 1.29

Problem 1.32 Bu problemde akı kavramını geliştirmek istiyoruz. Problemde tuzak filan yoktur, doğrudan çözülebilir.

- (a) Dikdörtgen kesiti $s \times l$ olan bir borudan akan suyun hızı \vec{v} dir (Şek. 1.28). Kovada birim zamanda biriken su hacmi (Φ) ne kadardır?
- (b) Şimdi borunun ağzını belli bir θ açısıyla kesiyoruz (Şek. 1.29). Bu işlem sonucu elbette Φ değişmeyecektir. Boru ağzının yeni s, l' boyutları ve θ eğim açısı cinsinden, Φ ifadesini yeniden bulun.
- (c) Φ ifadesini, suyun vektör hızı \vec{v} ve vektör yüzey alanı $d\vec{a}$ cinsinden yazın (Şek. 1.30).



Şekil 1.30



Şekil 1.31

- (d) Boru ağzında sıvının hızı ve yönü her noktada değişiyor olsaydı, ve boru ağzı gelişigüzel kesilmiş olsaydı (Şek. 1.31), bu genel durumda Φ 'yi nasıl hesapladınız?

1.3.4 Rotasyonelin Temel Teoremi

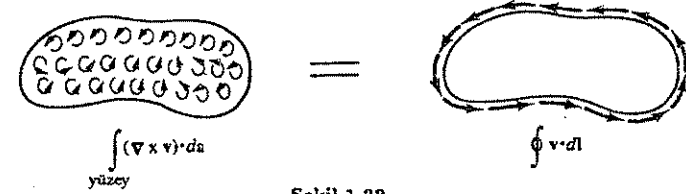
Rotasyonelin temel teoremi Stokes teoremi olarak bilinir:

$$\int_{\text{yüzey}} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \oint_{\text{sınır eğrisi}} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (1.43)$$

Yine, daha önce olduğu gibi, bir türevin (burada, rotasyonel) bir bölge (burada, bir yüzey parçası) üzerindeki integrali, fonksiyonun sınırda (burada, yüzeyi çevreleyen eğri üzerinde) aldığı değere eşit olmaktadır.

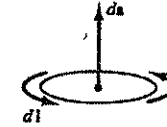
Geometrik yorum. Rotasyonelin \vec{v} vektörünün "dolanım" miktarını ölçtüğünü hatırlayın; bir girdap noktasında rotasyonel büyük olur—oraya bir fırıldak koyarsanız dönmeye başlar. Şimdi, rotasyonelin (daha doğrusu, rotasyonel akısının) bir yüzey üzerindeki integrali "toplam dolanım miktarı"nı temsil eder. Bu dolanımı yüzey kenarı boyunca giderek de ölçebiliriz (Şek. 1.32). Stokes teoreminin bu yorumunu biraz yapay bulabilirsiniz, ama akılda kalmasını sağlıyorsa yeterlidir.

Stokes teoreminde görünürde bir belirsizlik olduğunu belki farketmişsinizdir: Sınır eğrisi boyunca hangi yönde ilerlemek gerekir? Eğer "ters" yönde gidersek, hesabımız eksi işaretli



Şekil 1.32

çıkar. Bunun yanıtı şudur: *Tutarlı* olduğunuz sürece, hangi yönde gittiğiniz farketmez; çünkü yüzey integralinin işareti de belirsizdir. Diverjans teoreminde, *kapalı* bir yüzey için $d\vec{a}$ vektörü yüzey normali doğrultusunda, yani yüzeyden dışa doğru oluyordu. Peki *açık* yüzey için "dış" neresi oluyor? Stokes teoreminin tutarlılığı sağ-el kuralıyla sağlanır: Dört parmağınızı eğri üzerindeki gidiş yönünüzde kıvrırsanız, baş parmak $d\vec{a}$ vektörünün yönünü gösterir (Şek. 1.33).



Şekil 1.33

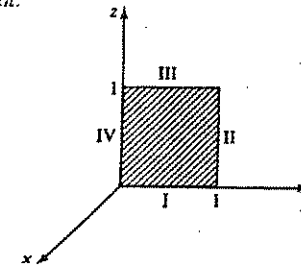
Diğer bir nokta: Aynı bir kapalı eğriyle sınırlanan sonsuz sayıda yüzey olabilir. Bir tel parçası alıp çember şeklinde kıvrırın ve sabunlu suya daldırın. Çemberin sınırladığı bölge içinde sabun köpüğünden ince bir film yüzeyi oluşur. Bu köpüğü üflerseniz, tel çember aynı kaldığı halde, yüzey genişler. Genel olarak, bir yüzey akısı integrali seçilen yüzeye bağlı olacaktır, fakat rotasyonel için integral değişmez. Stokes teoremi, $\int_{\text{yüzey}} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a}$ integralinin \vec{v} 'nin eğri boyunca integraline eşit olduğunu söyler, ama herhangi özel bir yüzey belirtmez; eğriyle sınırlı olması yeterlidir.

Buradan iki sonuç çıkarıyoruz:

Sonuç 1: $\int_{\text{yüzey}} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a}$ integrali, seçilen yüzeye değil, sadece sınır eğrisine bağlıdır.

Sonuç 2: Kapalı bir yüzey üzerinde $\int_{\text{yüzey}} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = 0$ olur; çünkü sınır, bir balonun ağzı gibi, sonunda bir noktaya büzülür ve (1.43) denkleminin sağ tarafı sıfır olur.

Örnek 1.8: $\vec{v} = (2xz + 3y^2)\hat{j} + (4yz^2)\hat{k}$ fonksiyonunu ve Şek. 1.34'deki yüzeyi alıp Stokes teoremini sağlayın.



Şekil 1.34

Burada, $\vec{\nabla} \times \vec{v} = (4z^2 - 2x)\hat{i} + 2z\hat{k}$ ve $d\vec{a} = dydz\hat{i}$ olur. ($d\vec{a}$ yüzey elemanı vektörünü x -yönünde almakla, eğrisel integrali saat yönünün tersine alacağımızı kabul ediyoruz demektir.)

Bu yüzey üzerinde $x = 0$ olduğundan

$$\int_{\text{yüzey}} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \int_0^1 \int_0^1 4z^2 dy dz = \frac{4}{3}$$

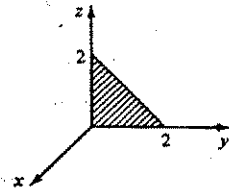
Şimdi, eğrisel integrale bakalım. Bunu da dört parçaya böleriz:

- (i) $x = 0; y: 0 \rightarrow 1; z = 0; \quad \vec{v} \cdot d\vec{l} = 3y^2 dy. \quad \int v \cdot d\vec{l} = \int_0^1 3y^2 dy = 1$
- (ii) $x = 0; y = 1; z: 0 \rightarrow 1; \quad \vec{v} \cdot d\vec{l} = 4z^2 dz. \quad \int v \cdot d\vec{l} = \int_0^1 4z^2 dz = \frac{4}{3}$
- (iii) $x = 0; y: 0 \rightarrow 1; z = 1; \quad \vec{v} \cdot d\vec{l} = 3y^2 dy. \quad \int v \cdot d\vec{l} = \int_0^1 3y^2 dy = 1$
- (iv) $x = 0; y = 1; z: 1 \rightarrow 0; \quad \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0. \quad \int v \cdot d\vec{l} = 0$

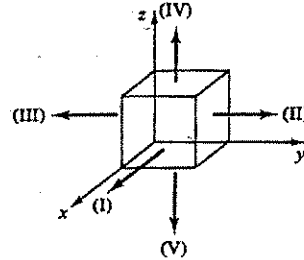
$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 1 + \frac{4}{3} - 1 + 0 = \frac{4}{3} \quad \text{sonuç aynıdır.}$$

Burada bir hesap ayrıntısına değineyim: (iii).cü adımı nasıl hesapladığıma dikkat edin. İlk bakışta, eğri sola döndüğü için, $d\vec{l} = -dy\hat{j}$ almak daha mantıklı gelebilir. İlle de istiyorsanız, integrali 0'dan 1'e almak koşuluyla, bunu seçebilirsiniz. Şahsen ben daima $d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ alırım ve negatiferle uğraşmam; yön bulma işini integralin sınırlarına bırakırım.

Problem 1.33 $\vec{v} = (xy)\hat{i} + (2yz)\hat{j} + (3zx)\hat{k}$ fonksiyonunu ve Şek. 1.35'teki üçgen yüzeyi kullanarak, Stokes teoremini doğrulayın.



Şekil 1.35



Şekil 1.36

Problem 1.34 Örnek 1.8'deki fonksiyonu ve kare sınırı kullanın, fakat bu kez Şek. 1.36'daki kübün diğer beş yüzü üzerinden yüzey integralini alın ve Sonuç 1'i doğrulayın. Kübün geri yüzü açıktır.

1.3.5 Temel Teoremler Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda üç temel teoremin tutarlılığını ele alacağız:

1. Gradyan teoremi :

$$\int_{\text{eğri}}^b (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l} = T(b) - T(a)$$

2. Diverjans teoremi :

$$\int_{\text{hacim}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) d\tau = \oint_{\text{yüzey}} \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

1.3. İNTEGRAL HESAP

3. Stokes teoremi :

$$\int_{\text{yüzey}} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \oint_{\text{eğri}} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Buradaki altı terimden ikisinin eğrisel integral, ikisinin de yüzey integrali olduğuna dikkat edin. Bunu aklımızdan çıkarmadan, şimdi bu sonuçları iki türlü birleştirelim:

(i) 1. ve 3. teoremleri birleştirelim. a ve b noktaları özdeş olsun (Şek. 1.37). Buna göre, 1. teorem

$$\oint_{\text{eğri}} (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l} = 0$$

olur; bu, zaten gradyan teoreminin 2. sonucuydu. Oysa, 3. teoremdeki eğrisel integralde \vec{v} yerine $\vec{\nabla} T$ alırsak,

$$\oint_{\text{eğri}} (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l} = \int_{\text{yüzey}} [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} T)] \cdot d\vec{a}$$

O halde, 1. ve 3. teoremlerin tutarlı olması için

$$\int_{\text{yüzey}} [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} T)] \cdot d\vec{a} = 0$$

olmalıdır. Üstelik, bu sonuç her yüzey (ve her skaler T fonksiyonu) için doğru olmalıdır. Bu durumda integrand sıfır olmalıdır:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} T) = 0 \quad (1.44)$$

(Bu son adımı fazla düşünmeden, hemen kabul etmeyin. Bir integralin sıfır olması integrandın sıfır olmasını gerektirmez. Fakat integral her aralıkta sıfırsa, integrand sıfır olur. Yoksa, integrandın sıfır olmadığı bir aralık bulur ve yüzey integralini burada alırsak, sonuç sıfır olmaz.)

O halde, (1) ve (3)'ün tutarlı olması için $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} T) = 0$ olması gerekir. Ama bu yeni bir şey değil! (1.35) denkleminde bunu görmüştük ve Problem 1.28'de siz ispatlamıştınız.



Şekil 1.37



Şekil 1.38

(ii) 2. ve 3. teoremleri birleştirelim. 3. teoremi kapalı bir yüzeye uygularsak (Şek. 1.38)

$$\oint_{\text{yüzey}} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = 0$$

olur. Bu, Stokes teoreminin 2. sonucudur. Öte yandan, diverjans teoremini \vec{v} yerine $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ vektörü için yazarsak

$$\oint_{\text{yüzey}} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \int_{\text{hacim}} [\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})] d\tau$$

Bu eşitlik her hacim için doğru olduğuna göre, integrand sıfır olmalıdır:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$$

Bu da yeni bir şey değildir; rotasyonelin diverjansının özdeş olarak sıfır olduğunu (1.37) denkleminde gördük ve Problem 1.27'de ispatladık.

O halde, bu üç temel teorem kendi aralarında tutarlıdır; bu tutarlık en basit olarak ikinci türevin özelliklerinden kaynaklanır.

1.4 EĞRİSEL KOORDİNATLAR

1.4.1 Küresel Koordinatlar

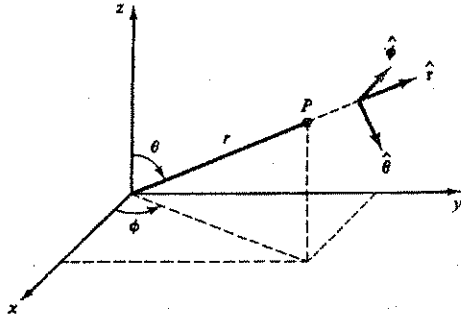
Bir P noktasının (r, θ, ϕ) ile gösterilen küresel koordinatları Şek. 1.39'da tanımlanmıştır. Burada r orijinden radyal uzaklık, z -ekseninden ölçülen θ kutup açısı ve xy -düzleminde x -ekseninden ölçülen ϕ ise boylam açısı adını alır. Bu koordinatların (x, y, z) Kartezyen koordinatlarıyla ilişkisi şekilden kolayca görülebilir:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.45)$$

Şek. 1.39'da ayrıca her bir koordinatın artış yönünde seçilen $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ birim vektörleri de gösterilmiştir. Bu vektörler de, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ gibi, ortogonal (dik) bir baz vektörleri kümesi oluştururlar; her \vec{A} vektörü bunlar cinsinden şöyle yazılabilir:

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$$

Burada A_r, A_θ, A_ϕ sırasıyla \vec{A} vektörünün radyal, kutupsal ve boylamsal bileşenleri olurlar. Ancak, burada çok önemli bir fark vardır: $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ vektörleri gözönüne alınan P noktasına bağlıdır ve, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 'nin tersine, P noktası değiştikçe yön değiştirirler. Örneğin, \hat{r} "radyal yönde dış doğru" dur; ama bu yön, bulunduğunuz noktaya bağlı olarak, z -ekseni, y -ekseni veya herhangi bir yön olabilir. Buradan çıkarılacak ders şudur: küresel koordinatlarda ifade edilmiş bir vektörün türevini alırken dikkatli olmalısınız; çünkü baz vektörlerinin de türevleri vardır. (Örneğin, $\partial \hat{r} / \partial \theta = \hat{\theta}$ olur.) Aynı uyarı integraller için de geçerlidir.



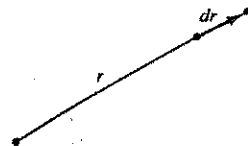
Şekil 1.39

\hat{r} -yönünde sonsuz küçük uzunluk elemanı doğal olarak dr dir (Şek. 1.40):

$$dl_r = dr \quad (1.46)$$

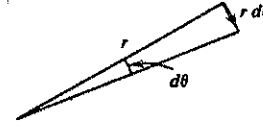
Fakat, $\hat{\theta}$ -yönünde sonsuz küçük uzunluk elemanı $d\theta$ olmaz (bir kere, $d\theta$ uzunluk bile değildir). Doğru seçim şöyle olur (Şek. 1.41):

$$dl_\theta = r d\theta \quad (1.47)$$

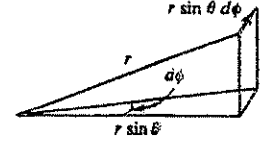


Şekil 1.40

1.4. EĞRİSEL KOORDİNATLAR



Şekil 1.41



Şekil 1.42

Benzer şekilde, $\hat{\phi}$ -yönünde sonsuz küçük uzunluk elemanı Şek. 1.42'den bakılarak yazılabilir:

$$dl_\phi = r \sin \theta d\phi \quad (1.48)$$

Buna göre, en genel küçük yerdeğiştirme vektörü $d\vec{l}$ şöyle olur:

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} \quad (1.49)$$

Bu vektör, Kartezyen koordinatlarda $d\vec{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$ nin oynadığı rolü üstlenir.

Küresel koordinatlarda sonsuz küçük hacim elemanı her üç küçük yerdeğiştirmenin çarpımı olur:

$$d\tau = dl_r dl_\theta dl_\phi = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.50)$$

Yüzey elemanı $d\vec{a}$ için bir ifade veremiyorum, çünkü bu yüzeyin yönüne bağlıdır. Verilen bir durumu inceleyip görmek gerekir. Örneğin, bir küre yüzeyinde integral alacaksanız, yüzeyde r sabit olup sadece θ ve ϕ değişecektir (Şek. 1.43); buna göre

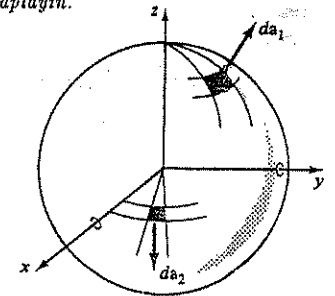
$$d\vec{a}_1 = dl_\theta dl_\phi \hat{r} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

olur. Öte yandan, yüzey xy -düzleminde ise, θ açısı sabit ($\pi/2$) olup sadece r ve ϕ değişir; buna göre

$$d\vec{a}_2 = dl_r dl_\phi \hat{\theta} = r dr d\phi \hat{\theta}$$

Son olarak, r 'nin $[0, \infty]$, θ 'nın $[0, \pi]$ ve ϕ 'nin $[0, 2\pi]$ aralıklarında değiştiklerini ekleyelim.

Örnek 1.9: R yarıçaplı bir kürenin hacmini hesaplayın.



Şekil 1.43

Çözüm: Hacim elemanlarının integrali alınır:

$$\begin{aligned} \text{hacim} &= \int_{\text{hacim}} d\tau = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) = \left(\frac{R^3}{3} \right) (2) (2\pi) = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

Buraya kadar küresel koordinatların sadece geometrisinden söz ettik. Şimdi, vektör türevlerin (gradyan, diverjans ve rotasyonelin) küresel koordinatlarda nasıl yazılacağına bakalım. İlke olarak, bu kolay bir işlem gibi görünür. Gerçekten de, gradyana bakarsak

$$\vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}$$

Türevin zincir kuralını uygulayarak kısmi türevleri değiştirebiliriz. Örneğin,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

Parantez içindeki terimleri (1.45) denklemlerinden hesaplayabiliriz. Aynı işlemi $\partial T/\partial y$ ve $\partial T/\partial z$ için tekrar ederiz, ama yine de işimiz bitmez, çünkü daha $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ birim vektörlerini $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ cinsinden bulmamız gerekir. Bu yöntemle küresel koordinatlarda gradyan ifadesini bulmak iki saat sürebilir. Belki de ilk bulanlar böyle hesaplamışlardır; ancak Ek A'da gösterildiği gibi, çok daha etkin bir teknik vardır, üstelik bu teknik diğer tüm koordinat sistemlerinde de sistematik olarak kullanılabilir.

Burada sonuçları yazıyorum (ayrıntıları Ek A'da bulabilirsiniz):

Gradyan :

$$\vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (1.51)$$

Diverjans :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (1.52)$$

Rotasyonel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \quad (1.53)$$

Laplasien :

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \quad (1.54)$$

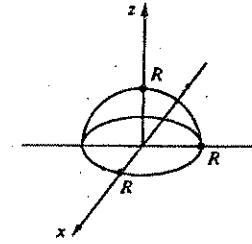
Problem 1.35 (r, θ, ϕ) koordinatlarını (x, y, z) cinsinden yazın; yani, (1.45) dönüşümünün tersini bulun.

Problem 1.36 (r, θ, ϕ) konumlu bir yerdeki $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ birim vektörlerini $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ cinsinden ifade edin. Yanıtınızı değişik yollarla kontrol edin (örneğin, $\hat{r} \cdot \hat{r} \stackrel{?}{=} 1$, $\hat{\theta} \cdot \hat{\phi} \stackrel{?}{=} 0$, $\hat{r} \times \hat{\theta} \stackrel{?}{=} \hat{\phi}$ oluyor mu?).

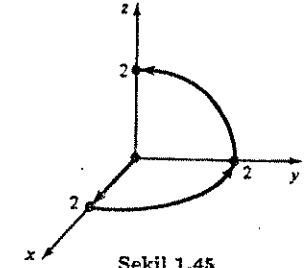
• **Problem 1.37** (a) $\vec{v}_1 = r^2 \hat{r}$ fonksiyonunu ve merkezi orijinde olan R yarıçaplı küre hacmini kullanarak diverjans teoremini doğrulayın. (b) Aynı işlemi $\vec{v}_2 = (1/r^2) \hat{r}$ için yapın. (Cevap size şaşırtıcı geliyorsa, tekrar Problem 1.17'ye bakın.)

Problem 1.38 (a) $\vec{v} = (r \cos \theta) \hat{r} + (r \sin \theta) \hat{\theta} + (r \sin \theta \cos \phi) \hat{\phi}$ fonksiyonunun diverjansını hesaplayın. (b) Bu fonksiyonu ve Şek. 1.44'deki R yarıçaplı yarımküre hacmini kullanarak diverjans teoremini doğrulayın.

Problem 1.39 (a) $T = r(\cos \theta + \sin \theta \cos \phi)$ fonksiyonunun gradyan ve Laplasienini hesaplayın. (b) T 'yi Kartezyen koordinatlara çevirdikten sonra Laplasienini (1.33) denklemiyle



Şekil 1.44



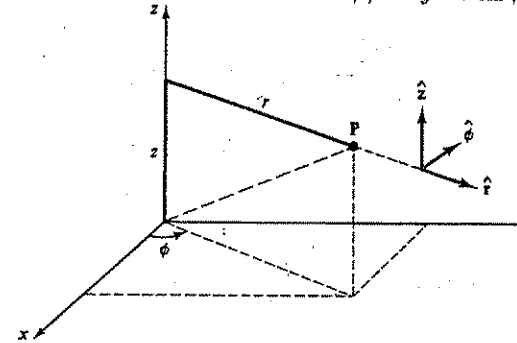
Şekil 1.45

hesaplayın ve iki sonucun da aynı olduğunu doğrulayın. (b) Şek. 1.45'teki dört parçalı yol boyunca integral alarak gradyan teoreminin doğruluğunu gösterin.

1.4.2 Silindirik Koordinatlar

Bir P noktasının (r, ϕ, z) ile gösterilen silindirik koordinatları Şek. 1.46'da tanımlanmıştır. Dikkat ederseniz ϕ koordinatı küresel koordinatlardakinin aynı, z Kartezyen koordinatlardakinin aynı, fakat r tamamen farklıdır. Buradaki r , P noktasının z -ekseninden uzaklığıdır. (Bunun karışıklığa yol açacağını düşünen bazı yazarlar farklı bir harf, genellikle ρ , kullanırlar. Ancak biz ρ 'yu çok daha önemli bir iş için saklıyoruz.) Kartezyen koordinatlarla ilişki şöyledir:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z \quad (1.55)$$



Şekil 1.46

Sonsuz küçük yerdeğiştirmeler ise

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z} \quad (1.56)$$

olduğundan, küçük vektörel yerdeğiştirme şöyle yazılır:

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z} \quad (1.57)$$

Hacim elemanı

$$d\tau = r dr d\phi dz \quad (1.58)$$

olup, $r : [0, \infty]$, $\phi : [0, 2\pi]$ ve $z : [-\infty, +\infty]$ aralıklarında değerler alabilirler.

Silindirik koordinatlarda vektörel türev ifadeleri şöyle olur:

Gradyan :

$$\vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z} \quad (1.59)$$

Diverjans :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.60)$$

Rotasyonel :

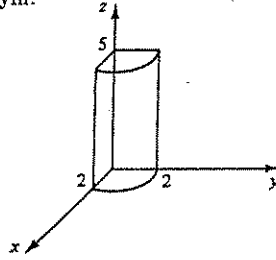
$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \hat{z} \quad (1.61)$$

Laplasien :

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (1.62)$$

Problem 1.40 (r, ϕ, z) konumlu bir yerdeki $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$ birim vektörlerini $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ cinsinden ifade edin. Bulduğunuz ifadelerin tersini alıp $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ vektörlerini bunlar cinsinden yazın.

Problem 1.41 (a) $\vec{v} = r(2 + \sin^2 \phi) \hat{r} + r \sin \phi \cos \phi \hat{\phi} + 3z^2 \hat{z}$ vektörünün diverjansını hesaplayın. (b) Bu fonksiyonu ve Şek. 1.47'deki çeyrek silindiri kullanarak diverjans teoremini doğrulayın. (c) \vec{v} nin rotasyonelini hesaplayın.



Şekil 1.47

1.5 DIRAC DELTA FONKSİYONU

Küresel koordinatlarda şu vektör fonksiyonuna bir göz atalım:

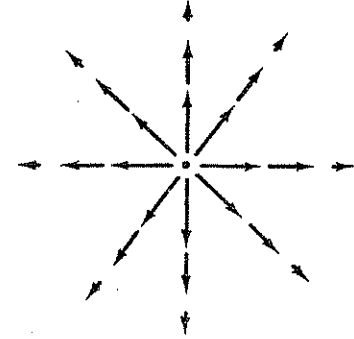
$$\vec{v} = \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad (1.63)$$

Şek. 1.48'de gösterildiği gibi, \vec{v} fonksiyonu her yerde dış doğru radyal yönde ve ırak-sayarak azalmaktadır. Şekle bakılırsa, bu fonksiyonun diverjansı oldukça büyük olmalıdır. (1.52) denklemini kullanarak hele bir hesaplayalım:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0! \quad (1.64)$$

(Problem 1.17'yi çözdüyseniz, buna benzer bir paradoks ile karşılaşmışsınızdır.) Bu fonksiyona diverjans teoremini uyguladığımızda, esrar perdesi daha da kalınlaşır. Örneğin, Problem 1.37'deki gibi, merkezi orijinde olan R yarıçaplı bir küre yüzeyi üzerinde hesaplırsak,

1.5. DIRAC DELTA FONKSİYONU



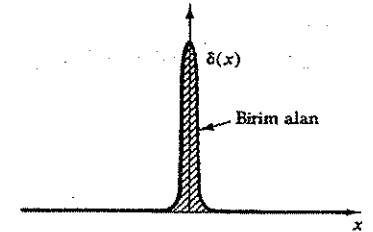
Şekil 1.48

yüzey integrali

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int \left(\frac{1}{R^2} \hat{r} \right) \cdot (R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}) = \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) = 4\pi \quad (1.65)$$

Oysa, (1.64) denkleminin inanıyorsa, hacim integrali $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\tau$ sıfır olacaktır. Yani, diverjans teoremi yanlış mıdır? Ne oluyor yahu?

Sorun, $\vec{r} = 0$ noktasından kaynaklanmaktadır. Orada \vec{v} fonksiyonu sonsuz olmakta, ayrıca (1.64) denkleminde sıfıra bölmek gibi bir hata yapmaktayız. Orijin *dışında* her yerde $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ olduğu doğrudur; fakat tam $\vec{r} = 0$ 'da durum pek açık görünmüyor. (1.65) denklemindeki integralin R yarıçapından bağımsız olduğuna dikkat edelim; buna göre, eğer diverjans teoremi doğruysa (ki doğrudur), merkezi orijinde olan her küre için, yarıçapı ne olursa olsun, $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\tau = 4\pi$ olmalıdır. Demek ki tüm katkı $r = 0$ noktasından gelmektedir! Buradan çıkan sonuç şudur: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ fonksiyonu orijin noktası dışında her yerde sıfırdır, ama orijini kapsayan her bölgede integrali 4π olur. Bildiğimiz hiçbir fonksiyonun böyle bir özelliği yoktur. Karşılaştığımız bu acıip matematiksel nesneye fizikçiler **Dirac delta fonksiyonu** derler; teorik fizikte çok yerde karşımıza çıkar. Ayrıca, burada karşılaştığımız sorun (yani, \hat{r}/r^2 'nin diverjansı) sadece eğlencelik değildir—elektromagnetik teoride temel bir yeri vardır. O halde, burada biraz durup Dirac delta fonksiyonunu daha dikkatle inceleyelim.



Şekil 1.49

1.5.1 Bir Boyutlu Dirac Delta Fonksiyonu

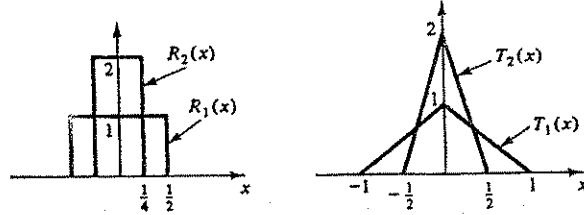
$\delta(x)$ ile gösterilen bir boyutlu Dirac delta fonksiyonunu, sonsuz yükseklikte ve alanı 1 olan dar bir pik olarak gözönüne getirebilirsiniz (Şek. 1.49). Yani,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases} \quad (1.66)$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.67)$$

Teknik açıdan $\delta(x)$ bir fonksiyon değildir; çünkü sıfırdan farklı olduğu tek noktada ($x = 0$) sonlu değeri yoktur. Matematikte bu, *genelleştirilmiş fonksiyon*, veya *distribüsyon* olarak bilinir. İsterseniz onu, bilinen fonksiyonlar dizisinin limiti olarak görebilirsiniz; örneğin Şek. 1.50'deki tabanı n ve yüksekliği $1/n$ olan $R_n(x)$ dikdörtgen fonksiyonları, veya tabanı $2/n$ ve yüksekliği n olan $T_n(x)$ üçgen fonksiyonları gibi.



Şekil 1.50

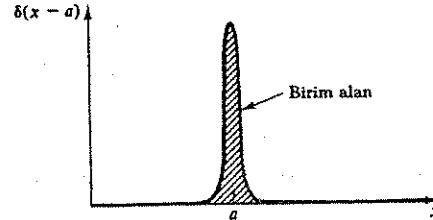
Bildiğimiz türden, sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu gözönüne alalım. $f(x)\delta(x)$ çarpımı $x = 0$ dışında her yerde sıfırdır. Buna göre

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) \quad (1.68)$$

yazabiliriz. (Burası önemli, delta fonksiyonunu öğrenmek için bunu anlayın: çarpım $x = 0$ dışında her yerde zaten sıfır olduğuna göre, $f(x)$ 'in orijindeki değerini kullanabiliriz.) Buna göre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = f(0) \quad (1.69)$$

olur; yani, delta fonksiyonu integral içindeki $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ 'daki değerini çekip alır. (Buradaki integralin komple $[-\infty, +\infty]$ aralığında olması gerekmez; pik etrafında küçük bir $[-\epsilon, +\epsilon]$ aralığında olsun yeter.)



Şekil 1.51

Pikin yeri $x = 0$ değil de, başka bir $x = a$ noktasındaysa (Şek. 1.51):

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & (x \neq a) \\ \infty & (x = a) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1 \quad (1.70)$$

Bu durumda (1.68) denklemini yerine

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a) \quad (1.71)$$

olur ve (1.69) denklemini de şöyle yazılır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = f(a) \quad (1.72)$$

Örnek 1.10 :

$$\int_0^3 x^3 \delta(x - 2) dx = 2^3 = 8$$

Fakat integralin üst limiti 3 değil de, örneğin 1 olsaydı, pik aralığın dışında kalacağından, sonuç sıfır olurdu.

δ 'nın kendisi meşru bir fonksiyon olmamakla birlikte, δ fonksiyonlarının yer aldığı *integraler* meşrudur. Ashında, delta fonksiyonunu daima *integral içinde yaptığı görev* ile düşünmek daha iyi olur. Örneğin, delta fonksiyonları içeren iki ifade $D_1(x)$ ve $D_2(x)$ olsun. Her $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) D_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D_2(x) dx \quad (1.73)$$

oluyorsa, $D_1(x)$ ve $D_2(x)$ ifadeleri eşit olurlar.

Örnek 1.11 :

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x) \quad (1.74)$$

olduğunu gösterin. (k sıfırdan farklı bir sabittir.)

Çözüm : Keyfi seçilmiş bir $f(x)$ test fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(kx) dx$$

integraline bakalım. $y \equiv kx$ adında yeni bir değişkene geçerek, $x = y/k$ ve $dx = dy/k$ olur. Eğer k pozitif ise, integral yine $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a gider; ama k negatif ise, $x = +\infty$ olduğunda $y = -\infty$ demektir. Bu durumda integral sınırlarını yer değiştirirsek bir eksi işareti gelir. Böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(kx) dx = \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(y/k) \delta(y) \frac{dy}{k} = \pm \frac{1}{k} f(0) = \frac{1}{|k|} f(0)$$

(Altındaki işaret k negatif iindir; mutlak değer alarak bundan kolayca kurtuluruz.) Bu sonuca göre, integral içindeki $\delta(kx)$ fonksiyonu $(1/|k|)\delta(x)$ ile aynı işi görüyor demektir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(kx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{1}{|k|} \delta(x) \right] dx$$

(1.73) kriterine göre, $\delta(kx)$ ile $(1/|k|)\delta(x)$ eşit olurlar.

Problem 1.42 Şu integralleri hesaplayın:

$$(a) \int_2^6 (3x^2 - 2x - 1) \delta(x - 3) dx$$

$$(b) \int_0^5 \cos x \delta(x - \pi) dx$$

$$(c) \int_0^3 x^3 \delta(x + 1) dx$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} \ln(x + 3) \delta(x + 2) dx$$

Problem 1.43 Şu integralleri hesaplayın:

- (a) $\int_{-2}^2 (2x+3)\delta(3x) dx$
 (b) $\int_0^2 (x^3+3x+2)\delta(1-x) dx$
 (c) $\int_{-1}^1 9x^2\delta(3x+1) dx$
 (d) $\int_{-\infty}^a \delta(x-b) dx$

Problem 1.44 (a) $x \frac{d}{dx}(\delta(x)) = -\delta(x)$

olduğunu gösterin. (Yol gösterme: Kısmi integral alın.)

(b) θ basamak fonksiyonu

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

olarak tanımlanır. $d\theta/dx = \delta(x)$ olduğunu gösterin.

1.5.2 Üç Boyutlu Delta Fonksiyonu

Delta fonksiyonunu üç boyuta kolayca genişletebiliriz:

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (1.75)$$

Burada, her zaman olduğu gibi, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ orijinden (x, y, z) noktasına çizilen konum vektörüdür. Üç boyutlu delta fonksiyonu $(0, 0, 0)$ hariç uzayın her yerinde sıfır olur. Hacim integrali

$$\int_{\text{tüm uzay}} \delta^3(\vec{r}) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z) dx dy dz = 1 \quad (1.76)$$

ve bir fonksiyonla çarpımın integrali

$$\int_{\text{tüm uzay}} f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) d\tau = f(\vec{r}_0) \quad (1.77)$$

olur (\vec{r}_0 sabit bir konum vektörüdür.)

Şimdi Kısım 1.5.1'de karşılaştığımız paradoksu çözecek durumdayız. Hatırlayacaksınız, \vec{r}/r^2 'nin diverjansının orijin dışında her yerde sıfır olduğunu, oysa orijini kapsayan bir hacim içindeki integralinin 4π olduğunu bulmuştuk. Bunlar tam da Dirac delta fonksiyonunun özellikleridir. Yani,

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = 4\pi\delta^3(\vec{r}) \quad (1.78)$$

olmalıdır. Herhangi bir \vec{r}_0 konumundan itibaren

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0 \quad (1.79)$$

vektörü için

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R^2} \right) = 4\pi\delta^3(\vec{R}) \quad (1.80)$$

1.5. DIRAC DELTA FONKSİYONU

olur. (Kitabımızda sürekli olarak, sabit \vec{r}_0 noktasından değişken \vec{r} noktasına olan yerdeğiştirme vektörünü $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ile göstereceğiz. Türev alınırken, \vec{r}_0 sabit tutulup \vec{r} 'ye göre türev alındığına dikkat edelim.) Öte yandan,

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^2} \quad (1.81)$$

olduğundan, bunun da diverjansı Laplasyeni verir:

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta^3(\vec{R}) \quad (1.82)$$

Örnek 1.12: Merkezi orijinde olan R yarıçaplı küre içinde şu integrali hesaplayın:

$$J = \int_V (r^2 + 2) \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) d\tau$$

1. Çözüm: Diverjansı yazmak için (1.78) denklemini ve integrali almak için (1.77) denklemini kullanırız:

$$J = \int_V (r^2 + 2) 4\pi\delta^3(\vec{r}) d\tau = 4\pi(0 + 2) = 8\pi$$

Bir satırda elde edilen bu çözüm size delta fonksiyonunun gücünü ve güzelliğini anlatabiliyor mu? Fakat, size ikinci bir çözüm göstereyim; bu çözüm biraz daha uzundur ama kısmi integrasyon tekniğini görmemiz açısından yararlı olur. Bir boyutlu integrallerde, türevin çarpım kuralı kullanılır:

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}$$

Buradaki terimlerden birini yalnız bırakıp integral alırsak

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = - \int_a^b g \frac{df}{dx} dx + \int_a^b \frac{d}{dx}(fg) dx$$

Sağ taraftaki ikinci integral bir tam diferansiyel olduğundan

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(fg) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

olur. Benzer şekilde, vektör integrallerde de bu özellik kullanılır; yapılacak iş integrand içindeki terimlerden birinden $\vec{\nabla}$ 'yı "kesip" diğerine "yapıştırmak"tır. Örneğin, 5.no lu çarpım kuralına bakalım:

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f)$$

Sağdaki birinci terimi yalnız bırakıp hacim integrali alalım:

$$\int_V f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) d\tau = - \int_V \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f) d\tau + \int_V \vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) d\tau$$

Diverjans teoremi uygulayarak son terimi bir yüzey integraline dönüştürelim:

$$\int_V f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) d\tau = - \int_V \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f) d\tau + \oint_S f\vec{A} \cdot d\vec{a} \quad (1.83)$$

Burada V hacmini saran kapalı yüzey S ile gösterilmiştir. Yine, kısmi integrasyon yoluyla, çarpanlardan biri (\vec{A}) üzerindeki türevi diğeri (f) üzerine aktarmış olduk. Bunun karşılığında, bir eksi işaret ve fazladan bir de yüzey integrali elde ettik. Şimdi ikinci çözüme geçebiliriz.

2. Çözüm: (1.83) denklemini kullanırsak

$$J = - \int_V \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot [\vec{\nabla}(r^2 + 2)] d\tau + \oint_S (r^2 + 2) \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot d\vec{a}$$

Küresel koordinatlarda gradyan ifadesi (1.51) denklemini

$$\vec{\nabla}(r^2 + 2) = 2r\vec{r}$$

alınırsa hacim integrali

$$\int_V \frac{2}{r} d\tau = \int_V \frac{2}{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = 8\pi \int_0^R r dr = 4\pi R^2$$

bulunur. Öte yandan, R yarıçaplı küre üzerinde ($r = R$) yüzey elemanı

$$d\vec{a} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{r}$$

alınırsa yüzey integrali şöyle olur:

$$\int_S (R^2 + 2) \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi(R^2 + 2)$$

Bu sonuçları (1.83) denkleminde toplarsak, aynı sonucu buluruz:

$$J = -4\pi R^2 + 4\pi(R^2 + 2) = 8\pi$$

Problem 1.45 (a) \vec{r}_0 konumlu yerde kütlesi m olan noktasal bir parçacık vardır. Bu parçacığın tüm uzaydaki kütle yoğunluğu (kütle/hacim) için bir ifade yazın. Aynı şekilde, \vec{r}_0 konumlu yerdeki noktasal q yükünün yük yoğunluğu için bir ifade yazın.

(b) Bir elektrik dipol, orijinde bir $-q$ yükü ile \vec{r}_0 konumunda bir $+q$ yükünden oluşur. Bu sistemin yük yoğunluğu ifadesini yazın.

(c) Merkezi orijinde olan R yarıçaplı küresel kabuk yüzeyinde toplam Q yükü düzgün olarak dağılmıştır. Bu sistemin yük yoğunluğu ifadesini yazın. (Dikkat: tüm uzaydaki yoğunluk integrali Q 'ya eşit çıkmalıdır.)

Problem 1.46 Şu integraleri hesaplayın:

(a) $\int_{\text{tüm uzay}} (r^2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_0 + r_0^2) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) d\tau$ (\vec{r}_0 sabit bir vektördür.)

(b) $\int_V (\vec{r} - \vec{a})^2 \delta^3(5\vec{r}) d\tau$; burada V hacmi, merkezi orijinde ve bir kenarı 2 birim uzunlukta küp, ve $\vec{a} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ dir.

(c) $\int_V (r^4 + r^2(\vec{r} \cdot \vec{c}) + c^4) \delta^3(\vec{r} - \vec{c}) d\tau$; burada V hacmi merkezi orijinde olan 6 birim yarıçaplı küre, ve $\vec{c} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ dir.

Problem 1.47

$$\int_V \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\tau = \int_V \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\tau + \oint_S (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a}$$

olduğunu gösterin. Burada V hacmini saran kapalı yüzey S dir.

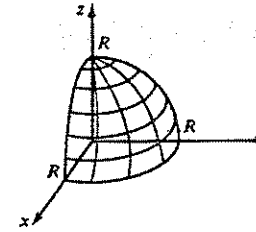
Problem 1.48 Örnek 1.12'de olduğu gibi, şu integrali iki yolla hesaplayın:

$$J = \int_{\text{tüm uzay}} e^{-r} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2} \right) d\tau$$

BÖLÜM 1 ÜZERİNE EK PROBLEMLER

Problem 1.49 $\vec{v} = r^2 \cos \theta \vec{r} + r^2 \cos \phi \vec{\theta} - r^2 \cos \theta \sin \phi \vec{\phi}$

fonksiyonunu ve Şek. 1.52'deki R yarıçaplı sekizde birlik küre yüzeyini kullanarak diverjans teoreminin doğruluğunu gösterin. Yüzeyin tümünü almayı unutmayın. (Yanıt: $\pi R^2/4$)



Şekil 1.52

Problem 1.50

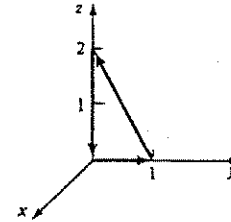
$$\vec{v} = ay\vec{i} + bx\vec{j}$$

fonksiyonunu ve xy -düzleminde, merkezi orijinde olan ab yarıçaplı dairesel yolu kullanarak Stokes teoremini sağlayın. (Yanıt: $\pi a^2 b^2 (b - a)$)

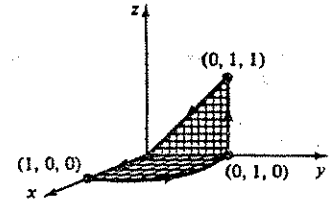
Problem 1.51

$$\vec{v} = 6z\vec{i} + yz^2\vec{j} + (3y + z)\vec{k}$$

fonksiyonunun Şek. 1.53'de gösterilen üçgen yol boyunca integralini hesaplayın. Stokes teoremini kullanarak yanıtınızın sağlamasını yapın. (Yanıt: $8/3$)



Şekil 1.53



Şekil 1.54

Problem 1.52

$$\vec{v} = (r \cos \theta) \vec{r} - (r \cos \theta \sin \theta) \vec{\theta} + 3r \vec{\phi}$$

fonksiyonunun Şek. 1.54'de gösterilen yol boyunca integralini hesaplayın. Hesabı silindirik veya küresel koordinatlarda yapabilirsiniz. Stokes teoremini kullanarak yanıtınızın sağlamasını yapın. (Yanıt: $3\pi/2$)

Problem 1.53

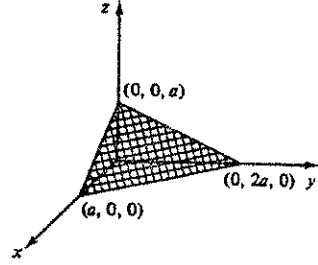
$$\vec{v} = y\vec{k}$$

fonksiyonunun Şek. 1.55'te gösterilen üçgen yüzey üzerinde integralini hesaplayın. Stokes teoremini kullanarak yanıtınızın sağlamasını yapın. (Yanıt: a^2)

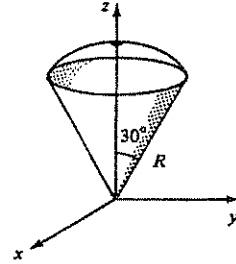
Problem 1.54

$$\vec{v} = r^2 \sin \theta \vec{r} + 4r^2 \cos \theta \vec{\theta} + r \tan \theta \vec{\phi}$$

fonksiyonunu ve Şek. 1.56'te gösterilen "dondurma külahı" şeklindeki hacmi kullanarak diverjans teoreminin doğruluğunu gösterin. [Yanıt: $(\pi R^2/2)(\pi/3 + \sqrt{3}/2)$]



Şekil 1.55



Şekil 1.56

Problem 1.55 $\int_S f(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = - \int_S (\vec{A} \times \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{a} + \oint_C f \vec{A} \cdot d\vec{l}$ olduğunu gösterin. (S açık bir yüzey ve C onu çevreleyen kapalı eğridir.)

• **Problem 1.56** Vektör hesabında çok önemli olan gradyan, diverjans ve rotasyonelin temel teoremlerinden önemli birkaç sonuç daha çıkarmak mümkündür:

(a) $\int_V (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{\tau} = \oint_S T d\vec{a}$ olduğunu gösterin. (Yol gösterme: \vec{c} sabit bir vektör olmak üzere, $\vec{v} = T\vec{c}$ alın ve diverjans teoremini uygulayın.)

(b) $\int_V (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{\tau} = - \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$ olduğunu gösterin. (Diverjans teoreminde \vec{v} yerine $(\vec{v} \times \vec{c})$ alın.)

(c) $\int_V [T \nabla^2 U + (\vec{\nabla} T) \cdot (\vec{\nabla} U)] d\tau = \oint_S (T \vec{\nabla} U) \cdot d\vec{a}$ olduğunu gösterin. (Diverjans teoreminde $\vec{v} = T \vec{\nabla} U$ alın. Bu, Green özdeşliği olarak bilinir.)

(d) $\int_V (T \nabla^2 U - U \nabla^2 T) d\tau = \oint_S (T \vec{\nabla} U - U \vec{\nabla} T) \cdot d\vec{a}$ olduğunu gösterin. (Bu sonuç Green teoremi olarak bilinir.)

(e) $\int_S \vec{\nabla} T \times d\vec{a} = - \oint_C T d\vec{l}$ olduğunu gösterin. (Stokes teoreminde $\vec{v} = T\vec{c}$ alın.)

• **Problem 1.57** (a) $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{r}$

fonksiyonunun diverjansını bulun. Önce, (1.64) denklemindeki gibi, doğrudan hesaplayın. Sonucu, diverjans teoremiyle doğrulayın. \vec{r}/r^2 de olduğu gibi, orijinde bir delta fonksiyonu olur mu? $r^n \vec{r}$ 'nin diverjansı için genel formül ne olur?

(b) $r^n \vec{r}$ nin rotasyonelini bulun. Yanıtınızı Problem 1.56b'deki sonuçla doğrulayın.

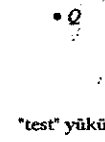
(Yanıt: $n \neq -2$ için $\vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r}) = (n+2)r^{n-1}$. $n = -2$ için sonuç $4\pi\delta^3(\vec{r})$ olur; $\vec{\nabla} \times (r^n \vec{r}) = 0$)

ELEKTROSTATİK

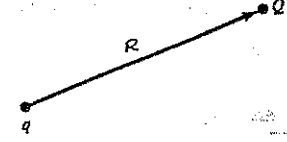
2.1 ELEKTROSTATİK ALAN

2.1.1 Giriş

Elektromagnetik teoremin çözüm aradığı temel problem şudur: Çok sayıda q_1, q_2, q_3, \dots "kaynak" yükleri belirli konumlarda olsunlar (Şek. 2.1). Bu yükler diğer bir Q "test" yükü üzerine ne kadar bir kuvvetle etki ederler? Genel olarak hem kaynak yükleri ve hem de test yükü hareket halinde olabilirler.



Şekil 2.1



Şekil 2.2

Bu problemin çözümünde toplanabilirlik ilkesi kolaylık sağlar. Bu ilkeye göre, iki yük arasındaki etkileşme diğer yüklerin varlığından bağımsızdır. Diğer bir deyişle, Q yükü üzerindeki net kuvveti bulmak istersek, önce diğerlerini yok sayıp sadece q_1 yükünün uyguladığı \vec{F}_1 kuvvetini hesaplarız; sonra sadece q_2 yükünün uyguladığı \vec{F}_2 kuvvetini; ...vb. Sonunda bu kuvvetlerin vektörel toplamını alırız: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$. O halde, ilke olarak, bir q yükünün uyguladığı kuvveti bulmak gerekir. Daha sonra, istenildiği kadar yükün etkisi bulunabilir¹.

İlk bakışta durum kolay görünüyor: Hemen q yükünün Q üzerine uyguladığı kuvvetin formülünü yazalım bitsin, değil mi? Durun bakalım, bunu ancak Bölüm 9'da yapabileceğiz; ama şimdiden sizi şaşırtacak cevabı söyleyeyim: Q üzerindeki kuvvet sadece yüklere ve aralarındaki uzaklığa değil, yüklerin hızlarına ve q yükünün ivmesine bağlıdır! İşin daha da kötüsü, q yükünün baktığımız andaki konumu, hızı ve ivmesi kullanılamaz: Elektromagnetik "haber" ışık hızıyla yayılır; bu nedenle, Q yükünün algıladığı, daha önceki bir zamanda q yükünün sahip olduğu konum, hız ve ivmedir.

O halde, " q yükünün Q 'ya uyguladığı kuvvet nedir?" sorusuna en genel cevabı hemen incelemek yarar sağlamaz; buna değişik aşamalarla ulaşacağız. İlk olarak, adına elektrostatik denilen ve yüklerin durgun olduğu özel durumu ele alacağız. (Aşında, q yükü durgun, Q test yükü hareketli olabilir.)

¹ Toplanabilirlik ilkesi size açık veya gereksiz gelebilir, ama o kadar basit değil: Örneğin, elektromagnetik kuvvet toplam yükün karesi ile orantılı olsaydı, toplanabilirlik ilkesi geçersiz olurdu; çünkü $(q_1 + q_2)^2 \neq q_1^2 + q_2^2$ olurdu.

2.1.2 Coulomb Yasası

Durgun ve noktasal bir q yükünün, kendisinden \vec{R} uzaklıkta bir Q yüküne uyguladığı kuvvet nedir? Bunun yanıtı Coulomb yasasıdır:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \hat{R} \quad (2.1)$$

Burada ϵ_0 sabitine boşluğun geçirgenliği denir. Kuvvetin newton (N), uzunluğun metre (m) ve yükün Coulomb (C) ile ölçüldüğü MKS birim sisteminde değeri şöyledir:

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Açık ifadesiyle, Q yükü üzerindeki kuvvet yüklerin çarpımıyla doğru, aradaki uzaklıkla ters orantılıdır. Kuvvetin yönü yükleri birleştiren doğrultuda olup, q ile Q aynı işaretli ise itici, zıt işaretliyse çekici olur. (Kitapta herhangi iki nokta arasındaki yer değiştirme vektörünü daima \vec{R} ile göstereceğim; \vec{r} işareti orijinden ölçülen konumu, r ise küresel veya silindirik koordinat için kullanılacaktır.) Coulomb yasası ve toplanabilirlik ilkesi elektrostatiğin fiziksel temelini oluşturur; maddenin özellikleri dışında, gerisi bu temel kuralların matematik incelemesinden ibarettir.

Problem 2.1 (a) Oniki tane özdeş q yükü, oniki köşeli düzgün bir çokgenin köşelerine konmuştur. Merkezdeki Q test yükü üzerindeki toplam kuvvet ne olur?

(b) $12q$ 'dan birinin kaldırıldığını varsayın. Q üzerindeki toplam kuvvet ne olur? Yanıtınızın gerekçesini açıklayın.

(c) Şimdi 13 tane özdeş q yükü, onüç köşeli düzgün çokgenin köşelerine konmuş olsun. Merkezdeki Q yükü üzerindeki toplam kuvvet ne olur?

(d) $13q$ 'dan biri kaldırılıyor. Q üzerindeki toplam kuvvet ne olur? Yanıtınızı açıklayın.

2.1.3 Elektrik Alan

Bir Q test yükünden $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_n$ uzaklıklarda bulunan q_1, q_2, \dots, q_n yüklerinin Q yüküne uyguladıkları toplam kuvvet, toplanabilirlik ilkesine göre

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 Q}{R_1^2} \hat{R}_1 + \frac{q_2 Q}{R_2^2} \hat{R}_2 + \dots \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 \hat{R}_1}{R_1^2} + \frac{q_2 \hat{R}_2}{R_2^2} + \frac{q_3 \hat{R}_3}{R_3^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

veya

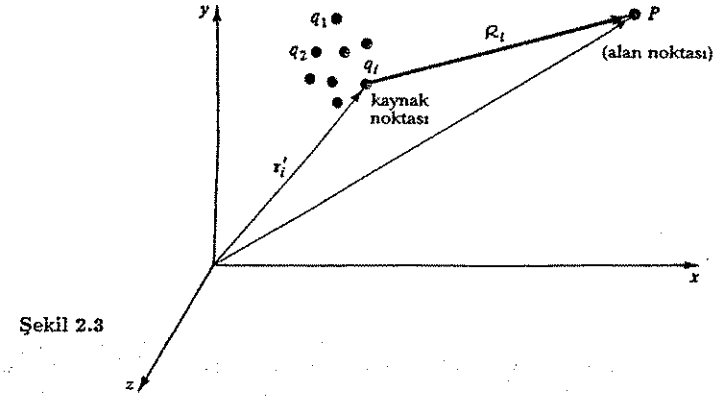
$$\vec{F} = Q \vec{E} \quad (2.2)$$

olur. Burada

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \hat{R}_i \quad (2.3)$$

\vec{E} vektörü q_i yüklerinin elektrik alanı olur. Elektrik alan, hesaplanan $P = (x, y, z)$ konumunun bir fonksiyonudur, çünkü \hat{R}_i vektörleri P 'ye bağlıdır (Şek. 2.3). Fakat elektrik alan o

2.1. ELEKTROSTATİK ALAN

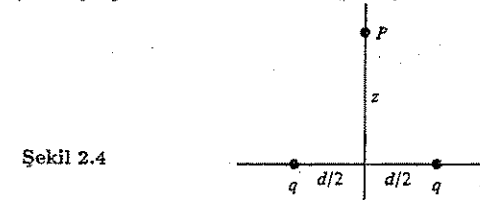


Şekil 2.3

noktadaki Q yüküne bağlı değildir; sadece q_i yüklerinin dağılımıyla belirlenen ve konumdan konuma değişen vektörel bir büyüklüktür. Fiziksel olarak $\vec{E}(P)$, P noktasına konulan birim test yüküne etkiyen kuvvet olur.

Ama gerçekten nedir elektrik alanı? Burada elektrik alanı, elektriksel kuvvetleri hesaplamakta kullanılan matematiksel bir nesne olarak tanımlamakla başladım. Fakat sizin elektrik alanı, bir yükün çevresindeki uzayı dolduran "gerçek" bir fiziksel büyüklük olarak kafanızda canlandırmanızı isterim. Maxwell bile elektrik ve magnetik alanların, "esir" denilen ve uzayı dolduran görünmez maddenin gerilme ve deformasyonu olduklarına inanmaya başlamıştı. Gerçi özel görelilik teorisi esir kavramını ve Maxwell'in mekanik görüşünü terketmemize yolaçtı. Diğer bir yaklaşımda, elektrik alan kavramına gerek duymadan "uzaktan etkiyen kuvvet" türü bir teori mümkün fakat daha karmaşık olmaktadır. Sonuç olarak, "alan nedir?" sorusuna yanıt veremem, sadece nasıl hesaplandığını ve ne işe yaradığını söyleyebilirim.

Problem 2.2 Aralarında d uzaklığı bulunan özdeş iki q yükünün orta dikmesi üzerinde ve z uzaklıkta bir noktadaki elektrik alanı bulun (Şek. 2.4). Yanıtınızı $z \gg d$ limit durumunda beklediğiniz sonuçla karşılaştırın.



Şekil 2.4

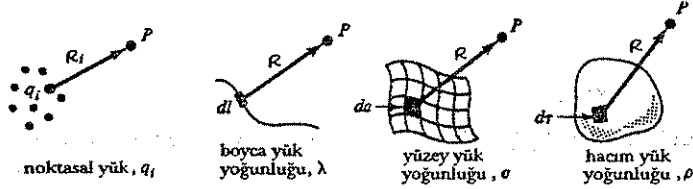
(b) Aynı soruyu bu kez soldaki yükün $-q$ olması durumunda yanıtlayın.

2.1.4 Sürekli Yük Dağılımları

(2.3) denklemindeki elektrik alan tanımını noktasal yükler içindir. Uygulamada genellikle bir bölgede sürekli dağılmış yüklerle karşılaşırız. Burada notasyonumuz şöyle olacaktır: Bir eğri üzerinde dağılmış yükün boyca yoğunluğunu (yük/uzunluk) λ ile; bir yüzey üzerine dağılmış yükün yüzeyel yük yoğunluğunu (yük/alan) σ ile, ve bir hacim içine dağılmış yükün hacimsal yük yoğunluğunu (yük/hacim) ρ ile göstereceğiz. (2.3) denklemini sürekli yük

dağılımlarına genişletmek zor iş değildir: yapılacak iş yükü sonsuz küçük parçalara bölmek ve her parçayı noktasal yükmiş gibi ele almaktır. Buna göre, q_i yükü yerine $dq = \lambda dl$, σda veya $\rho d\tau$ yazılır ve toplama yerine integral alınır:

$$\sum_{i=1}^N \longleftrightarrow \int_{\text{eğri}} (\lambda) dl \longleftrightarrow \int_{\text{yüzey}} (\sigma) da \longleftrightarrow \int_{\text{hacim}} (\rho) d\tau$$



Şekil 2.5

Örneğin, bir eğri üzerinde dağılmış yükün elektrik alanı:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{eğri}} \frac{\hat{R}}{R^2} \lambda dl \quad (2.4)$$

yüzey yük dağılımının elektrik alanı:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{yüzey}} \frac{\hat{R}}{R^2} \sigma da \quad (2.5)$$

ve hacim yük dağılımının elektrik alanı ise şöyle olur:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{hacim}} \frac{\hat{R}}{R^2} \rho d\tau \quad (2.6)$$

(2.6) denklemi "Coulomb yasası" olarak bilinir, çünkü orijinal (2.1) denklemine eşdeğerdir. Bu denklemdeki \hat{R} nin anlamına iyi dikkat edin. (2.3) denkleminde \hat{R}_i , P noktasının q_i yükünden itibaren ölçülen konumuydu. Benzer şekilde, (2.4)-(2.6) denklemlerinde, P noktasının konumu \vec{r} ve sonsuz küçük dq yükünün konumu \vec{r}' ise $\hat{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ olur; yani P noktasının dq yükünden itibaren ölçülen uzaklığıdır (Şek. 2.5). Kartezyen koordinatlarda P noktasının konumu (x, y, z) ve dq yükünün konumu (x', y', z') ile gösterilirse, \hat{R} vektörü

$$\vec{R} = (x - x')\hat{i} + (y - y')\hat{j} + (z - z')\hat{k}$$

ve büyüklüğü

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

olur. \hat{R} yönündeki birim vektörü kurmak için

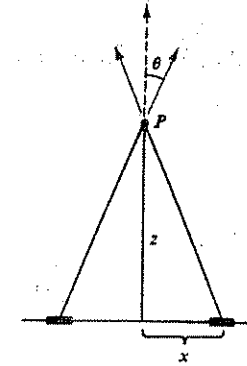
$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R}$$

bağıntısı kullanılır. Buna göre, (2.6) denkleminin kartezyen koordinatlardaki açık ifadesi şöyle olur:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{hacim}} \frac{(x - x')\hat{i} + (y - y')\hat{j} + (z - z')\hat{k}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \rho(x', y', z') dx' dy' dz' \quad (2.7)$$

Hemen ekleyeyim: (2.7) denklemiyle elektrik alan hesabı pek yapılmaz; her problemde daha kestirme bir yol bulunabilir.

Örnek 2.1: Üzerinde düzgün λ boyca yük yoğunluğu olan $2L$ uzunlukta doğru parçasının orta dikmesi üzerinde z uzaklıkta bir noktada elektrik alanı bulun (Şek. 2.6).



Şekil 2.6

Çözüm: Doğru parçasının orta noktasından itibaren simetrik iki küçük dx parçasını birlikte düşünmek kolaylık sağlar; böylece bunların elektrik alana katkılarının yatay bileşenleri birbirini sıfırlar. Bu küçük yük çiftinin elektrik alana katkısı z-ekseni yönünde olur:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2 \left(\frac{\lambda dx}{R^2} \right) \cos \theta \hat{k}$$

Burada $\theta = z/R$ ve $R = \sqrt{z^2 + x^2}$ olup integral 0'dan L'ye kadardır:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{2\lambda z}{(z^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{z^2 \sqrt{z^2 + x^2}} \right]_0^L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z \sqrt{z^2 + L^2}}$$

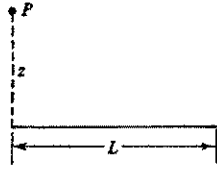
olup elektrik alan z-ekseni yönündedir.

Doğru parçasından çok uzaklarda ($z \gg L$) bu formül sadeleşir:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{z^2}$$

Bu sonuç mantıklı geliyor; çünkü $2\lambda L = q$ toplam yük olduğundan, çok uzaktan bakıldığında, noktasal yükün elektrik alanı $q/(4\pi\epsilon_0 z^2)$ limitini bulmalıyız. Öte yandan, $L \rightarrow \infty$ limitini aldığımızda ise, sonsuz uzunlukta doğrusal telin elektrik alanını bulmamız gerekir:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{z}$$

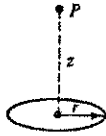


Şekil 2.7

Problem 2.3 Üzerinde düzgün λ yük yoğunluğu taşıyan L uzunlukta bir doğru parçasının (Şek. 2.7) bir ucundan çıkan dikme üzerinde z uzaklıkta bir noktadaki elektrik alanı bulun. Bulduğunuz sonucun $z \gg L$ limitinde beklediğiniz sonuca uyup uymadığını kontrol edin.

Problem 2.4 Üzerinde λ yük yoğunluğu taşıyan ve kenar uzunluğu s olan kare şeklinde kıvrılmış bir tel (Şek. 2.8) düzleminin ortasından çıkan dikme üzerinde ve z yükseklikte bir noktadaki elektrik alanı bulun. (Yol gösterme: Örnek 2.1'in sonucu kullanın.)

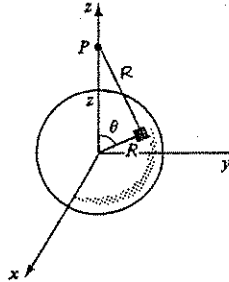
Problem 2.5 Düzgün λ yük yoğunluğu taşıyan r yarıçaplı çemberin (Şek. 2.9) merkezinden çıkan dikme üzerinde z uzaklıkta bir noktada elektrik alanı bulun.



Şekil 2.9

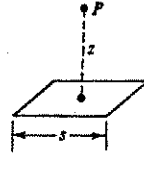
Problem 2.6 Yüzeyinde düzgün σ yük yoğunluğu taşıyan R yarıçaplı dairenin (Şek. 2.10) merkezinden çıkan dikme üzerinde z yükseklikte bir noktada elektrik alanı bulun. Yanıtınız $R \rightarrow \infty$ ve $z \gg R$ limitlerinde ne olur?

Problem 2.7 Yüzeyinde düzgün σ yük yoğunluğu taşıyan R yarıçaplı küresel kabuğun (Şek. 2.11) merkezinden z uzaklıkta elektrik alanı bulun. Küre içinde ($z < R$) ve küre dışındaki ($z > R$) durumları birlikte hesaplayın. Yanıtınızı küre yüzeyindeki toplam Q yükü cinsinden ifade edin. (Yol gösterme: kosinüs teoremi kullanarak R uzaklığını R, θ cinsinden yazın. Pozitif kökün $z < R$ için $\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz} = (R - z)$ olduğuna, fakat $z > R$ için $(z - R)$ olduğuna dikkat edin.)

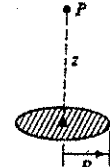


Şekil 2.11

Problem 2.8 Problem 2.7'deki sonucu kullanarak, düzgün ρ hacimsel yük yoğunluğu bulunan R yarıçaplı küre hacminin içinde ve dışında elektrik alanı hesaplayın. Yanıtınızı kürenin toplam yükü cinsinden ifade edin.



Şekil 2.8



Şekil 2.10

2.2 ELEKTROSTATİK ALANIN DİVERJANS VE ROTASYONELİ

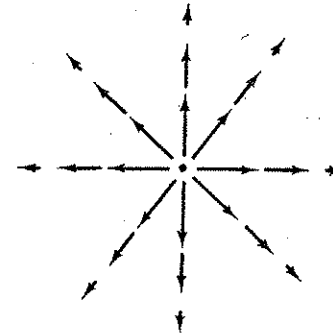
2.2.1 Alan Çizgileri ve Gauss Yasası

İlke olarak, elektrostatik konusunu halletmiş sayılırız. (2.3)-(2.6) denklemleriyle bir yük dağılımının elektrik alanını hesaplayabiliriz ve (2.2) denklemiyle de bu elektrik alana konulan bir Q yükü üzerindeki kuvveti bulabiliriz. Fakat, Problem 1.7'de görmüş olduğunuz gibi, en basit yük dağılımlarında bile, \vec{E} alanını bulmak için gerekli integrallerin alınması kolay iş değildir. Elektrostatikğin geri kalan kısmı bu integrallerden kaçınma tekniklerinden ibarettir. Bu tekniklerin temelinde \vec{E} 'nin diverjans ve rotasyoneli vardır. (2.6) denklemiyle verilen \vec{E} 'nin diverjansını birazdan hesaplayacağız; ancak burada daha fiziksel ve daha aydınlatıcı bir yol göstermek istiyorum.

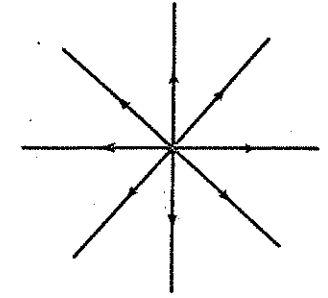
Önce en basit durumla başlayalım; orijindeki noktasal bir q yükünün \vec{r} konumlu bir noktadaki elektrik alanını yazalım:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (2.8)$$

Bu alanı uzayda gözönüne getirebilmek için, belirli bazı yerlerdeki vektör oklarını çizerim (Şek. 2.12). Elektrik alan $1/r^2$ şeklinde azaldığı için, orijinden uzaklaştıkça okların boyu kısalmır. Bu alanı temsil etmenin daha güzel bir yolu vardır: okları birleştirerek alan çizgileri oluşturmak (Şek. 2.13). Okların boyunu artık göremeyince, alan şiddeti bilgisini kaldırıp attığımızı sanabilirsiniz. Hayır, atmadım. Elektrik alanın şiddeti bu kez alan çizgilerinin yoğunluğuyla belirlenir. Gerçekten de, çizgilerin orijin civarında daha sık, orijinden uzaklaştıkça daha seyrek oluşu bunu doğruluyor.



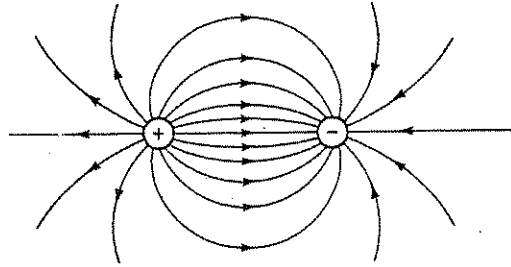
Şekil 2.12



Şekil 2.13

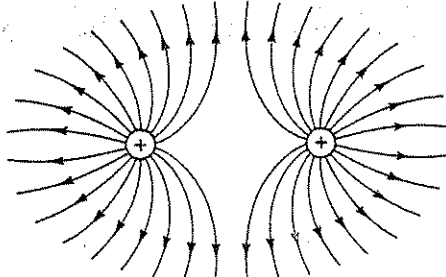
Alan çizgileri diyagramları daha karmaşık alanları gözönüne getirmekte büyük yarar sağlar. Elbette, ne kadar çok çizgi çizdiğiniz kolunuzun kuvvetine bağlı, ama alanı belirlemeye yetecek kadar çizgi çizmeli ve tutarlı olmalısınız. Örneğin, q yükünden 8 çizgi çıkardıysanız, $2q$ yüküne 16 çizgi ayırmalısınız. Alan çizgileri pozitif yüklerden başlar ve negatif yükler üzerinde, veya sonsuzda biter (Şek. 2.14). Ayrıca, alan çizgileri kesişemez (bu takdirde, kesişme noktasında iki farklı yönde elektrik alan olurdu!). Bu noktalara dikkat edildiğinde, basit yük dağılımları için alan çizgilerini oluşturmak kolay iştir. Önce, her yükün yakın çevresindeki çizgileri oluşturun; sonra, bunları uygun şekilde birleştirin, veya sonsuza uzatın (Şek. 2.15).

* Bu modelde alan şiddeti birim yüzeydeki çizgi sayısı ile orantılı olduğundan, bir yüzey



Şekil 2.14

Eşit ve zıt yükler



Şekil 2.15

Özdeş yükler

parçası üzerindeki \vec{E} alanının akısı (yani $\int \vec{E} \cdot d\vec{a}$), o yüzeyi kesen çizgilerin sayısı ile orantılıdır. (Skaler çarpım alan çizgilerine dik yüzeyi verir; bkz. Problem 1.32). Örneğin, orijindeki noktasal yük için, r yarıçaplı bir küre yüzeyinden geçen \vec{E} akısı şöyle olur:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} \right) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

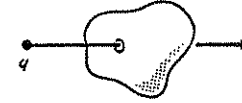
Burada yüzey elemanındaki r^2 çarpanı ile, elektrik alandaki $1/r^2$ çarpanının birbirini sadeleştirdiğine dikkat edin; böylece çarpım r uzaklığından bağımsız olmaktadır. Alan çizgileriyle düşünersek bu mantıklıdır: merkezi orijinde olan bir kürenin, yarıçapı ne olursa olsun, yüzeyini geçen çizgi sayısı aynıdır. Aslında yüzeyin küresel olması da gerekmez—yükü çevreleyen yüzeyin şekli ne olursa olsun, aynı sayıda alan çizgisini kesecektir. O halde, bir yükü çevreleyen kapalı yüzeyden geçen akı q/ϵ_0 olur.

Şimdi, orijindeki yük yerine, değişik konumlarda çok sayıda yük düşünelim. Toplanabilirlik ilkesi uyarınca, toplam alan herbir yükün alanları toplamı olur:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Buna göre, yüklerin tümünü kapsayan kapalı bir yüzeyden geçen akı şöyle olur:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^n \left(\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{a} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{\epsilon_0} \right)$$



Şekil 2.16

Öte yandan, bu yüzeyin dışında kalan yükün akıya katkısı sıfır olur, çünkü bunun alan çizgileri yüzeyin bir yerinden girip başka bir yerinden çıkacaktır (Şek. 2.16). O halde, kapalı bir yüzey için

$$\oint_{\text{yüzey}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{iç}}}{\epsilon_0} \quad (2.10)$$

olur. Burada $Q_{\text{iç}}$ yüzey içinde kalan yükler toplamıdır. Bu sonuç **Gauss yasası** olarak bilinir. Bu, Coulomb yasasında varolan bilgiden fazla birşey söylemiyor gibi görünüyorsa da, birazdan göreceğimiz gibi, uygulamada mucizeler yaratan bir sonuçtur. Dikkat edilirse bu sonuç Coulomb yasasının $1/r^2$ bağımlı oluşundan kaynaklanır; (2.9) denklemindeki sadeleşme olmasaydı, \vec{E} akısı seçilen yüzeyin yarıçapına da bağlı olacaktı. Böyle $1/r^2$ bağımlı diğer kuvvetlerin de, kendilerine göre "Gauss yasaları" vardır (burada, özellikle Newton'un evrensel çekim yasasını düşünüyorum) ve bulacağımız sonuçlar orada da geçerlidir.

Gauss yasası bu şekilde *integrall* bir denklemdir; sürekli yük dağılımlarında kullanmak amacıyla, onu kolayca diferansiyel şekle dönüştürebiliriz. Diverjans teoremini uygularsak

$$\oint_{\text{yüzey}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\text{hacim}} (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau$$

olur. $Q_{\text{iç}}$ yerine ρ yük yoğunluğunun integralini yazalım:

$$Q_{\text{iç}} = \int_{\text{hacim}} \rho d\tau$$

Böylece Gauss yasası

$$\int_{\text{hacim}} (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \int_{\text{hacim}} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau$$

olur. Bu ifadenin her hacim için doğru olması gerekir. Buna göre, integrandlar eşit olmalıdır:

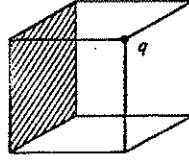
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.11)$$

(2.10) denkleminde aynı bilgiyi veren bu ifade **Gauss yasasının diferansiyel şekli** olarak bilinir. Diferansiyel şekli daha kısa olabilir, ancak integral ifade noktasal veya sürekli yük dağılımlarını birlikte verebildiği için daha kullanışlıdır.

Problem 2.9 Bir bölgede elektrik alan, küresel koordinatlarda $\vec{E} = kr^3 \hat{r}$ olarak veriliyor (k bir sabit).

(a) ρ yük yoğunluğunu bulun.

(b) Merkezi orijinde olan R yarıçaplı bir küre içindeki toplam yükü bulun. (Hesabı iki yoldan yapın.)



Şekil 2.17

Problem 2.10 Bir q yükü, Şek. 2.17'de gösterildiği gibi, bir kübenin köşesine konmuştur. Kübenin taralı yüzeyinden geçen akı (yani, $\int \vec{E} \cdot d\vec{a}$) ne olur?

2.2.2 \vec{E} 'nin Diverjansı

Şimdi, başladığımız yere dönüp \vec{E} 'nin diverjansını doğrudan (2.6) denkleminde hesaplayalım. Bu denklemi daha açık yazalım:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{tüm uzay}} \frac{\hat{R}}{R^2} \rho(\vec{r}') d\tau' \quad \vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' \quad (2.12)$$

(Bu integral yük dağılımının hacmi için yazılmıştı, ama tüm uzaya genişletebiliriz, çünkü diğer yerlerde zaten $\rho = 0$ olduğundan, integrale katkıda bulunmaz.) \vec{r} değişkenine bağımlılığın \vec{R} içinde olduğuna dikkat ederek diverjans alalım:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) \right] \rho(\vec{r}') d\tau'$$

Bu diverjans Bölüm 1'de hesaplanmış ve Dirac delta fonksiyonu bulunmuştur:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) = 4\pi\delta^3(\vec{R}) \quad (2.13)$$

Buna göre,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int 4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\tau' = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (2.14)$$

yani, Gauss yasasının diferansiyel ifadesi bulunur. Integral şeklini bulmak istersek, iki tarafın integralini alır ve diverjans teoremini uygularız:

$$\int_{\text{hacim}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau = \oint_{\text{yüzey}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{hacim}} \rho d\tau = \frac{Q_{\text{ic}}}{\epsilon_0}$$

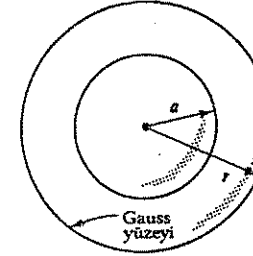
2.2.3 Gauss Yasası Uygulamaları

Teori geliştirmeye ara verip burada Gauss yasasının uygulamadaki gücünü size göstermek isterim. Yük dağılımında bir simetri varsa, elektrik alan bulmada en hızlı çözüm yöntemi Gauss yasasıdır. Bir örnek verelim.

Örnek 2.2: Yüzeyinde toplam q yükü düzgün dağılmış olan, a yarıçaplı kürenin dışındaki elektrik alanı bulun.

Şek. 2.18'de olduğu gibi, küre dışında r yarıçaplı hayali bir yüzey düşünün (buna "Gauss yüzeyi" denir). Bu yüzey üzerindeki elektrik alan için Gauss yasası yazılır:

$$\oint_{\text{yüzey}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{ic}}}{\epsilon_0}$$



Şekil 2.18

Burada $Q_{\text{ic}} = q$ kürenin toplam yüküdür. İlk bakışta işimizin zor olduğu sanılabilir; çünkü aradığımız \vec{E} alanı integralin içine gömülmüş durumdadır. Ancak, bu problemin simetrisi \vec{E} alanını integralin dışına almaya izin verir; çünkü (a) \vec{E} vektörü radyal yönde, yani $d\vec{a}$ yüzey elemanı vektörüyle aynı yönde olduğundan, skaler çarpımı kaldırır ve vektörlerin şiddetlerini yazabiliriz:

$$\oint_{\text{yüzey}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oint_{\text{yüzey}} |\vec{E}| da$$

(b) \vec{E} vektörünün şiddeti Gauss yüzeyi üzerinde her yerde aynı olduğundan, yüzey integrali dışına alınabilir:

$$\oint_{\text{yüzey}} |\vec{E}| da = |\vec{E}| \oint_{\text{yüzey}} da = |\vec{E}| 4\pi r^2$$

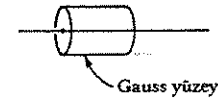
$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

veya

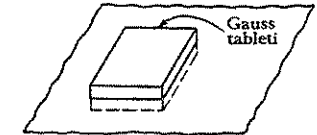
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Bu sonucun önemli bir özelliğine dikkat edin: Küre dışındaki elektrik alan, merkeze konulan noktasal bir q yükünün alanıyla aynı değerdedir.

Gauss yasası her zaman yararlı olmaz. Bu örnekte ρ yük yoğunluğu düzgün olmasaydı küresel simetri kalmazdı; veya, Gauss yüzeyini küresel seçmeseydim, elektrik alan yüzeyin her yerinde aynı şiddette olmazdı ve dolayısıyla, integralin dışına alamazdım. Gauss yasasının uygulamalarında simetri esastır. Bildiğim kadarıyla, üç türlü simetri için çözüm olabilir:



Şekil 2.19

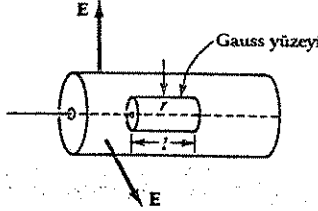


Şekil 2.20

1. **Küresel simetri.** Küresel bir Gauss yüzeyi alın.
2. **Silindirik simetri.** Eş eksenli silindirik bir Gauss yüzeyi alın (Şek. 2.19).
3. **Düzlem simetri.** Düzlemi iki yandan saran bir "Gauss tableti" alın (Şek. 2.20).

2 ve 3 no.lu durumlarda silindir veya düzlemin sonsuza uzanması gerekir; ancak, pratikte "uzun" silindirler veya "geniş" düzlemler için bulunan yaklaşık çözümler kenar bölgelerden uzakta çözüm olarak kullanılırlar.

Örnek 2.3 : Sonsuz uzunlukta bir silindir içindeki hacımsal yük yoğunluğu, eksenenden itibaren $\rho = kr$ şeklinde değişmektedir (k bir sabit). Silindir içindeki elektrik alanı bulun.



Şekil 2.21

Çözüm : Şek 2.21'deki gibi, silindire eş eksenli, l uzunluğunda ve r yarıçapında silindir şeklinde bir Gauss yüzeyi çizin. Bu yüzey için Gauss yasası

$$\oint_{\text{yüzey}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{ic}}}{\epsilon_0}$$

olur. İçerde kalan yükü hesaplamak için silindirik koordinatlarda integral alınır:

$$Q_{\text{ic}} = \int \rho d\tau = \int (kr')(r' dr' d\phi dz) = 2\pi kl \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2}{3}\pi klr^3$$

Burada, ϕ integrali $[0, 2\pi]$ ve z integrali $[0, l]$ aralığında alındı. Gauss yüzeyinin r yarıçapından ayırt etmek için integrasyon değişkenini üslü (r') yazdım.

Öte yandan, yük dağılımının simetrisine göre, \vec{E} vektörü eksenenden radyal doğrultuda ve dışa doğru olmalıdır. Gauss silindirinin yanal yüzeyinde elektrik alanın büyüklüğü değişmez. Buna göre

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int |\vec{E}| da = |\vec{E}| \int da = |\vec{E}| 2\pi rl$$

olur. (Silindirin taban yüzeylerinde, \vec{E} vektörü $d\vec{a}$ yüzey elemanına dik olduğundan, akıya bir katkı gelmez.)

$$|\vec{E}| 2\pi rl = \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{2}{3}\pi klr^3$$

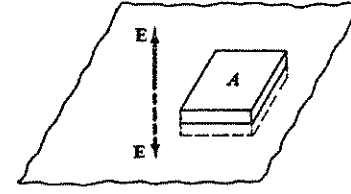
ve, sonuç bulunur:

$$\vec{E} = \frac{k}{3\epsilon_0} r^2 \hat{r}$$

Örnek 2.4 : Sonsuz bir düzlem üzerinde düzgün σ yüzey yük yoğunluğu vardır. Elektrik alanı bulun.

Çözüm : Bu düzlemi alt ve üstten eşit uzaklıkta saran bir "Gauss tableti" şeklinde bir yüzey çizin (Şek. 2.22). Bu yüzeye Gauss yasası uygulayalım:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{ic}}}{\epsilon_0}$$



Şekil 2.22

Tabletin taban yüzey alanı A ise, içinde kalan yük miktarı $Q_{\text{ic}} = \sigma A$ olur. Simetriye göre, \vec{E} vektörü daima yüzeyden dışa doğru (üst tarafta yukarı, alt tarafta aşağı yönde) olur. Buna göre, tabletin alt ve üst yüzeyinde akıya katkı

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2A |\vec{E}|$$

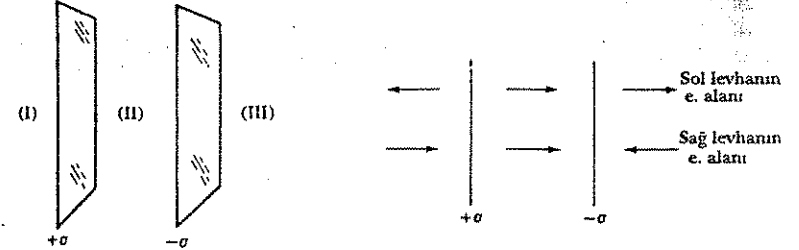
olup, tabletin yanal yüzeyinden katkı gelmez. Buradan

$$2A |\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A \quad \text{veya} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

bulunur. Burada \hat{n} yüzeyden dışa normal birim vektördür. Bu sonucu, Problem 2.6'da daha zahmetli olarak elde etmiştiniz.

Burada, sonsuz düzlemin elektrik alanının uzaklıktan bağımsız oluşu şaşırtıcı gelebilir. Hani nerede Coulomb yasasındaki $1/r^2$ gibi azalma? Bakın, bir düzlemden dışa doğru uzaklaştıkça "görüş alanınıza" giderek daha çok yük girer, ve daha önceki yüzey parçalarının azalan alan şiddetini dengeler. Kürenin elektrik alanı $1/r^2$ gibi, doğrusal telin alanı $1/r$ gibi azalır, ama düzlemin elektrik alanı azalmaz.

Gauss yasasının doğrudan uygulamaları küresel, silindirik ve düzlem simetriyle sınırlıdır. Ancak, böyle simetriye sahip cisimlerin birlikte bulunduğu karmaşık sistemleri de çözebiliriz. Örneğin, yüklü iki paralel silindir, veya sonsuz düzlem kenarındaki yüklü küre gibi. Bu durumda önce Gauss yasasıyla her bir cismin alanını bulur, sonra toplanabilirlik yasasını uyguluyoruz.



Şekil 2.23

Şekil 2.24

Örnek 2.5 : Birbirine paralel sonsuz iki düzlem üzerinde eşit ve zıt düzgün $\pm\sigma$ yüzey yükleri vardır (Şek. 2.23). Her üç bölgede elektrik alanı bulun.

Çözüm : Şek. 2.24'de görüldüğü gibi, soldaki pozitif yüklü düzlemin elektrik alanı $\sigma/2\epsilon_0$ olup, her iki tarafta bu düzlemden dışa doğrudur. Sağdaki negatif yüklü düzlemin $\sigma/2\epsilon_0$ büyüklükteki elektrik alanı ise, her iki tarafta bu düzleme doğrudur. (I) ve (III) no.lu

bölgelerde bu iki alan birbirini sıfırlar, ortada ise birbirine eklenir. *Sonuç:* Elektrik alan, düzlemler arasındaki bölgede σ/ϵ_0 , dış bölgelerde ise sıfırdır.

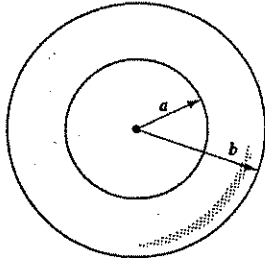
Problem 2.11 R yarıçaplı küresel bir kabuk yüzeyinde düzgün σ yük yoğunluğu vardır. Gauss yasası kullanarak, küre içinde ve dışında elektrik alanı bulun. Yanıtınızı Problem 2.7 ile karşılaştırın.

Problem 2.12 Hacmi içinde düzgün ρ yük yoğunluğu bulunan R yarıçaplı küre içinde elektrik alanı, Gauss yasasıyla bulun. Yanıtınızı Problem 2.8 ile karşılaştırın.

Problem 2.13 Üzerinde düzgün λ boyca yük yoğunluğu bulunan sonsuz doğrusal telden z uzaklıkta elektrik alanı bulun. Yanıtınızı Örnek 2.1 ile karşılaştırın.

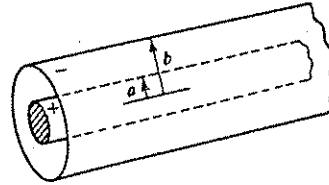
Problem 2.14 R yarıçaplı bir küre içinde hacim yük yoğunluğu $\rho = kr$ olarak değişmektedir (k bir sabit). Küre içinde elektrik alanı bulun. (Not: Bu yük yoğunluğu düzgün değildir; içteki yükü bulmak için integral almahsınız.)

Problem 2.15 Şek. 2.25'teki küresel kabukta, $a \leq r \leq b$ olan bölgede $\rho = k/r^2$ yük yoğunluğu bulunmaktadır. Her üç bölgede ($r < a$, $a < r < b$ ve $r > b$) elektrik alanı bulun. $|\vec{E}|$ nin r 'ye göre grafiğini çizin.

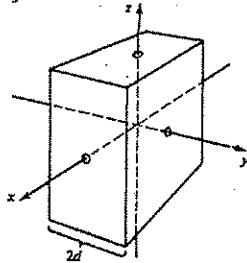


Şekil 2.25

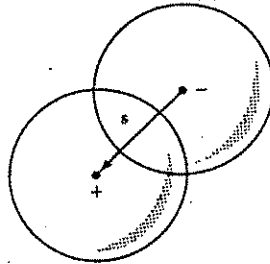
Problem 2.16 Uzun bir koaksiyal kablunun (Şek. 2.26) a yarıçaplı iç silindiri dolduran bölgede düzgün ρ hacimsel yük yoğunluğu, b yarıçaplı dış silindir üzerinde ise düzgün yüzey yük yoğunluğu vardır. Bu yüzey yükü negatif olup, kablunun toplam yükünü nötr kılacak değerdedir. Her üç bölgede ($r < a$, $a < r < b$ ve $r > b$) elektrik alanı bulun. $|\vec{E}|$ nin r 'ye göre grafiğini çizin.



Şekil 2.26



Şekil 2.27



Şekil 2.28

Problem 2.17 Kalınlığı $2d$ olan sonsuz düzlem içinde düzgün ρ hacimsel yük yoğunluğu vardır (Şek. 2.27). Merkezdeki bir noktadan y dik uzaklığına bağlı olarak elektrik alanı

bulun. ($+y$ yönünde olan elektrik alanı pozitif alın.)

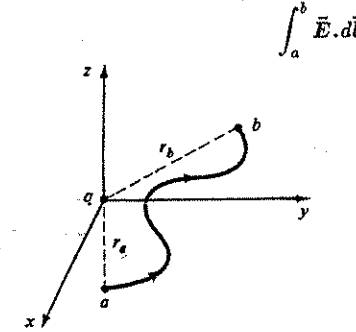
• **Problem 2.18** Aynı R yarıçaplı ve zıt işaretli $\pm\rho$ hacimsel yük yoğunluğuna sahip iki küre, birbirini kısmen örtecek şekilde konulmuştur (Şek. 2.28). Negatif kürenin merkezinden pozitif kürenin merkezine çizilen vektöre \vec{s} diyelim. Örtüşme bölgesinde elektrik alanın sabit olduğunu gösterin ve değerini bulun. (Yol gösterme: Problem 2.12'nin yanıtını kullanın.)

2.2.4 \vec{E} 'nin Rotasyoneli

Diverjanstan sonra \vec{E} 'nin rotasyonelini hesaplayalım. Kısım 2.2.1'de olduğu gibi, önce en basit durumdan, orijindeki noktasal bir yükün alanından yola çıkalım:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Şek. 2.12'deki alan çizgilerine bir göz atarsanız, bunun rotasyonelinin sıfır olacağını tahmin edebilirsiniz. Ama, burada matematik ispat gerekiyor. Bunun için, elektrik alanının bir a noktasından diğer bir b noktasına giden yol boyunca eğrisel integralini alalım (Şek. 2.29):



Şekil 2.29

Küresel koordinatlarda $d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}$ olduğundan

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

olur. Buna göre

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_a^b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right) \quad (2.15)$$

Burada r_a ve r_b , sırasıyla a ve b noktalarının orijinden uzaklıklarıdır.

Bu aşamada sonucun değeriyle ilgilenmiyorum; burada önemli olan nokta eğrisel integralin yoldan bağımsız oluşudur. Sonuç sadece uç noktalarının koordinatlarına bağlı çıkıyor. Bunun nereden kaynaklandığını görebiliyor musunuz? \vec{E} radyal yönde olduğu için, θ veya ϕ yönlerinde dolaşmak bedavaya geliyor. Bu yönlerdeki yer değiştirmeler $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ skaler çarpımına katkıda bulunmazlar. Şimdi, kapalı bir eğri boyunca integral (yani, $r_a = r_b$)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

(2.16)

olur. Stokes teoremini de uygularsak ispatı bitiririz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2.17)$$

Burada sadece orijindeki noktasal bir yük için rotasyonelin sıfır olduğunu gösterdim. Fakat, bu sonuçlarda orijinin nerede olduğuna dair bir işaret yoktur; yük nerede olursa olsun aynı sonuç bulunur. Öte yandan, çok sayıda yük varsa, toplanabilirlik ilkesi uyarınca

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

ve, her bir yükün elektrik alan rotasyoneli sıfır olacağından

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots) = (\vec{\nabla} \times \vec{E}_1) + (\vec{\nabla} \times \vec{E}_2) + \dots = 0$$

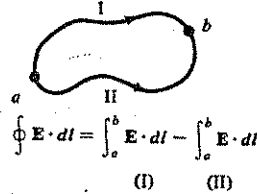
bulunur. O halde, (2.16) ve (2.17) denklemleri her statik yük dağılımı için geçerlidir.

Problem 2.19 Kısım 2.2.2'deki yöntemi kullanarak, $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ 'yi doğrudan (2.6) denklemiyle hesaplayın. Takılırsanız Problem 1.57'deki sonucu kullanın.

2.3 ELEKTRİK POTANSİYEL

2.3.1 Potansiyel Kavramına Giriş

\vec{E} elektrik alanı herhangi bir vektör değildir; rotasyoneli daima sıfır olan özel bir vektördür. Örneğin, $\vec{E} = y\hat{i}$ gibi bir elektrik alan hiçbir zaman olmaz; hiçbir yük dağılımı, konumları ne olursa olsun, böyle bir elektrik alan oluşturamaz. Bu kısımda elektrik alanın bu özel yapısını gözönüne alarak, bir vektör problemini (\vec{E} 'yi bulma) daha basit skaler bir probleme indirgeyeceğiz. Kısım 1.6.2'deki ilk teorem, rotasyoneli sıfır olan her vektörün başka bir skalerin gradyanı olarak yazılabileceğini bildirir. Şimdi, bu önermenin elektrostatik çerçevede ispatını yapacağız.



Şekil 2.30

Kapalı bir yol boyunca elektrik alanın eğrisel integrali sıfır olduğundan, a 'dan b 'ye alınan integral yoldan bağımsız olur. (Farklı iki yoldaki integraller farklı sonuç verseydi, Şek. 2.30'da gösterildiği gibi, bunlardan birinden gidiş ve diğerinden dönüş sonucu $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ olurdu.) Eğrisel integral sadece uç noktalarına bağlı olduğuna göre, şöyle bir fonksiyon tanımlayabiliriz:

$$V(P) \equiv - \int_O^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.18)$$

Burada O önceden kararlaştırdığımız bir referans noktasıdır; böylece V fonksiyonu sadece P noktasına bağlı olur. V fonksiyonuna elektrik potansiyel denir. Buna göre, a ve b

2.3. ELEKTRİK POTANSİYEL

noktaları arasındaki potansiyel farkı

$$V(b) - V(a) = - \int_O^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_O^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_O^b \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_a^O \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.19)$$

olur. Gradyanın temel teoremine göre

$$V(b) - V(a) = \int_a^b (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{l}$$

veya,

$$\int_a^b (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

olur. Bu sonuç her a, b noktaları için doğru olduğundan, integrandlar eşit olmalıdır.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (2.20)$$

(2.20) denklemi (2.18) denkleminin diferansiyel şeklidir; elektrik alanın skaler bir potansiyelin gradyanı olduğunu söyler. İspat etmek istediğimiz de buydu.

Burada, yoldan bağımsızlığın (veya $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ oluşunun) oynadığı kritik role dikkat edin. Eğer \vec{E} 'nin eğrisel integrali yola bağımlı olsaydı, o takdirde (2.18) denklemindeki V potansiyel tanımı saçma olurdu; çünkü gidilen yola bağlı olarak, aynı noktada değişik V(P) fonksiyonları olurdu. Bu arada, (2.20) denklemindeki eksi işaret sizi ürkütmesin; bu işaret tarihsel bir gelenek olarak böyle kabul edilmiştir.

Problem 2.20 Şu fonksiyonlardan biri elektrostatik alan olarak kabul edilemez. Hangisi?

(a) $\vec{E} = k[(xy)\hat{i} + (2yz)\hat{j} + (3xz)\hat{k}]$

(b) $\vec{E} = k[(y^2)\hat{i} + (2xy + z^2)\hat{j} + (2yz)\hat{k}]$

(Burada k uygun birimde bir sabittir.) Kabul edilebilir olanı için, orijini referans noktası alıp, potansiyeli bulun. Yanıtınızı $\vec{\nabla} V$ 'yi hesaplayarak kontrol edin. (Uyarı: İntegrali almak için belli bir yol seçeceksiniz. Hangisini seçerseniz sonuç değişmez, çünkü yoldan bağımsızdır. Ama hesabı kolay olan bir yol seçin.)

2.3.2 Potansiyelin Özellikleri

(i) Adı. "Potansiyel" sözcüğü talihsiz bir seçim olmuştur, çünkü potansiyel enerjiyi hatırlatır. Gerçi, Kısım 2.4'de göreceğimiz gibi, potansiyel ile potansiyel enerji arasında bir ilişki vardır; ancak bunlar birbirinden farklı kavramlardır. (Sırası gelmişken, üzerinde her yerde potansiyelin aynı değerde olduğu yüzeye eşpotansiyel yüzey denir.)

(ii) Potansiyel yaklaşımının avantajları. Eğer V potansiyelini biliyorsanız, $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ gradyanını alıp hemen elektrik alanı bulabilirsiniz. Düşünürseniz, bu olağanüstü bir kolaylıktır, çünkü \vec{E} bir vektör (üç bileşenli), V ise skaler (bir bileşenli) dir. Skaler bir fonksiyon, üç bileşenin taşıdığı bilgiye nasıl tek başına sahip olabilir? Yanıt: \vec{E} 'nin üç bileşeni gerçekte birbirinden bağımsız değildirler; başta söylediğimiz $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ koşulu vardır. Bunu açık yazarsak

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Potansiyel yaklaşımı alan vektörünün bu özel yapısından yararlanır, ve vektör bileşenleriyle uğraşmak yerine, problemi skaler bir fonksiyona indirir.

(iii) O referans noktası. Tanımda O referans noktası seçimi belirtilmediği için, potansiyel fonksiyonu tanımında bir keyfîlik vardır. Referans noktasını değiştirmek, potansiyele sabit bir sayı eklemeye eşdeğerdir:

$$V'(P) = - \int_{O'}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{O'}^O \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_O^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = K + V(P)$$

Burada K eski O referans noktasından yeni O' referans noktasına olan eğrisel integralin değeridir. V potansiyeline bir sabit eklemekle, iki nokta arasındaki potansiyel farkı değişmez, çünkü K sabitleri sadeleşir:

$$V'(b) - V'(a) = V(b) - V(a)$$

Benzer şekilde, referans noktası seçimi V 'nin gradyanını da etkilemez:

$$\vec{\nabla} V' = \vec{\nabla} V$$

çünkü, bir sabitin türevi sıfırdır. Bu nedenle, referans noktaları farklı seçilmiş tüm V potansiyelleri aynı \vec{E} elektrik alanına karşılık gelirler.

Potansiyelin mutlak değerinin fiziksel bir anlamı yoktur; referans noktasını değiştirip değerini ayarlayabiliriz. Bu tipki yerçekimi potansiyeline benzer: Size Ağrı Dağı'nın yüksekliğini sorsam, bana hemen deniz düzeyinden yüksekliğini söylersiniz, çünkü bu alışılmış ve gayet kullanışlı bir referans düzeyidir. Fakat, aramızda anlaşılabilir tüm yükseklikleri Çamlıca Tepesi'nden itibaren ölçmeyi kararlaştırabiliriz. Bulacağımız değerler deniz düzeyinden ölçtüğümüz değerlerden sabit bir miktar farkedecektir, ama fiziksel olarak değişen bir şey yoktur. Fiziksel olarak önemli olan, iki nokta arasındaki potansiyel farkıdır ve bu, referans noktanız ne olursa olsun, değişmez.

Bunu söyledikten sonra hemen ekleyelim: elektrostatikte de (deniz düzeyine benzer) doğal bir O referans noktası vardır: yüklerden sonsuz uzaklıkta bir nokta. Genelde, "sonsuzda potansiyeli sıfır seçeriz." Fakat sizi uyarmalıyım: bu seçimin yanlış olduğu özel bir durum vardır: yük dağılımının kendisi de sonsuza uzanıyorsa, bulacağınız potansiyel değeri ıraksak olur. Örneğin, yüklü düzlemin elektrik alanını $\sigma/2\epsilon_0$ bulmuştuk; referans noktasını $O = \infty$ almış olsaydık, (2.18) denkleminde göre, düzlemde z uzaklıkta bir noktada

$$V(z) = - \int_{\infty}^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z - \infty)$$

olurdu. Çare, başka bir referans noktası (bu problemde $z = 0$) seçmektir. Dikkat ederseniz, sorun bu tür "ders kitabı" türünde problemlerde ortaya çıkar; "gerçek hayatta" sonsuza uzanan yük dağılımı yoktur ve referans noktası daima sonsuzda seçilebilir.

(iv) Potansiyel toplanabilirlik kuralına uyar. Elektromagnetik teoride toplanabilirlik kuralı bir Q test yüküne etkiyen kuvvet için tanımlanmıştır. Buna göre, Q yükü üzerindeki toplam kuvvet, her bir yükün yalnız başına uyguladığı kuvvetler toplamı olur:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

Bu ifadeyi Q 'ye bölersek, elektrik alanının da toplanabilirlik kuralına uyduğu görülür:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

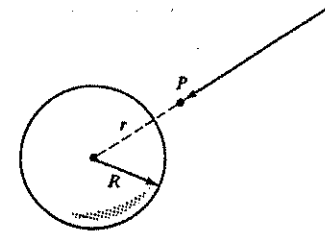
Ortak bir referans noktasından integral alındığında, potansiyelin de bu kurala uyduğu anlaşılır:

$$V = V_1 + V_2 + \dots$$

Açıkça ifade edersek, bir noktadaki potansiyel, diğer yüklerin o noktada yalnız başlarına oluşturdukları potansiyeller toplamıdır. Ama bu kez, vektörel değil, bildiğimiz toplama sözkonusudur ve daha kolaylık sağlar.

(v) Potansiyel birimleri. Bu kitapta kullanılan MKS sisteminde kuvvet birimi newton (N), yük birimi coulomb (C) olduğundan, elektrik alan birimi newton/coulomb (N/C) olur. Buna göre, potansiyel birimi newton×metre/coulomb, veya joule/coulomb (J/C) olur. Bir joule/coulomb'a volt denir.

Örnek 2.6 : Yüzeyinde toplam q yükü düzgün dağılmış R yarıçaplı küresel bir kabuk (Şek. 2.31) içinde ve dışında potansiyeli bulun. Referans noktasını sonsuzda alın.



Şekil 2.31

Çözüm : Gauss yasasına göre, küre dışında elektrik alan

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

olur; burada q yüzeydeki toplam yüküdür. Küre içinde elektrik alan sıfır olur. Şimdi, küre dışında bir nokta için ($r > R$)

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \Big|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (r > R)$$

Küre içinde ($r < R$) potansiyeli bulmak için, integrali iki parçaya alırız:

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{q}{r'^2} dr' - \int_R^r (0) dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \Big|_{\infty}^R + 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad (r < R)$$

Dikkat ederseniz, küre kabuğu içinde elektrik alan sıfır olduğu halde, potansiyel sıfır değildir. İçerde potansiyelin sabit oluşu $\vec{\nabla} V = 0$ olmasını sağlar, önemli olan da budur.

Bu tür problemlerde daima referans noktasından yola çıkmamız. Sadece küre içindeki duruma bakarak potansiyeli bulabileceğinizi sanmayın; içerdeki potansiyel dışarda olup bitenle yakından ilgilidir. Örneğin, yarıçapı $R' > R$ olan eşmerkezli ikinci bir yüklü küre koymuş olsaydık, birinci küre içindeki elektrik alan hala sıfır olduğu halde, potansiyel değişirdi. Gauss yasası bir bölgenin dışındaki yüklerin içerdeki elektrik alanı etkilemeyeceğini söyler; fakat, referans noktası sonsuzda ise, potansiyel için böyle bir yasa yoktur.

Problem 2.21 Hacmi içinde toplam q yükü düzgün dağılmış bir kürenin içinde ve dışında potansiyeli bulun. Referans noktasını sonsuzda alın. Her bölgede V 'nin gradyanını hesaplayıp, elektrik alanı doğru verdiğini sağlayın.

Problem 2.22 Düzgün λ boyca yük yoğunluğu taşıyan sonsuz doğrusal telden r uzaklıkta potansiyeli hesaplayın. Potansiyelin gradyanını alıp, elektrik alanı doğru verdiğini kontrol edin.

Problem 2.23 Problem 2.15'teki iki küresel kabuğun merkezindeki potansiyeli bulun. Referans noktasını sonsuzda alın.

Problem 2.24 Problem 2.16'daki koaksiyal kablo için, eksen ile dış silindiri arasındaki potansiyel farkını bulun. (Not: (2.19) denklemini kullanırsanız, referans noktasını belirtme-nize gerek yoktur.)

Problem 2.25 Merkezci olan her kuvvet için potansiyel yazılabileceğini gösterin. (Merkez-cil kuvvet, sadece merkezden r uzaklığına bağlı ve radyal yönde bir kuvvettir: $\vec{F} = f(r)\hat{r}$.)

2.3.3 Poisson ve Laplace Denklemleri

Kısım 2.3.1'de elektrik alanın skaler bir potansiyelin gradyanı olarak yazılabileceğini gördük:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Şimdi, şu soruya bakalım: Elektrik alanın temel denklemleri, yani

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ve} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

denklemleri V potansiyeli cinsinden nasıl ifade edilirler? Bu denklemlerde $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ alır ve gradyanın diverjansının Laplasyen olduğunu hatırlarsak, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = -\nabla^2 V$ olur. O halde, birinci denklem yani Gauss yasası şöyle olur:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.21)$$

Bu, Poisson denklemi olarak bilinir. Yük bulunmayan bölgelerde $\rho = 0$ olacağından, Poisson denklemi Laplace denklemine indirgenir:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.22)$$

Bu iki kısmi diferansiyel denklem Bölüm 3'te ayrıntılı olarak incelenecektir.

Gauss yasası böyle; rotasyonel için ne yazılabilir? Bakalım:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}V) = 0$$

Ama bu yeni bir şey değil, gradyanın rotasyoneli zaten özdeş olarak sıfırdır. Buna şaşırmanın, çünkü rotasyonelin sıfır oluşundan yola çıkarak potansiyeli tanımlamıştık. Yani, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ oluşu $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ yazılmasını sağlar; veya tersine, $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ oluşu $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ olmasını garantiler. Skaler V potansiyelini bulmak için bir diferansiyel denklem yeterlidir; \vec{E} için iki denkleme gerek vardı, diverjans ve rotasyonel.

2.3. ELEKTRİK POTANSİYEL

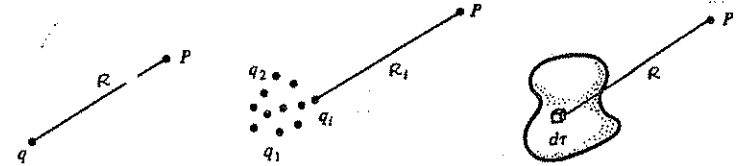
2.3.4 Yerel Bir Yük Dağılımının Potansiyeli

Yukarda V potansiyelini \vec{E} cinsinden tanımladık. Oysa pratikte bulunması zor olan \vec{E} dir. Zaten potansiyel tanımındaki amaç, önce kolay olan skaler V potansiyelini bulmak, sonra \vec{E} 'yi hesaplamaktır. Tipik bir problemde yüklerin nasıl dağıldığı (yani ρ) verilir ve V aranır. V ile ρ arasındaki ilişki Poisson denklemdir, ama bu denklem aradığımız yönde değildir; V 'yi bilmiş olsaydık, ρ dağılımını verirdi. Biz ρ dağılımından V potansiyelini bulmak istiyoruz. O halde, yapılacak iş Poisson denklemini "tersine çevirmektir". Bu kısımda bu işi yapacağız, ama yine önce orijindeki noktasal yüklerle başlayalım.

Referans noktasını sonsuzda alırsak, orijindeki noktasal q yükünün potansiyeli

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

olur. Referans noktasının sonsuzda oluşunun sonucu sadeleştirdiğine dikkat edin. Ayrıca, V nin tanımındaki eksi işareti, işte bu pozitif yükün potansiyelini pozitif kılmak için seçilmiştir. Bunu hatırla tutmak kolaydır: pozitif yüklerin civarında pozitif potansiyel "tepelere", negatif yüklerin civarında da negatif potansiyel "vadileri" oluşur, elektrik alan da tepelerden vadilere doğru "bayır aşağı yönde" olur.



Şekil 2.32

q noktasal yükü herhangi bir konumda ise

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

olur; burada yine \vec{R} koordinatı, P noktasının q yükünden itibaren ölçülen konumudur (Şek. 2.32). Toplanabilirlik ilkesi uyarınca, çok sayıda yükün potansiyeli

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i}$$

veya, sürekli bir yük dağılımının potansiyeli

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} d\tau \quad (2.23)$$

olur. ρ cinsinden V 'yi vermesini istediğimiz aranan denklem budur. Sizi, bu denklemi, elektrik alanı ρ cinsinden veren (2.6) denklemiyle karşılaştırmaya davet ediyorum:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R}}{R^2} \rho d\tau \quad (2.6)$$

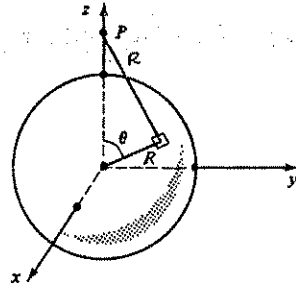
Potansiyel ifadesinin ne kadar daha sade olduğunu görüyorsunuz, bileşenlerle veya \vec{R} birim vektörüyle boğuşma derdi yok. Sıra gelmişken, doğrusal ve yüzeyel yük yoğunlukları için

potansiyel ifadelerini de yazalım:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{R} dl \quad \text{ve} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{R} da$$

Ama uyarıyorum, bu kısımdaki sonuçlar referans noktasının sonsuzda seçilmiş olmasına bağlıdır. Bunu (2.24) denkleminde göremezsiniz; ama o sonuca, orijindeki noktasal yükün potansiyelini $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ olarak geldik ve bu ifade $O = \infty$ için geçerlidir. (2.24) denklemini, sonsuza uzanan bir yük dağılımına uygularsanız integral ıraksak olur.

Örnek 2.7: Yüzeyinde düzgün σ yük yoğunluğu bulunan R yarıçaplı kürenin potansiyelini bulun (Şek. 2.33).



Şekil 2.33

Çözüm : Bu soru Örnek 2.6'da çözdüğümüz problemin aynıdır, bu kez (2.24) denklemini kullanacağız. Yüzey yük yoğunluğu için bu denklem

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{R} da$$

olur. Yük dağılımı simetrik olduğundan, P noktasını z -ekseni üzerinde almak birşey kaybettirmez. Kosinüs teoremini kullanarak R uzaklığını θ açısı cinsinden ifade edelim:

$$R^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$$

Küre üzerinde yüzey elemanı $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ alınırsa

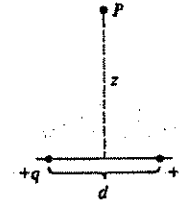
$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 V(r) &= \sigma \int \frac{R^2 \sin \theta d\theta d\phi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} = 2\pi R^2 \sigma \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} \\ &= 2\pi R^2 \sigma \left(\frac{1}{Rr} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta} \right) \Big|_0^\pi = \frac{2\pi R\sigma}{r} \left[\sqrt{(R+r)^2} - \sqrt{(R-r)^2} \right] \end{aligned}$$

Bu noktada dikkatli olup pozitif kökü almak gerekir. Küre dışında $r > R$ olduğundan, $\sqrt{(R-r)^2} = r - R$ olur; küre içinde ise $\sqrt{(R-r)^2} = R - r$ alınmalıdır. Ayrıca, küre üzerindeki toplam yük $q = 4\pi R^2 \sigma$ oluşturulursa, sonuç bulunur:

$$V = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 r} \left[(R+r) - (r-R) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (\text{dışarda})$$

$$V = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 r} \left[(R+r) - (R-r) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad (\text{içerde})$$

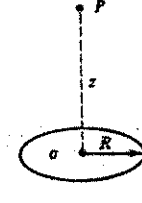
Problem 2.26 Şek. 2.34'deki yük dağılımlarının P noktasında potansiyellerini (2.24) denkleminde (veya, noktasal ve eğrisel yük dağılımları için uygun formüllerle) hesaplayın. Her durum için $\vec{E} = -\nabla V$ 'yi hesaplayın ve Problem 2.2a, Örnek 2.1 ve Problem 2.6 sonuçlarıyla karşılaştırın. Şek. 2.34a'nın sağındaki yükü $-q$ yaparsak P noktasında potansiyel ne olur? Bu durumda nasıl bir elektrik alan beklersiniz? Yanıtınızı Problem 2.2b ile karşılaştırın ve arada fark varsa açıklayın.



(a) İki noktasal yük



(b) Düzgün boyca yük



(c) Düzgün yüzey yükü

Şekil 2.34

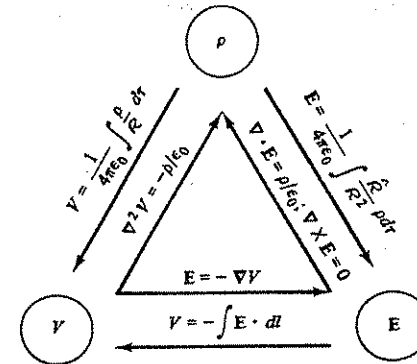
Problem 2.27 Konik bir yüzey (boş dondurma külahı) üzerinde düzgün σ yük yoğunluğu vardır. Koni yüksekliği ve yarıçapı eşit a değerindedir. Tepe noktası (P) ve taban merkezi (Q) arasındaki potansiyel farkını hesaplayın.

Problem 2.28 Hacmi içinde düzgün ρ yük yoğunluğu bulunan silindirin merkezinden dik z uzaklıkta potansiyeli hesaplayın. Silindirin uzunluğu L ve yarıçapı R dir. Yanıtınızı kullanarak bu noktada elektrik alanı hesaplayın. ($z > L/2$ olduğunu varsayın.)

Problem 2.29 Hacmi içinde toplam q yükü düzgün dağılmış olan R yarıçaplı küre içinde potansiyeli hesaplayın. Sonucu problem 2.21 ile karşılaştırın.

Problem 2.30 (2.24) denkleminin Poisson denklemini sağladığını gösterin. (Laplasyeni ve (1.82) denklemini uygulayın.)

2.3.5 Özet; Elektrostatik Sınır Koşulları

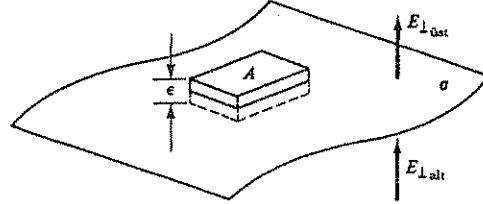


Şekil 2.35

Tipik bir elektrostatik problemde ρ yük dağılımı verilir ve bunun oluşturduğu \vec{E} elektrik alanı istenir. Problemin simetrisi olmadığından Gauss yasasıyla çözüm bulamıyorsanız, en

akıllı yol önce potansiyeli hesaplamaktır. O halde, elektrostatikte üç temel büyüklük vardır: ρ , \vec{E} ve V . Bu bölümde herbiri arasındaki ilişkileri elde ettik. Bu formülleri Şek. 2.35'teki diyagramda özetledim. Bu noktaya iki deneysel gözlemle geldik: (1) tüm elektromagnetik kuvvetler için geçerli olan toplanabilirlik kuralı, ve (2) Elektrostatik temel olan Coulomb yasası. Herşey bu ikisinden çıkarıldı.

Şekil 2.36



Örnek 2.4 ve 2.5, veya Problem 2.7, 2.11 ve 2.16'yı çözerken belki dikkat etmişsinizdir: bir σ yüzey yükünün bir tarafından diğerine geçildiğinde, elektrik alanında bir süreksizlik oluşur. Böyle bir sınırda \vec{E} 'deki değişme miktarını kolayca hesaplayabiliriz. Şek. 2.36'da olduğu gibi, yüklü yüzeyi her iki taraftan saran sonsuz küçük bir "Gauss tableti" gözönüne alalım. Bu kapalı yüzeye Gauss yasasını uygulayalım:

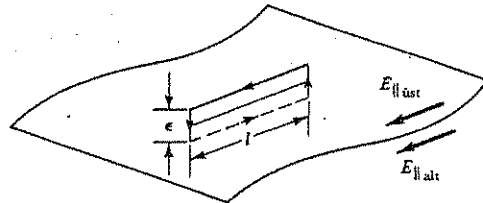
$$\oint_{\text{yüzey}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{is}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Burada A tabletin taban alanıdır. Tablet ϵ kalınlığı sıfıra giderken yan yüzey akıya katkıda bulunmaz; sadece alt ve üst yüzeylerden katkı olur. Buna göre,

$$E_{\perp \text{üst}} - E_{\perp \text{alt}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.25)$$

Burada $E_{\perp \text{üst}}$ yüzeyin hemen üzerinde ve yüzeye dik \vec{E} bileşeni, ve $E_{\perp \text{alt}}$ ise yüzeyin altındaki dik bileşendir. Tutarlı olmak için her iki bileşenin pozitif yönünü "yukarı" seçtik. **Sonuç:** Bir sınırda \vec{E} 'nin normal bileşeni σ/ϵ_0 kadar süreksizdir. Özel olarak, yüzey yükü yoksa, örneğin, hacımsal yükü olan bir kürenin yüzeyinde, E_{\perp} sürekli olur.

Şekil 2.37



Buna karşılık, \vec{E} 'nin teğetsel bileşeni her zaman süreklidir. Şek. 2.37'de gösterilen küçük dikdörtgen kapalı eğrisi üzerinde \vec{E} 'nin integralini alalım:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$\epsilon \rightarrow 0$ limitinde yan kenarlardan katkı gelmez, alt ve üst kenarlardaki katıklar ise $E_{\parallel \text{üst}} l - E_{\parallel \text{alt}} l$ olacağından,

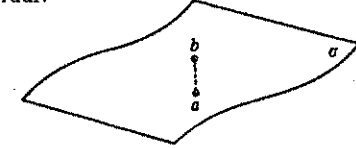
$$E_{\parallel \text{üst}} = E_{\parallel \text{alt}} \quad (2.26)$$

Burada E_{\parallel} yüzeye paralel bileşeni gösterir. (2.25) ve (2.26) denklemleri \vec{E} vektörünün sınır koşulları olup, istenirse her ikisi bir denklemde toplanabilir:

$$\vec{E}_{\text{üst}} - \vec{E}_{\text{alt}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (2.27)$$

Burada \hat{n} yüzeye dik birim vektördür.

Şekil 2.38



Potansiyel ise sınırda süreklidir. Şek. 2.38'deki iki nokta arasındaki potansiyel farkını yazalım:

$$V_{\text{üst}} - V_{\text{alt}} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

ab yol uzunluğun sıfıra giderken integral de sıfıra gider. Buna göre

$$V_{\text{üst}} = V_{\text{alt}} \quad (2.28)$$

olur. Fakat, V 'nin gradyanı süreksiz olur. $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ olduğundan, (2.27) denkleminde göre

$$\vec{\nabla}V_{\text{üst}} - \vec{\nabla}V_{\text{alt}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (2.29)$$

olur. Bu ifadenin \hat{n} ile skaler çarpımı alınır

$$\frac{\partial V_{\text{üst}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{alt}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.30)$$

bulunur. Burada yüzeye normal türev (yani, V 'nin yüzeye dik türevi)

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \vec{\nabla}V \cdot \hat{n} \quad (2.31)$$

olarak tanımlanır. \vec{E} ve V için bulduğumuz bu sınır koşullarının, düzlem veya eğri, yüklü veya yüksüz, her yüzey için geçerli olduğunu unutmayalım. Bu koşullar doğrudan Gauss yasası ve $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ olduğundan kaynaklanırlar.

Problem 2.31 (a) Örnek 2.4, 2.5 ve Problem 2.11 sonuçlarının (2.26) denklemindeki sınır koşulunu sağladıklarını gösterin.

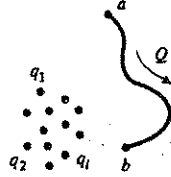
(b) Gauss yasasını kullanarak, yüzeyinde σ yük yoğunluğu bulunan, içi boş sonsuz silindirin içinde ve dışında elektrik alanı bulun. Yanıtınızın (2.27) sınır koşulunu sağladığını gösterin.

(c) Örnek 2.7 'deki sonucun (2.28) ve (2.30) koşullarını sağladığını gösterin.

2.4 İŞ VE ELEKTROSTATİK ENERJİ

2.4.1 Bir Yük Üzerinde Yapılan İş

Statik bir yük dağılımı bulunan bir bölgede, bir Q test yükünü, Şek. 2.39'da olduğu gibi, a noktasından b noktasına yer değiştirmek istiyoruz. Soru: Ne kadar iş yapmamız gerekir? Yol boyunca Q yüküne etkiyen elektriksel kuvvet $\vec{F} = Q\vec{E}$ olur. Bizim uygulayacağımız kuvvet buna eşit ve zıt, yani $-Q\vec{E}$ olmalıdır. Buna göre, bizim yaptığımız toplam iş



Şekil 2.39

$$W = \int_a^b (-\vec{F}) \cdot d\vec{l} = -Q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q[V(b) - V(a)]$$

olur. Sonucun yoldan bağımsız oluşuna dikkat edin; mekanikte buna "korunumlu kuvvet" denir. Q ile böldüğümüzde

$$V(b) - V(a) = \frac{W}{Q} \quad (2.32)$$

Veya, a, b noktaları arasındaki potansiyel farkı, birim yükü a 'dan b 'ye götürmek için yapılan işe eşittir. Özel olarak, Q yükünü sonsuzdan alıp P noktasına getirirseniz, yapmanız gereken iş

$$W = Q[V(P) - V(\infty)]$$

olup, referans noktası sonsuzda seçilmişse tek terim kalır:

$$W = QV(P) \quad (2.33)$$

2.4.2 Noktasal Bir Yük Dağılımının Enerjisi

Bir noktasal yük grubunu bir araya getirmek için ne kadar iş gerekir? Bunu öğrenmek için, yükleri birer birer sonsuzdan getirelim (Şek. 2.40). Birinci yükü (q_1), ortamda henüz bir elektrik alan olmadığından, hiç iş yapmadan getiririz. Sonra q_2 yükünü getirelim. (2.33) formülüne göre, bunun için $q_2 V_1(P_2)$ kadar bir iş gerekir; burada q_1 yükünden kaynaklanan potansiyeli V_1 ile, ve q_2 yükünün konumunu P_2 ile gösteriyoruz. Noktasal q_1 yükünün potansiyelini açık yazarsak, q_2 üzerinde yapılan iş

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{R_{12}} \right)$$

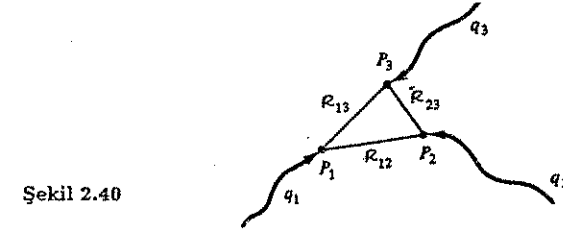
olur; burada R_{12} , q_1 ve q_2 arasındaki son uzaklıktır. Daha sonra q_3 yükünü getirdiğimizde gerekli iş $q_3 V_{1,2}(P_3)$ olup, burada q_1 ve q_2 yüklerinin potansiyelini $V_{1,2}$ ile gösteriyoruz. Bunu da açık yazarsak, q_3 üzerindeki iş

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{R_{13}} + \frac{q_2}{R_{23}} \right)$$

olur. Benzer şekilde, q_4 üzerinde yapılan işi yazalım:

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{R_{14}} + \frac{q_2}{R_{24}} + \frac{q_3}{R_{34}} \right)$$

2.4. İŞ VE ELEKTROSTATİK ENERJİ



Şekil 2.40

O halde, ilk dört yükü getirmek için yapılan toplam iş şöyle olur:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{R_{12}} + \frac{q_1 q_3}{R_{13}} + \frac{q_1 q_4}{R_{14}} + \frac{q_2 q_3}{R_{23}} + \frac{q_2 q_4}{R_{24}} + \frac{q_3 q_4}{R_{34}} \right)$$

Genel kuralı görebiliyor musunuz? Her yük çiftinin çarpımını alıp aralarındaki uzaklıkla bölün ve toplayın:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{q_i q_j}{R_{ij}} \quad (2.34)$$

Bu ifadede $j > i$ kısıtlaması aynı yük çiftini iki kez saymamak içindir. Aynı işi şöyle de yapabiliriz: Her çifti bilerek iki kez sayar ve sonra ikiye böleriz:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{R_{ij}} \quad (2.35)$$

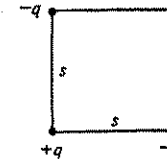
Ama yine $i = j$ olan terimleri katmamalıyız. Bu son ifadenin yarısı; iki toplamın hangi sırada alınacağından bağımsız olmasıdır. Şimdi, bu ifadeden bir q_i çarpanını açığa alalım:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{j \neq i}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} q_j \right)$$

Parantez içindeki ifade P_i noktasında, diğer tüm yüklerin potansiyelidir. O halde, şöyle yazabiliriz:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(P_i) \quad (2.36)$$

Yük topluluğunu oluşturmak için gerekli enerji budur. Veya, bu yükleri ayırıp herbirini sonsuza gönderdiğinizde elinize bu miktar enerji geçer. Bu ikisinin arasındaki zamanda ise, bu enerji yük dağılımında depolanmış olur. (Daha önce sözettiğim gibi, burada "potansiyel enerji" terimini kullanmaktan kaçınıyorum.)



Şekil 2.41

Problem 2.32 (a) Kenar uzunluğu s olan bir karenin üç köşesine yükler konmuştur (Şek. 2.41). Sonsuzdaki bir $+q$ yükünü dördüncü köşeye getirmek için gerekli iş ne kadardır? Dört yüklü sistemin tümünü oluşturmak için ne kadar enerji gerekir?

2.4.3 Sürekli Bir Yük Dağılımının Enerjisi

Hacimsal bir ρ yük dağılımı için yukardaki (2.36) denklemi kolayca uyarlanabilir:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau \quad (2.37)$$

Eğrisel ve yüzeyel yük dağılımları için integral ifadeler, sırasıyla $\int \lambda V dl$ ve $\int \sigma V da$ olur.

(2.37) denklemini, ρ ve V 'yi eleyip, sadece \vec{E} cinsinden yazabilmek mümkündür. Önce, Gauss yasasının diferansiyel şekli kullanılıp ρ elenir:

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad \longrightarrow \quad W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V d\tau$$

Vektörel türevlerdeki 5. çarpım kuralını hatırlayın:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} V) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} V)$$

Öte yandan, $\vec{\nabla} V = -\vec{E}$ olduğundan

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} V) d\tau + \int E^2 d\tau \right)$$

Sonunda, birinci terime diverjans teoremi uygulayalım:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_{\text{yüzey}} V \vec{E} \cdot d\vec{a} + \int_{\text{hacim}} E^2 d\tau \right) \quad (2.38)$$

Burada hangi hacimde integrali alıyoruz ve bunu saran yüzey hangisidir? Tekrar başladığımız (2.37) denkleminde dönelim. Oradaki integralin tüm yük dağılımının bulunduğu hacim üzerinden olacağı açıktır. Ama, *daha büyük* bir hacme genişletmenin bir zararı yoktur; eklenen bölgelerde $\rho = 0$ olduğundan integrale bir katkıda bulunmaz. Şimdi bunu unutmayıp (2.38) denkleminde dönelim. Buradaki hacmi tüm yüklerin bulunduğu bölgenin dışına genişletirsek ne olur? Elbette E^2 'li integral giderek büyür, çünkü integrandı pozitif; bu durumda, toplamın sabit kalması için, diğer integralin azalması gerekir. Gerçekten de, yüzey elemanı r^2 olarak artarken, E alanı $1/r^2$ oranında ve V potansiyeli $1/r$ oranında azalır. O halde, yüzey integralinin yaklaşık $1/r$ oranında azalacağını söyleyebiliriz. Lütfen şunu unutmayın: (2.38) formülünde (tüm yükleri kapsayan minimum hacimden büyük olmak koşuluyla) hangi hacmi seçerseniz seçin, W enerjisini doğru bulursunuz. Fakat hacim genişledikçe yüzey integrali azalır. Özel olarak, neden *tüm* uzayı seçmeyelim? Bu durumda yüzey integrali sıfır olur ve sonuç bulunur:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{tüm uzay}} E^2 d\tau \quad (2.39)$$

Örnek 2.8 : R yarıçaplı bir küre yüzeyinde toplam q yükü düzgün dağılmıştır. Kürenin enerjisini bulun.

Çözüm 1: (2.37) denkleminin yüzeyel yük için ifadesini yazalım:

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma V da$$

2.4. İŞ VE ELEKTROSTATİK ENERJİ

Küre yüzeyindeki potansiyel $q/(4\pi\epsilon_0 R)$ olup sabittir ve integral dışına alınabilir. Sonuç hemen bulunur:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \int \sigma da = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \underbrace{\sigma (4\pi R^2)}_q = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}$$

Çözüm 2: Küre içinde $\vec{E} = 0$ olur. Dışarda ise

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad \longrightarrow \quad E^2 = \frac{q^2/r^4}{(4\pi\epsilon_0)^2}$$

olur. Bu kez, (2.39) denklemini kullanarak sonucu buluruz:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{\text{dışarda}} \left(\frac{q^2}{r^4} \right) (r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}$$

Problem 2.33 R yarıçaplı küre hacmi içinde toplam q yükü düzgün dağılmıştır. Kürenin enerjisini üç farklı yoldan hesaplayın:

- (2.37) formülünü kullanın. [Potansiyeli Problem 2.21'de buldunuz.]
- (2.39) formülünü kullanın. (Integrali *tüm* uzayda almayı unutmayın.)
- (2.38) denklemini kullanın. a yarıçaplı küresel bir yüzey seçin. Sonuçta $a \rightarrow \infty$ alındığında ne olduğunu görün.

Problem 2.34 Düzgün yüklü bir kürenin enerjisini bulmak için dördüncü bir yol daha: Küreyi kabuk kabuk oluşturun; yani sonsuzdan dq yükü getirip bunu yüzeye yayın. Bu sırada yarıçap da artacaktır. Yarıçapı dr kadar artırmak için gerekli dW enerjisi ne kadardır? Bu ifadenin integralini alarak yarıçapı R ve toplam yükü q olan kürenin enerjisini bulun. Yanıtınızı Problem 2.33 ile karşılaştırın.

2.4.4 Elektrostatik Enerjinin Özellikleri

(i) Enerjide bir "tutarsızlık". (2.39) formülü ($\int E^2 d\tau$), E^2 integrandından dolayı, statik bir yük dağılımının enerjisinin daima pozitif olacağını söyler. Öte yandan, bunun kaynaklandığı (2.36) formülü $[\sum q_i V(P_i)]$ pozitif veya negatif sonuç verebilir. Örneğin, aralarında r uzaklığı bulunan eşit ve zıt iki yükün enerjisi $-q^2/(4\pi\epsilon_0)$ olur. Yanlışlık nerededir? Hangi formül doğrudur?

Yanıt *her iki* formülün de doğru olduğudur, ancak farklı durumlara karşılık gelirler. (2.36) formülü noktasal yükleri *oluşturmak* için gerekli enerjiyi içermez; sonsuzda zaten var olan yükleri bir araya getirmek için gerekli enerjiyi verir. Bu akıllıca bir seçimdir; zira (2.39) formülüyle noktasal bir yükün enerjisini hesaplasak sonsuz buluruz:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int \left(\frac{q^2}{r^4} \right) (r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr = \infty$$

(2.39) formülü daha *genel* olup bir yük dağılımındaki *toplam* enerjiyi verir. Ama (2.36) formülü noktasal yükler için daha uygundur, çünkü noktasal yüklerin kendilerini oluşturmak için gerekli enerji bizi pek ilgilendirmez. Noktasal yükler bize *hazır* verilmiştir, onları parçalamak için gerekli enerjinin ne olduğu akademik bir sorudur. Zaten, noktasal yükün öz

enerjisinin sonsuz oluşu, elektromagnetik teoride (hatta kuantum elektrodinamiği teorisinde de) süregelen bir ayıptır. Bu soruna Bölüm 9'da tekrar döneceğiz.

Peki ama, bu gelişki ispatın neresinden kaynaklandı? Çelişki (2.36) ile (2.37) denklemi arasında girdi: (2.36) denklemindeki $V_i(P)$ ortamda, q_i dışındaki diğer yüklerin potansiyelidir; oysa (2.37) denklemindeki $V(P)$ ortamdaki tüm yüklerin potansiyelidir. Sürekli yük dağılımı için bu farkın önemi yoktur, çünkü hesaplanan P noktasındaki yük miktarı sonsuz küçük ve potansiyele katkısı sıfırdır.

(ii) Enerji nerede depolanmıştır? (2.37) ve (2.39) formülleri aynı şeyi iki farklı yoldan hesaplar. Birincisinde yük dağılımı üzerinden, ikincisinde ise elektrik alan üzerinden integral alınır. Örneğin, küresel kabuk hesabında (Örnek 2.8) yük yüzeyde toplanmışken, elektrik alan küre dışındaki tüm uzaya yayılmıştır. Peki, enerji nerededir? (2.39) formülüne göre elektrik alanda mı, yoksa (2.37) denklemine göre yüklerde mi depolanmıştır? Bu aşamada bu soru cevapsızdır: Size toplam enerjinin ne olduğunu ve nasıl hesaplanacağını söyleyebilirim, ama nerede depolandığını sormak yararsızdır. Radyasyon teorisinde (Bölüm 9) enerjinin elektrik alanda depolandığını kabul etmek daha yararlıdır. (Görelilik teorisinde bu, kesin olarak böyledir.) Bu bakış açısında enerji yoğunluğu

$$\epsilon_0 \frac{E^2}{2} = \text{birim hacimdeki enerji} \quad (2.40)$$

olur. Ama, elektrostatikte isterseniz yükler üzerinde [$(\frac{1}{2}\rho V)$ yoğunlukta], isterseniz elektrik alanda depolandığını düşünebilirsiniz. Aradaki tek fark hesap yöntemindedir.

(iii) Toplanabilirlik ilkesi. Elektrostatik enerji E^2 şeklinde elektrik alanın karesiyle orantılı olduğundan, toplanabilirlik ilkesine uymaz. Çoklu bir sistemin enerjisi, parçaların ayrı ayrı enerjileri toplamı olmaz—"etkileşme terimleri" de olabilir:

$$\begin{aligned} W_{\text{top}} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int (E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) d\tau \\ &= W_1 + W_2 + \epsilon_0 \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau \end{aligned}$$

Örneğin, ortamdaki yükleri iki katına çıkarırsanız, enerji dört kat artar.

2.5 İLETKENLER

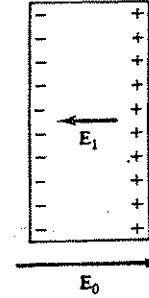
2.5.1 İletkenlerin Temel Özellikleri

Cam veya lastik gibi yalıtkan maddelerin yapısındaki elektronlar belirli atomlara bağlıdır. Buna karşılık, metalik iletkenlerde her atomun bir veya iki elektronu madde içinde serbestçe hareket edebilirler. (Tuzlu su gibi sıvı iletkenlerde iyonlar hareket eder.) İdeal bir iletkende serbest yüklerin sayısı sınırsız olur. Gerçekte ideal bir iletken yoktur, fakat bazı maddelerin iletkenliği ideal duruma çok yakın olur. Bu tanımdan yola çıkarak ideal iletkenlerin elektrostatik özelliklerini ortaya koyabiliriz:

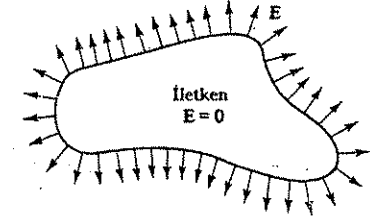
(i) İletken içinde $\vec{E} = 0$ olur. Niçin? Çünkü, elektrik alan olsaydı, bu serbest yükler hareket ederlerdi ve bunun adı elektrostatik olmazdı. Bu açıklama biraz havada kalmış olabilir; o halde, bir dış \vec{E}_0 elektrik alanı içine konulan iletkende ne olduğunu görelim (Şek. 2.42). Başlangıçta bu alan tüm pozitif yükleri sağ tarafa, negatif yükleri de sol tarafa itecektir. (Gerçekte, sadece negatif yükler—elektronlar—hareket eder, fakat bunlar sol tarafa gittiğinde, sağ taraftaki iyonlar net pozitif yük oluştururlar; yani aynı etki oluşur.) Yükler maddenin sınırına geldiğinde birikmeye başlarlar; pozitif yükler sağda, negatif yükler

2.5. İLETKENLER

solda. Şimdi bu yükler de kendi başlarına bir \vec{E}_1 alanı oluştururlar ve, şekilde görüldüğü gibi, bu alan \vec{E}_0 alanına zıt yöndedir. Önemli olan da budur: Serbest yüklerin elektrik alanı, dış alanı sıfırlayacak yönde olur. Bu sıfırlama gerçekleşene kadar yüklerin hareketi devam eder ve sonunda, iletken içindeki net alan sıfır olur. Tüm bu süreç farkedilemeyecek kadar kısa bir sürede olur.



Şekil 2.42



Şekil 2.43

(ii) İletken içinde $\rho = 0$ olur. Bu özellik $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ Gauss yasasından kaynaklanır. $\vec{E} = 0$ olduğuna göre, ρ da sıfır olur. Elbette ortamda pozitif veya negatif yükler vardır, ama içteki net yükü sıfır yapacak kadar.

(iii) İletkenin fazla yükü yüzeyde toplanır. Gidebileceği başka yer yoktur da ondan.

(iv) İletkenin her yerinde $V = \text{sabittir}$. İletken içinde (veya yüzeyinde) a ve b gibi iki nokta arasında $V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, veya $V(a) = V(b)$ olur. Buna göre, iletkenler eşpotansiyel yüzey oluştururlar.

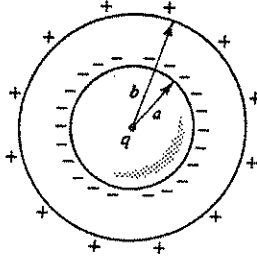
(v) İletken yüzeyin hemen dışında \vec{E} yüzeye diktir. Böyle olmasaydı, elektrik alanın teğetsel bir bileşeni olurdu. Bu teğetsel bileşen yükleri hareket ettirir ve onu sıfırlayacak şekilde yeni yerlere gönderirdi. (Yükler iletkenin dışarı çıkamıyacağı için, dik yönde elektrik alan olabilir.)

İletken içine konulan yüklerin yüzeye akışı size tuhaf gelebilir. Metal bir küreyi yüklediğimizi düşünelim. İlk bakışta yüklerin birbirini iterek aralarında en büyük uzaklığı sağlamak istemeleri mantıklı gelebilir. Ama, bu kez yüzeyde birbirlerine iyice yaklaşmış olurlar. Bu şekilde, küre içinde büyük bir boşluk ziyan edilmiş olmuyor mu? Yüklerin birarızının da (kek içindeki üzüm gibi) küre içine serpiştirilmesi daha uygun olmaz mıydı? Hayır. En uygun olan dağılım, iletkenin boyu veya şekli ne olursa olsun, yüklerin yüzeye yerleşmesidir.

Bu problem enerji cinsinden daha iyi anlaşılabilir. Dinamik sistemlerde olduğu gibi, bir iletkendeki fazla yükler, potansiyel enerjiyi minimum kılacak dağılımı ararlar. (iii) özelliğine göre, fazla yükler yüzeye yerleştiğinde potansiyel enerji minimum olmaktadır. Örnek 2.8'de gördüğümüz gibi, yüzeyinde q yükü bulunan kürenin enerjisi $q^2/(8\pi\epsilon_0 R)$ dir. Problem 2.34 ve 2.35'teki sonuca göre de, aynı q yükü hacim içine dağılmışsa, enerji $3q^2/(20\pi\epsilon_0 R)$, yani daha büyük degerdedir.

Örnek 2.9: İç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan küresel kabuğun merkezine noktasal bir q yükü konulmuştur (Şek. 2.44). Kabuğun iç ve dış yüzeyindeki yük yoğunlukları ne olur?

Çözüm: İletkendeki serbest yükler, iletken içindeki elektrik alanı sıfırlayacak şekilde,



Şekil 2.44

yeniden yerleşirler. Yüklü küresel bir kabuğun elektrik alanı, merkezdeki noktasal yükün alanıyla aynı olduğundan, a yarıçaplı iç yüzeyde $-q$ yükü toplanırsa içeride elektrik alan sıfır olur. Buna göre, iç yüzeyde yük yoğunluğu

$$\sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

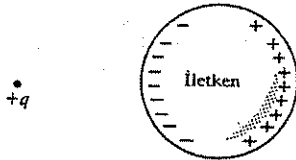
olur. Bu yerleşim dış yüzeyde $+q$ yükü bırakır. Buradaki yük yoğunluğu da benzer şekilde bulunur:

$$\sigma_b = \frac{q}{4\pi b^2}$$

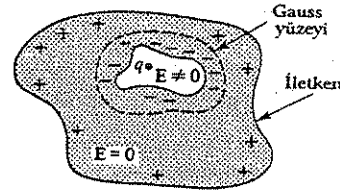
Problem 2.35 Örnek 2.9'daki yük dağılımı için, her üç bölgede ($r < a$, $a < r < b$ ve $r > b$) \vec{E} ve V 'yi r uzaklığının fonksiyonu olarak bulun. $E(r)$ ve $V(r)$ nin grafiğini çizin.

2.5.2 Toplanan Yükler

Nötr (yüksüz) bir iletken bir $+q$ yükünü yaklaştırdığınızda (Şek. 2.45), birbirini çekerler. Bunun nedeni basittir: q yükü iletkendeki serbest eksi yükleri kendine doğru çekerken, artı yükleri de uzak tarafa iter. (Diğer bakış açısında yükler, iletken içindeki elektrik alanı sıfırlayacak şekilde yeniden yerleşirler.) Toplanan negatif yükler daha yakın olduğundan, q üzerindeki net kuvvet çekici olur. Bölüm 3'te bu kuvveti, küresel iletken için sayısal olarak hesaplayacağız.



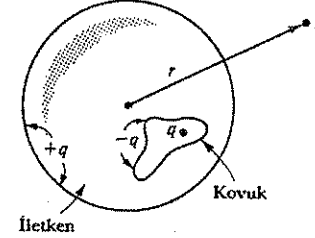
Şekil 2.45



Şekil 2.46

Bir iletken "içinde" alan, yük veya potansiyelden söz ettiğimizde, iletkenin "dolu" kısımlarını kast ediyorum. İletken içinde bir kovuk ve bu kovukta bir yük varsa, kovukta elektrik alan sıfır olmaz. Fakat, kovuğun içini dış dünyadan yalıtacak şekilde, iletkenin yükleri yeniden dağılır (Şek. 2.46). Ayrıca, hiçbir dış alan iletkenin içine giremez. Böylece, dış yüzeyde toplanan yükler dış alanı, iç yüzeyde toplanan yükler de kovuktaki alanı iletken içine sokmazlar. (Ancak, Örnek 2.10'da göreceğimiz gibi, içteki yükün etkisi dış yüzeyde artan yüklerle kendini dışarı belli eder.) Kovuğu saran iç yüzeyde toplanan net yük, içteki yüke eşit ve zıt işaretli olmalıdır; zira, iletken içinden geçen bir Gauss yüzeyi seçersek $\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$ olmalıdır. Buna göre, $Q_{iç} = q + q' = 0$ veya, $q' = -q$ olur.

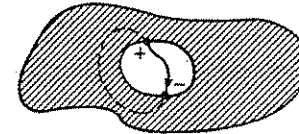
Örnek 2.10 : Merkezi orijinde olan yüksüz bir küre içinde rastgele bir kovuk açılmıştır (Şek. 2.47). Kovuk içinde bir yere $+q$ yükü konuluyor. Küre dışındaki elektrik alan ne olur?



Şekil 2.47

Çözüm : İlk bakışta yanıtın kovuğun şekline ve yükün nereye konulduğuna bağlı olacağı sanılabilir, ama yanlıştır. Doğru yanıt, *kovuk nerede olursa olsun*, dışarda elektrik alan $q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ olur. İletken kovuğu dışardan saklar, sadece kovuk içindeki yükün miktarını bize bildirir. Bu nasıl olur? Şöyle: Kovuk içindeki $+q$ yükü nedeniyle, iletkenin iç yüzünde $-q$ yükü öyle dağılır ki iletkenin dolu kısımlarında elektrik alanı sıfırlar. İletkenin net yükü sıfır olduğu için, geride kalan $+q$ yükü iletkenin dış yüzüne düzgün olarak dağılır. O halde, küre dışındaki bölgeden bakıldığında, sadece düzgün $+q$ yüklü bir küre yüzeyi gözlenir ve bunun alanı da $q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ dir.

Şöyle bir itiraz yapılabilir: burada üç elektrik alan söz konusudur: \vec{E}_q , \vec{E}_{-q} ve $\vec{E}_{dışq}$. Kesin olan şey, bu üçünün iletken içinde sıfır olduğudur. Oysa, sadece ilk ikisinin birbirini sıfırladığını söyledim ve üçüncünün iletken içinde ayrıca sıfır olduğunu ekledim. Ayrıca, ilk iki alan iletken içinde sıfırlanıyorsa, küre dışında sıfırlanacaklarını nereden biliyoruz? Örneğin, kovuk içinde birbirlerini sıfırlamıyorlar. Şu anda bu soruya doyurucu bir yanıt veremem, ama şu kadarı doğru: $-q$ yükünü iletkenin iç yüzüne dağıtarak, kovuktaki $+q$ yükünün kovuk dışında *her yerde* alanını sıfırlamanın yolu *vardır*. Bölüm 3'de tek çözüm teoremlerinde göreceğimiz gibi, elektrostatikte yük dağılımlarının tek çözümü vardır. Verilen bir durumu sağlayan bir çözüm bulduğumuzda, başka çözüm olmadığından emin olabiliriz. O halde, yanıt $\vec{E} = q\hat{r}/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ olur; fakat kuşkuyla giderebilmek için daha sonra göreceğimiz bir sonucu kullanmak zorunda kaldım.



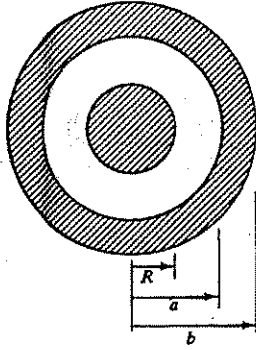
Şekil 2.48

İletken içindeki kovukta yük yoksa, o takdirde kovuk içinde elektrik alan sıfır olur; çünkü olabilecek bir alan çizgisi (Şek. 2.48), kovuk duvarındaki artı bir yükten eksi bir yüke doğru giderdi. Bu alan çizgisini, ($\vec{E} = 0$ olan) iletken içinden geçen kapalı bir eğrinin parçası olarak kullandığımızda $\oint \vec{E} \cdot d\vec{a}$ integrali pozitif olur ve (2.16) denklemine aykırı olurdu. Buradan, kovuk içinde de $\vec{E} = 0$ olduğu, yani kovuğu saran iletken yüzeyinde yük toplanmadığı çıkar. (Bu yüzden, şimşek çakarken araba içinde kısmen emniyette olursunuz. Belki arabaya yıldırım düşebilir ve bunun sıcaklığıyla kebab olursunuz, ama sizi elektrik çarpmaz. Faraday kafesi denilen bir aygıt bu ilkenin uyarılamasıdır. Duyarlı deney aletleri metal bir kafes içine konularak, dış elektrik alanlardan etkilenmeleri önlenmiş olur. Pratikte tümüyle metal kaplı

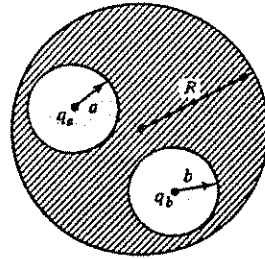
bir oda gerekmez, telden yapılmış kafesler yeterlidir.)

Problem 2.36 R yarıçaplı ve q yüklü metal küreyle eş eksenli, iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan metalik bir küresel kabuk yüksüzdür (Şek. 2.49).

- (a) R , a ve b yarıçaplı yüzeylerdeki yük yoğunluklarını bulun.
 (b) Referans noktasını sonsuzda alıp, merkezdeki potansiyeli bulun.
 (c) Dıştaki kabuk bir telle toprağa bağlanıyor (yani potansiyeli, sonsuzdaki gibi, sıfır yapıyor). (a) ve (b) şıklarındaki yanıtlar nasıl değişir?



Şekil 2.49



Şekil 2.50

Problem 2.37 R yarıçaplı, yüksüz ve dolu iletken bir kürenin içinde, yarıçapları a ve b olan iki kovuk açılıyor (Şek. 2.50). Kovukların merkezlerine sırasıyla q_a ve q_b yükleri konuyor.

- (a) σ_a , σ_b ve σ_R yüzey yük yoğunluklarını bulun.
 (b) İletken dışında elektrik alan ne olur?
 (c) Her kovukta elektrik alan ne olur?
 (d) Herbir q_a ve q_b üzerindeki kuvvet ne olur?
 (e) Dışardan iletken yakınına üçüncü bir q_c yükü yaklaştırılmış olsaydı, bu yanıtlardan hangileri değişirdi?

2.5.3 İletkenin Yüzey Yükü ve Kuvvetler

İletken içinde elektrik alan daima sıfır olduğundan (2.27) sınır koşuluna göre, iletkenin hemen dışında:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (2.41)$$

olur. Daha önceden bulduğumuz gibi, iletken yüzeyinde elektrik alanın yüzeye dik oluşu, bu sonucu doğrular. Potansiyel için yazılan (2.30) sınır koşulu ise şöyle olur:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.42)$$

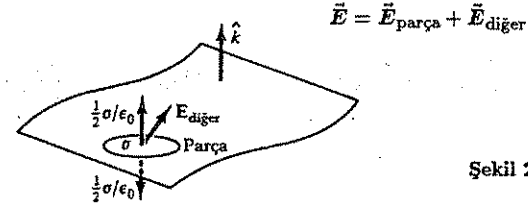
O halde, \vec{E} veya V biliniyorsa, iletkenin yüzey yükü bulunabilir. Bu formülleri Bölüm 3'te çok sık kullanacağız.

2.5. İLETKENLER

Bir dış elektrik alan varsa, doğal olarak bu yüzey yükleri üzerinde bir kuvvet oluşur. (2.2) denkleminde göre, birim yüzeydeki kuvveti \vec{f} ile gösterirsek, $\vec{f} = \sigma \vec{E}$ olur. Ancak, burada bir sorun vardır: Yüzeyde elektrik alan süresiz olduğundan, $\vec{E}_{\text{üst}}$ ev \vec{E}_{alt} alanlarından hangisini kullanacağız? Yanıt: ikisinin ortalamasını:

$$\vec{f} = \sigma \vec{E}_{\text{ortalama}} = \frac{1}{2} \sigma (\vec{E}_{\text{üst}} + \vec{E}_{\text{alt}}) \quad (2.43)$$

Neden ortalama? Bunun nedeni basittir, ama anlatırken karışık görünebilir. Yüzeydeki nokta etrafında bir yüzey parçası seçelim (Şek. 2.51). Bu parçayı, düzlem olacak ve içindeki yük yoğunluğu sabit kalacak şekilde iyice küçültelim. Bu noktadaki alan iki bileşenden oluşur: parçanın alanı ve diğer herşeyin (yüzeyin kalan kısmı ve dış yüklerin) alanı:



Şekil 2.51

Şimdi, parçanın kendi üzerine kuvvet uygulamayacağı açıktır. (Bir sepetin içindeyken, sepeti sapından tutup kaldıramazsınız.) O halde, yüzey parçasına uygulanan kuvvet tümüyle \vec{E}_{diger} 'den kaynaklanır ve bu elektrik alanda süresizlik yoktur. Çünkü, buradaki süresizlik parçanın iki yana doğru oluşturduğu $\sigma/2\epsilon_0$ elektrik alanından kaynaklanıyordu (Şek. 2.51). (Parçayı kaldırsak orada sürekli bir boşluk oluşurdu.) O halde,

$$\vec{E}_{\text{üst}} = \vec{E}_{\text{diger}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

$$\vec{E}_{\text{alt}} = \vec{E}_{\text{diger}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

olur. Buradan, diğer yüklerin alanı bulunur:

$$\vec{E}_{\text{diger}} = \frac{1}{2} (\vec{E}_{\text{üst}} + \vec{E}_{\text{alt}}) = \vec{E}_{\text{ortalama}}$$

Ortalama alınması, parçanın kendi katkısından kurtulmanın bir yoludur.

İletken yüzeyde ortalama alan, (2.41) denkleminde göre, $(\sigma/2\epsilon_0)\hat{n}$ olduğundan, birim yüzey üzerindeki kuvvet bulunur:

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{n} \quad (2.44)$$

Bu kuvvet, yükün işareti ne olursa olsun, yüzeyde dış doğru bir elektrostatik basınç oluşturur ve iletkeni elektrik alanın içine çekmek ister. Basıncı yüzeyin hemen dışındaki elektrik alan cinsinden şöyle ifade ederiz:

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (2.45)$$

Problem 2.38 (2.43) bağıntısı sonsuz ince yüzeylerle sınırlı değildir. Kalınlığı a olan bir tabaka düşünelim (Şek. 2.52). ρ yük yoğunluğu ve \vec{E} elektrik alanı sadece x 'e göre değişiyor olsun. Bu tabakanın birim yüzeyine etkiyen kuvvet şöyle olur:

$$f_x = \int_0^a \rho(x) E_x(x) dx$$

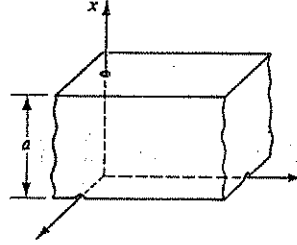
Gauss yasası yardımıyla ρ yoğunluğunu eleyerek

$$f_x = \frac{1}{2} \epsilon_0 [E_x(a)^2 - E_x(0)^2] = \sigma E_{x\text{ort}}$$

olduğunu gösterin. Burada ortalama alan değeri

$$E_{x\text{ort}} = \frac{1}{2} [E_x(a) + E_x(0)]$$

olup, σ birim yüzeydeki toplam yüküdür.



Şekil 2.52

Problem 2.39 R yarıçaplı metal bir kürede toplam Q yükü vardır. "Kuzey" yarımküre ile "güney" yarımküre arasındaki itici kuvvet ne kadar olur?

2.5.4 Kapasitörler

İki iletken cisim alıp birine $+Q$ ve diğerine $-Q$ yükü koyalım (Şek. 2.53). Bir iletken üzerinde potansiyel sabit olduğundan, bu iki iletken arasındaki potansiyel farkı tanımlanabilir:

$$V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Şekil 2.53

Bu iki iletken üzerinde yüklerin nasıl dağıldığını bilmiyoruz; bu nedenle, eğer rastgele geometrik şekillere sahip iseler, elektrik alanı hesaplamak zor olur. Ama bildiğimiz bir şey var: \vec{E} alanı Q yüküyle orantılıdır. Elektrik alanı veren Coulomb ifadesine bakalım:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) \rho d\tau \quad (2.6)$$

ρ yoğunluğunu iki katına çıkarırsak, \vec{E} de iki kat artar. (Peki ama, $\pm Q$ yüklerini iki katına çıkardığımızda, ρ ikiye katlanır mı? Belki yükler yeni konumlara yerleşip, bazı yerde ρ değerini dört katına çıkaracak, bazı yerde yarıya düşürecektir? Bu endişeye gerek yoktur— Q yükünü ikiye katlırsanız, ρ da ikiye katlanır, yüklerin yeniden dağılımı söz konusu olmaz. Bunun ispatı Bölüm 3'te gelecek; şimdilik sözüme güvenmeniz gerekiyor.)

\vec{E} alanı Q ile orantılıysa, V de orantılı olur. Bu orantı katsayısına, o iletken sistemin sığası denir ve C ile gösterilir:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.46)$$

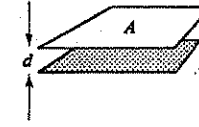
Sığa sistemin geometrik yapısı (iletkenlerin biçimi, aralarındaki uzaklık) ile ilgili bir büyüklüktür. MKS sisteminde sığa birimi coulomb/volt=farad (F) olur. Ama bu birimin

2.5. İLETKENLER

pratikte aşırı büyük olduğu görülür. (1 F sığalı bir kapasitörü ancak vinçle kaldırabilirsiniz.) Daha kullanışlı olan birimler mikrofara (10⁻⁶ F) ve pikofara (10⁻⁹ F) olur.

Burada, tanım olarak V , pozitif yüklü iletkenle negatif yüklü iletkenin potansiyel farkıdır. Benzer şekilde Q , pozitif yüklü iletkenin yüküdür. Bu iki büyüklük pozitif alındığından, sığa daima pozitif bir büyüklüktür. (Bazen tek bir iletkenin sığasından söz edildiğini duyacaksınız. Bu durumda negatif yüklü "ikinci iletken" sonsuzda varsayılmıştır. Bunun elektrik alanına bir katkısı olmaz ve (2.46) formülüne göre V , referans noktası sonsuzda alınan potansiyel olur.

Örnek 2.11: Düzlem kapasitör. Herbirinin yüzey alanı A ve aralarında d uzaklığı olan paralel iki metal düzlemin sığasını bulun (Şek. 2.54).



Şekil 2.54

Çözüm: Üst levhaya $+Q$ ve alt levhaya $-Q$ yükü koyalım. Yüzeyler yeterince büyük ve d uzaklığı yeterince küçük ise, bu yükler yüzeylere düzgün olarak dağılırlar. Buna göre, yüzey yük yoğunluğu üst levhada $\sigma = Q/A$ olur. Bu sistemin elektrik alanı Örnek 2.5'te $Q/(A\epsilon_0)$ olarak bulunmuştu. O halde, levhalar arasındaki potansiyel farkı bulunur:

$$V = Ed = \frac{Q}{A\epsilon_0} d$$

Q/V -oranı hesaplanır:

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d} \quad (2.47)$$

Örnek olarak, 1×1 cm boyutlu kare levhaların arasında 1 mm uzaklık varsa, sığa 9×10^{-12} F, veya 1 pF (pikofara) olur.

Örnek 2.12: Yarıçapları a ve b ($a < b$) olan eşmerkezli iki metal kürenin sığasını bulun.

Çözüm: $+Q$ yükünü içteki küreye ve $-Q$ yükünü dıştaki küreye verelim. Küreler arasındaki bölgede elektrik alan dışa doğru olur:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Pozitif kürenin negatif küreden itibaren potansiyel farkını hesaplayalım:

$$V = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

V 'nin Q ile orantılı olduğu görülüyor. Sığa hesaplanabilir:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)}$$

Bir kapasitörü "yüklemek" için, pozitif levhadan elektronlar alıp negatif levhaya taşımak gerekir. Bunun için, levhalar arasındaki elektrik alanına karşı iş yapmalıyız, çünkü alan

negatif yükler pozitif levhaya doğru çekmektedir. Bir kapasitörü sıfırdan başlayıp son Q değerine kadar yüklemek için ne kadar iş yapılması gerekir? Yükleme sırasında, pozitif levha yükünün ara q değerine gelmiş olduğunu varsayalım. Bu anda potansiyel farkı q/C dir. (2.32) formülüne göre, küçük bir dq yükü daha getirmek için yapmanız gereken iş

$$dW = \left(\frac{q}{C}\right) dq$$

olur. $q = 0$ ilk değerinden $q = Q$ son değerine çıkarmak için yapılan toplam iş

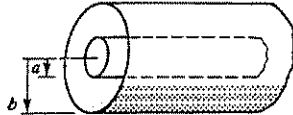
$$W = \int_0^Q \left(\frac{q}{C}\right) dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

veya, $Q = CV$ olduğundan,

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (2.48)$$

yazılabilir. Burada V kapasitörün son potansiyelidir.

Problem 2.43 Yarıçapları a ve b olan eş eksenli sonsuz iki metal silindirin birim uzunluktaki sığasını hesaplayın (Şek. 2.55).



Şekil 2.55

Problem 2.41 Düzlem kapasitörde levhaların, aradaki çekim kuvveti nedeniyle, küçük bir ϵ kadar birbirine yaklaştığını varsayalım.

(a) Yapılan işi (2.45) formülüyle hesaplayın. Sonucu E elektrik alanı ve levhaların A yüzey alanı cinsinden ifade edin.

(b) Elektrik alanın yitirdiği enerjiyi (2.40) denklemiyle hesaplayın.

BÖLÜM 2 ÜZERİNE EK PROBLEMLER

Problem 2.42 Bir kenarı s olan kare düzlem yüzeyinde düzgün σ yük yoğunluğu vardır. Kare merkezinden çıkılan dikme üzerinde z yükseklikte elektrik alanı bulun. Yanıtınızın $s \rightarrow \infty$ ve $z \gg s$ limitlerinde ne olduğunu araştırın. (Yanıt: $E = (2\sigma/\pi\epsilon_0)[\arctan\sqrt{1 + (s^2/2z^2)} - 1]$)

Problem 2.43 Bir bölgedeki elektrik alanın küresel koordinatlardaki ifadesi

$$\vec{E} = \frac{A\hat{r} + B \sin\theta \cos\phi \hat{\phi}}{r}$$

olarak veriliyor (A ve B sabit). Yük yoğunluğu ne olur? [Yanıt: $(A - B \sin\phi)/r^2$]

Problem 2.44 Yüzeyinde toplam Q yükü düzgün dağılmış olan R yarıçaplı kürenin güney yarımküresinin kuzey yarımküresi üzerine uyguladığı kuvveti bulun. [Yanıt: $3Q^2/(64\pi\epsilon_0 R^2)$]

Problem 2.45 R yarıçaplı yarım küre şeklindeki bir kubbenin yüzeyinde düzgün σ yük yoğunluğu vardır. Kubbenin tepesiyle merkezi arasındaki potansiyel farkını bulun. [Yanıt: $(R\sigma/2\epsilon_0)(\sqrt{2}-1)$]

Problem 2.46 R yarıçaplı küre içindeki yük yoğunluğu $\rho(r) = kr$ olarak veriliyor (k bir sabit). Kürenin enerjisini iki farklı yoldan hesaplayın. (Yanıt: $\pi k^2 R^2/7\epsilon_0$)

Problem 2.47 Tüm uzayda elektrik potansiyel

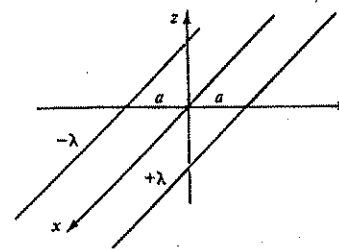
$$V(\vec{r}) = A \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

olarak veriliyor (A ve k birer sabit). $\vec{E}(\vec{r})$ elektrik alanını, $\rho(\vec{r})$ yük yoğunluğunu ve Q toplam yükünü hesaplayın. [Yanıt: $\rho = \epsilon_0 A(4\pi\delta^3(\vec{r}) - \lambda^2 e^{-\lambda r}/r)$]

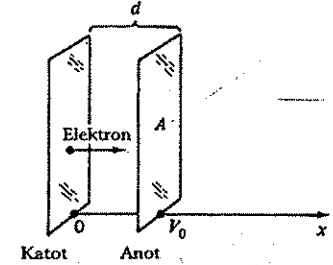
! Problem 2.48 xy -düzleminde bulunan ve x -eksenine paralel olan sonsuz iki doğrusal telde $+\lambda$ ve $-\lambda$ yük yoğunlukları vardır (Şek. 2.56).

(a) Referans noktasını orijinde alıp, (x, y, z) konumlu bir noktada potansiyeli hesaplayın.

(b) Eşpotansiyel yüzeylerin silindirik şeklinde olduğunu gösterin ve belirli V_0 potansiyeline karşılık gelen silindirin yarıçapını ve ekseninin yerini bulun.



Şekil 2.56



Şekil 2.57

! Problem 2.49 Bir vakum diyodunda elektronlar, sıfır potansiyeldeki sıcak bir katottan çıkıp pozitif V_0 potansiyeldeki anoda doğru ivmelenirler (Şek. 2.57). Levhalar arasındaki hareketli elektron bulutu (buna **uzay yükü** denir) kısa sürede çoğalıp katot üzerindeki elektrik alanı sıfırlar. Bu andan itibaren levhalar arasında sabit bir I akımı oluşur.

Levha yüzeylerinin aradaki uzaklığa kıyasla büyük ($A \gg d^2$) olduğunu kabul edersek, kenar etkileri yok sayılabilir. Bu durumda V , ρ ve elektronların v hızı sadece z değişkeninin fonksiyonu olurlar.

(a) Levhalar arasındaki bölgede Poisson denklemini yazın.

(b) Elektronların katottan ilk hızsız yola çıktıklarını varsayıp, potansiyelin $V(x)$ olduğu x noktasında hızlarını bulun.

(c) Kararlı durumda I akımı z 'den bağımsız olur. Bu durumda ρ ile v arasındaki ilişki nedir?

(d) Bu üç denklem arasında ρ ve v 'yi eleyip, V potansiyeli için bir diferansiyel denklem elde edin.

(e) Bu denklemi $V(x)$ için çözün, grafiğini çizin ve uzay yükü olmadığı durumdaki potansiyelle karşılaştırın. Keza, $\rho(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını bulun.

(f)
$$I = KV_0^{3/2} \quad (2.49)$$

olduğunu gösterin ve K sabitini bulun. [(2.49) formülü **Child-Langmuir yasası** olarak bilinir; uzay yüküyle sınırlı diyotların lineer olmadığını, yani Ohm yasasına uymadığını gösterir.]

! Problem 2.50 Varsayalım ki çok duyarlı yeni bir ölçüm sonucu, Coulomb yasasında küçük bir hata olduğu ortaya konulmuş olsun. Bu iddiaya göre, iki noktasal yük arasındaki kuvvet şöyledir:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{-r/\lambda} \hat{r}$$

Burada λ uzunluk birimine sahip yeni bir evrensel sabit olur. λ değeri oldukça büyük (örneğin, bilinen evrenin yarıçapının yarısı kadar) olduğundan, bu düzeltme terimi çok küçük olur. Göreviniz bu yeni Coulomb yasasıyla elektrostatik teorisini yeniden kurmaktır. Toplanabilirlik yasasının yine geçerli olduğunu varsayın.

- (a) ρ yük dağılımının elektrik alanı [yani, (2.6) formülünün yenisi] ne olur?
 (b) Bu elektrik alan için bir potansiyel yazılabilir mi? Açıklayın. (Matematik ispat gerekmez—inandırıcı bir cümle yeter.)
 (c) Orijinde noktasal bir yük için

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} + \frac{1}{\lambda^2} \int_W V d\tau = \frac{q}{\epsilon_0}$$

olduğunu gösterin. Burada S ve W , merkezi orijinde olan bir kürenin yüzey ve hacmidir.

- (d) Bu sonucu genelleştirerek, herhangi bir yük dağılımı için

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} + \frac{1}{\lambda^2} \int_W V d\tau = \frac{Q_{\text{ic}}}{\epsilon_0}$$

olduğunu gösterin. Burada W yükleri içeren bir hacim ve S onu saran yüzeydir. (Bu formül Gauss yasası yerine geçerdi.)

Problem 2.51 Bir $\vec{E}(x, y, z)$ elektrik alan ifadesi

$$E_x = ax, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0$$

olarak veriliyor (a bir sabit). Yük yoğunluğu ne olur? Yük yoğunluğu düzgün olduğu halde, elektrik alanın bir yönde artışı nasıl açıklarsınız? (Bu problem görüldüğünden daha derindir, dikkatli olun.)

3

POTANSİYEL HESAP TEKNİKLERİ

3.1 LAPLACE DENKLEMİNİN GENEL ÖZELLİKLERİ

3.1.1 Giriş

Elektrostatik'in temel problemi, verilen bir yük dağılımının elektrik alanını bulmaktır. İlke olarak bu, (2.6) formülündeki Coulomb yasasıyla bulunabilir:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\vec{R}}{R^2} \right) \rho d\tau \quad (\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}')$$

Ne yazık ki bu integral ancak çok basit yük dağılımları için hesaplanabilmektedir. Bazen da dağılımın simetrisinden yararlanıp Gauss yasasını kullanarak çözüme ulaşırız. Ama en iyi strateji önce V potansiyelini hesaplamaktır. Potansiyeli veren (2.24) denklemi daha basit olur:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{1}{R} \right) \rho d\tau \quad (3.1)$$

Ama, yine de bu integralin analitik çözümü genelde zordur. Öte yandan, iletkenler içeren problemlerde ρ yük yoğunluğu önceden verilmeyebilir: İletkenlerdeki yükler serbestçe dolaştığından, sadece toplam yüklerini bilebiliriz.

Bu durumlarda problemi, (2.21) formülündeki Poisson denklemini kullanarak, diferansiyel şekliyle çözmek yararlı olur:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.2)$$

Bu denklem, uygun sınır koşullarıyla birlikte, (3.1) denkleminde eşdeğerdir. Birçok durumda, sadece $\rho = 0$ olan bölgelerdeki potansiyelle ilgileniriz. (Elbette tüm uzayda $\rho = 0$ değildir, yoksa her yerde $V = 0$ olurdu). Başka yerlerde yükler olabilir, ama biz yük bulunmayan bir bölgede çözüm arıyor olabiliriz—örneğin, iletkenler arasındaki boşlukta. Bu durumda Poisson denklemi Laplace denkleminde indirgenir:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.3)$$

veya, kartezyen koordinatlarda yazılmış şekliyle

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3.4)$$

Laplace denkleminin çözümü elektrostatik'in en temel problemidir. Bunun yansıra, fiziksel diğer alanlarında da (gravitasyon, magnetizma, ısı teorisi) karşımıza çıkar. Matematikte analitik fonksiyonlar teorisinde önemli bir rol oynar. (Laplace denklemini çözümlerine **harmonik fonksiyonlar** adı verilir.) Bu denklem ve çözümlerine bir giriş olmak üzere, önce daha kolay olan bir ve iki boyutlu problemlere bakalım.

3.1.2 Bir Boyutlu Laplace Denklemi

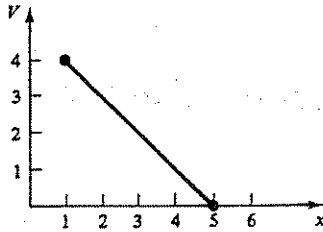
V potansiyelinin sadece x değişkenine bağlı olduğunu varsayalım. Buna göre, Laplace denklemi

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

olur ve çözümü hemen yazılabilir:

$$V = mx + b \quad (3.5)$$

Bu lineer çözümde m ve b gibi iki belirsiz sabit bulunur. Sabitler o problemin sınır koşullarına göre tayin edilirler. Örneğin, $x = 1$ için $V = 4$ ve $x = 5$ için $V = 0$ olduğu verilmişse, $m = -1$ ve $b = 5$ bulunur ve çözüm $V = -x + 5$ olur (Şek. 3.1).



Şekil 3.1

Bu çözümün iki önemli noktasına değinmek istiyorum (gerçi bu, bir boyutta gereksiz veya açık görünebilir; fakat iki ve üç boyuttaki karşılıkları önemlidir):

1. Her R uzunluğu için, $V(x)$ daima $V(x+R)$ ile $V(x-R)$ nin ortalaması olur:

$$V(x) = \frac{1}{2} [V(x+R) + V(x-R)]$$

Laplace denklemi daima bir çeşit ortalama almaktır; bir noktadaki çözümü bulmak istiyorsanız, sağ ve solundaki değerlerin ortalamasını alın.

2. Laplace denklemi çözümlerinde yerel maksimum veya minimum bulunmaz. V nin ekstremum değerleri ancak sınırlarda olabilir. Bu özellik, 1. özelliğin bir sonucudur; zira, x noktasında yerel bir maksimum olsaydı, iki yanındaki V değerlerinden daha büyük olacağından ortalama olmazdı.

3.1.3 İki Boyutlu Laplace Denklemi

İki değişkene bağlı V için Laplace denklemi şöyle olur:

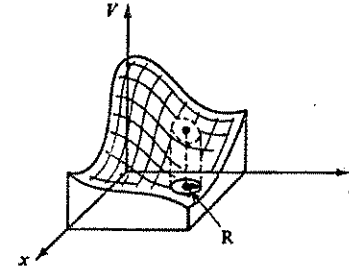
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Kısmi türevlerden dolayı bu bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu nedenle, adi diferansiyel denklemler konusundaki bildikleriniz artık geçerli olmayabilir. (Örneğin, bu denklemin genel çözümünde belirsiz iki sabit olmaz.) Bazan, (3.5) denklemi gibi açık bir çözüm ifadesi de yazılamayabilir. Buna rağmen, tüm çözümler için ortak bazı özellikler söyleyebiliriz.

Fiziksel bir örneği gözünüze getirerek konuşalım. Bir çerçeve üzerine gerilmiş ince bir elastik zar (veya, sabun köpüğü) düşünün. Örneğin, bir karton kutu alıp makasla üst tarafından gelişigüzel bir kapak açın (Şek. 3.2). Şimdi kutunun üzerine ince zarı geçirip çevresini yapıştırın (bir davul zarı gibi, ama kutunun kenarları eğri kesildiğinden, davul zarı gibi düzgün olmayacaktır.) Kutunun tabanında (x, y) koordinatları seçilirse, zarın yerden yüksekliği olan $V(x, y)$ fonksiyonu yaklaşık olarak Laplace denklemini sağlar.¹

¹ Gerçek davul zarı denklemini daha karmaşıktır, fakat yüzeyin eğriliği düzleme çok yakınsa Laplace denkleminde indirgenir.

3.1. LAPLACE DENKLEMİNİN GENEL ÖZELLİKLERİ



Şekil 3.2

İki boyutlu harmonik fonksiyonlar da, bir boyutta vurguladığımız özellikleri taşırlar:

1. Bir (x, y) noktasındaki V değeri, çevresindeki noktaların değerleri ortalaması olur. Daha açık olarak, (x, y) noktası çevresinde R yarıçaplı bir çember çizersek, çember üzerindeki V değerleri ortalaması merkezdeki değere eşit olur:

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\text{çember}} V dl$$

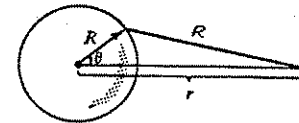
(Bu özellik, bilgisayarda Laplace denkleminin çözümünde kullanılan gevşeme (relaksasyon) yönteminin temelini oluşturur: Çözülmek istenen bölge örgü şeklinde bölünür ve her noktaya tahmin edilen potansiyel değerleri verilir. Sonra her noktadaki potansiyel, çevresindeki noktaların ortalaması olarak yeniden hesaplanır. Birkaç geçişten sonra, değerler gerçek çözüme yaklaşır.)

2. V 'nin yerel minimum veya maksimumu yoktur; tüm ekstremumlar sınırdadır. Bu yine 1. özellikten kaynaklanır. Şek. 3.2'deki zar yüzeyi üzerine bir ping-pong topu koyarsanız, yuvarlanıp kenardan dışarı düşer, zar üzerinde dengede durabileceği bir yer bulamaz.

3.1.4 Üç boyutlu Laplace Denklemi

Üç boyutlu Laplace denklemi için size, bir boyutluda olduğu gibi basit bir örnek veremiyorum. Fakat, sözünü ettiğim iki özellik burada da geçerlidir, ve bu kez ispatını yapacağım.

1. Bir P noktasındaki V potansiyeli, merkezi P 'de olan R yarıçaplı bir küre üzerindeki potansiyelin ortalama değerine eşittir.



Şekil 3.3

İspat. Önce, R yarıçaplı küre dışındaki noktasal bir yükün küre yüzeyi üzerindeki ortalama potansiyelini hesaplayalım. Küre merkezi orijinde, q yükü de z -ekseni üzerinde r uzaklıkta olsun (Şek. 3.3). Buna göre,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

ve

$$R^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta$$

alınırsa, küre yüzeyinde ortalama potansiyel

$$V_{\text{ort}} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{R^2 \sin \theta d\theta d\phi}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2rR} \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta} \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2rR} [(r+R) - (r-R)] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Bu sonuç q yükünün küre merkezinde oluşturduğu potansiyele eşittir. Toplanabilirlik ilkesine göre, aynı sonuç küre dışındaki her yük dağılımı için geçerli olur: yani, bir yük dağılımının küre üzerindeki ortalama potansiyeli küre merkezindeki değerine eşittir.

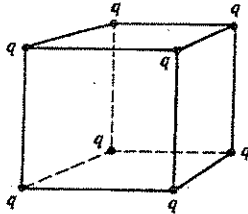
2. Birinci özelliğin sonucu olarak, çözüm bölgesinde V 'nin maksimum veya minimumu olamaz; ekstremum değerler ancak bölge sınırında yer alırlar. (P noktasında V maksimum olsaydı, çevresindeki küre üzerindeki tüm değerlerden büyük olurdu ve ortalamaya eşit olmazdı.)

Problem 3.1 R yarıçaplı küre içinde q yükü olduğu durumda, küre yüzeyindeki ortalama potansiyeli hesaplayın. (Aynı yoldan gidilir, ama bu kez $r < R$ olur.) Artık küre içinde Laplace denklemi geçerli değildir. Bu durumda

$$V_{\text{ort}} = V_{\text{merkez}} + \frac{Q_{\text{dış}}}{4\pi\epsilon_0}$$

olduğunu gösterin. Burada V_{merkez} tüm dış yüklerin merkezdeki potansiyeli ve $Q_{\text{dış}}$ içerde kalan yüküdür.

Problem 3.2 Earnshaw teoremini ispat edin: Bu teoreme göre, yüklü bir parçacık sadece elektrostatik kuvvetlerle kararlı dengede tutulamaz. Bir örnek olmak üzere, Şek. 3.4'de köşelerinde özdeş yükler bulunan küpü düşünün. Bu küpün merkezine konulan bir yükün, her köşeden itilmek suretiyle, dengede olduğunu düşünebilirsiniz; ama en ufak bir yerdeğiştirmede denge geri gelmez.



Şekil 3.4

Problem 3.3 Küresel koordinatlarda V 'nin sadece r koordinatına bağlı olduğu durumda Laplace denklemini çözün. Aynı hesabı silindirik koordinatlarda yapın.

3.1.5 Sınır Koşulları ve Tek Çözüm Teoremleri

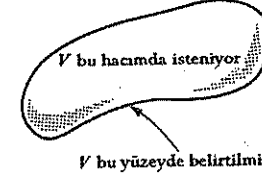
Laplace denklemi V potansiyelini bulmak için yeterli değildir; buna ek olarak belirli sınır koşulları verilmesi gerekir. Burada ince bir soruna karşılıyoruz: Hangi tür sınır koşulları çözüm bulmaya yeterli ve çelişkiye yol açmayacak sayıda olabilir? Bir boyutta bunu görmek kolaydır: $V = mx + b$ genel çözümünde iki belirsiz sabit olduğundan iki sınır koşulu gerekli ve yeter olur. Örneğin, aralığın iki ucunda V değerleri belirtilmiş olabilir; veya, bir uçta V ile dV/dx türevi birlikte verilmiş olabilir. Ama sadece bir uçta V değerini bilmek yeterli olmaz; keza, üç noktada değeri verilmişse çelişki olabilir.

İki ve üç boyuttaki kısmi diferansiyel denklemin ne tür sınır koşulu gerektirdiğini görmek kolay değildir. Önerilen bir sınır koşulu kümesinin yeterli olup olmadığının ispatı tek çözüm teoremleri şeklinde verilir. Elektrostatikte aynı işi gören birçok tek çözüm teoremi vardır. Burada en kullanılan ikisini göreceğiz. (Burada çözümlerin varlığını ispatlamayız)

3.1. LAPLACE DENKLEMİNİN GENEL ÖZELLİKLERİ

düşünmüyorum, çünkü bu çok daha zor bir iştir. Ama çözümün varlığı fiziksel düzeyde açıktır.)

Birinci tek çözüm teoremi: Bir bölgenin sınırlarında V değeri belirtilmişse, bu bölge içinde Laplace denkleminin tek çözümü vardır.



Şekil 3.5

İspat: Şek. 3.5 'te böyle bir bölge ve onun sınırı görüyoruz. Bölge içinde "adacıklar" şeklinde diğer sınırlar da olabilir; bu adacıkların kıyısında da potansiyel değeri verilmiş olmalıdır. Öte yandan, dış sınır sonsuzda olabilir; bu durumda sınırdaki potansiyel sıfır demektir.

Laplace denkleminin V_1 ve V_2 gibi, sınırdaki değerleri sağlayan, iki farklı çözümü olduğunu varsayalım:

$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \nabla^2 V_2 = 0$$

Bu iki çözümün farkına bakalım:

$$V_3 = V_1 - V_2$$

Bu da Laplace denklemini sağlar:

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0$$

ve V_3 sınırda her yerde sıfır olur (çünkü, sınırda V_1 ve V_2 aynı değerleri alırlar). Fakat, Laplace denkleminin içerde yerel minimum veya maksimumu olmadığını söylemiştik; o halde V_3 fonksiyonun hem minimum ve hem de maksimumu sıfırdır. Bu durumda, V_3 değeri her yerde sıfır olur ve $V_1 = V_2$ bulunur; çözüm tektir.

Örnek 3.1: İletken bir maddeyle çevrili ve içinde hiç yük olmayan bir kovukta potansiyelin sabit olduğunu gösterin.

Çözüm: Kovuk duvarları iletken olduğundan, duvarlarda potansiyel sabit bir V_0 değerinde olmalıdır. Buna göre, Laplace denkleminin içerde çözümü olan fonksiyon duvar üzerinde sabit V_0 değerini sağlamalıdır. Bu sınır koşulunu sağlayan bir çözüm önerebiliriz: içerde her yerde $V = V_0$ olsun. Gerçekten de Laplace denklemini ve sınır koşulunu sağlıyor; ayrıca, tek çözüm teoremine göre bu, *olabilecek tek çözümdür*. (Bu sonucu Kısım 2.5.2'de farklı bir yoldan elde etmiştik.)

Tek çözüm teoremi hayal gücünüze bir davetiyedir: Nasıl bulduğunuz önemli değil, ama önerdiğiniz çözüm (a) Laplace denklemini sağlıyorsa, (b) sınırdaki değerleri sağlıyorsa, aranan çözüm *odur*, nasıl bulduğunuz kimse size sormaz. Bu düşünce yönteminin gücünü daha sonra ele alacağımız görüntü yönteminde kullanacağız.

Birinci tek çözüm teoremini daha da genişletip, bölge içinde yük olduğu durumu da ele alabiliriz. Bu kez V Poisson denklemini sağlar. İspat yine aynı yolu izler: sınır koşullarını sağlayan iki çözüm için

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ve} \quad \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

olur. Buna göre, $V_3 = V_1 - V_2$ farkı

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

yani, Laplace denklemini sağlar ve sınırda $V_3 = 0$ olur. Buradan, aynı şekilde $V_1 = V_2$ bulunur.

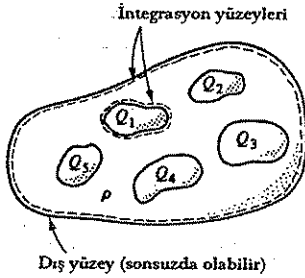
O halde, birinci tek çözüm teoreminin daha geneli şöyle ifade edilebilir:

(a) bölge sınırında V potansiyel değeri ve (b) bölge içinde yük dağılımı verilmişse, bölge içindeki potansiyelin tek çözüm vardır.

3.1.6 İletkenler ve İkinci Tek Çözüm Teoremi

Bir elektrostatik problemine sınır koşulları koymanın en basit yolu, gözönüne alınan bölgenin sınırlarında V değerlerini belirtmektir. Pratikte en sık karşılaşılan durum da budur: Laboratuvardaki iletken yüzeylerin bir kısmı sabit potansiyeldeki pillere bağlanmış, bir kısmı da topraklanmış, yani $V = 0$ potansiyelde tutulmuştur. Ancak, sınır yüzeylerde potansiyelin belirtilmediği bazı durumlar da olabilir. Örneğin, iletken yüzeylerden biri üzerine Q_1 yükü, diğeri üzerine Q_2 yükü, ... vb. verilmiş olabilir. Bu yüklerin iletken yüzey üzerinde nasıl dağılacığı belirtilmez, çünkü konulan yük bizim kontrolümüz dışında hemen serbestçe yer değiştirebilir. İşi daha da zorlaştırmak üzere, iletkenler arasındaki bölgede belirli bir ρ yük yoğunluğu da olabilir. Şimdi, elektrik alan kesin belli olur mu? Veya, bu yükler iletkenler üzerinde değişik şekillerde dağılıp farklı birçok çözüme yol açabilirler mi?

İkinci tek çözüm teoremi: İletken yüzeyler ve belirli bir ρ yük yoğunluğu bulunan bir bölgede (Şek. 3.6), her iletken üzerindeki toplam yük belirtilmişse, elektrik alanın tek çözümü vardır. (Bu bölge tümüyle başka bir iletken içinde, veya sınırsız olabilir.)



Şekil 3.6

İspat: Problemin sınır koşullarını sağlayan iki elektrik alan çözümü olduğunu varsayalım. İletkenler arasındaki bölgede her ikisi de Gauss yasasının diferansiyel şekline uyarlar:

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ve} \quad \nabla \cdot \vec{E}_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ayrıca, her iletkeni saran yüzey üzerinde Gauss yasasının integral ifadesi, bu iki alan için de geçerlidir:

$$\oint_{i.\text{ci iletken yüzey}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}, \quad \text{ve} \quad \oint_{i.\text{ci iletken yüzey}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

Sistemin tümünü saran en dış yüzeyde (bu bir iletken yüzey veya sonsuz olabilir)

$$\oint_{\text{dış yüzey}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{top}}}{\epsilon_0}, \quad \text{ve} \quad \oint_{\text{dış yüzey}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{top}}}{\epsilon_0}$$

3.1. LAPLACE DENKLEMİNİN GENEL ÖZELLİKLERİ

Yine bu iki alanın farkı $\vec{E}_3 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ alınırsa, iletkenler arasındaki bölgede

$$\nabla \cdot \vec{E}_3 = 0 \quad (3.6)$$

olur. İletken yüzeylerde ise

$$\oint \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = 0 \quad (3.7)$$

olur. Şimdi daha önce kullanmadığımız bir özellikten yararlanalım: Yüklerin iletkenler üzerinde nasıl dağıldığını bilmiyoruz, ama her iletkenin bir eşpotansiyel yüzey olduğunu biliyoruz. Buna göre, her iletken yüzeyde V_3 sabit olur. (bu sabit her iletken için farklı olabilir). Vektör analizindeki 5. çarpım kuralını hatırlayalım:

$$\nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) = V_3 (\nabla \cdot \vec{E}_3) + \vec{E}_3 \cdot (\nabla V_3) = -E_3^2$$

Burada (3.6) denklemini ve $\vec{E}_3 = -\nabla V_3$ tanımını kullandım. Bu ifadenin iletkenler arasındaki bölgede integralini alıp, sol tarafta diverjans teoremini uygularsak

$$\int_{\text{hacim}} \nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) d\tau = \oint_{\text{yüzey}} V_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = - \int_{\text{hacim}} E_3^2 d\tau$$

olur. Yüzey integrali tüm yüzeyleri (iletkenler ve en dıştaki yüzey) kapsar. V_3 potansiyeli her yüzeyde sabit olduğundan (dış yüzey sonsuzdaysa, o yüzey üzerinde $V_3 = 0$), integralin dışına alınabilir. Geride kalan integral ise, (3.7) denkleminde göre sıfır olur. Buna göre, sağ taraf

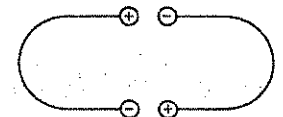
$$\int_{\text{hacim}} E_3^2 d\tau$$

olur. İntegrand daima pozitif olduğuna göre, bu integralin sıfır olabilmesi, ancak her yerde $E_3 = 0$ olmasıyla mümkündür. Buradan $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ bulunur.

İspatı uzun olsa da, ikinci teoremin gayet açık olduğunu düşünebilirsiniz; ama E. Purcell'in verdiği şu örneğe bir göz atın:

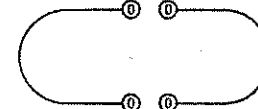


Şekil 3.7



Şekil 3.8

Şek. 3.7'de dört iletken oluşmuş basit bir sistem görülmektedir. İletkenler üzerindeki $\pm Q$ yükleri, artılar eksilere daha yakın olacak şekilde konulmuştur. Sistem oldukça kararlı görünüyor. Şimdi bu iletkenleri ikiye ikiye, Şek. 3.8'deki gibi, iletken bir telle birleştirirsek ne olur? Artı yükler zaten çekim duydukları eksi yüklere çok yakın olduklarından bir değişiklik olmayacağını düşünebilirsiniz—yüklerin yeri kararlı görünüyor, değil mi?



Şekil 3.9

Ama hayır; bu yük dağılımının olanaksız olduğunu göstermek için hesaba gerek yoktur. Çünkü şimdi sistemde iki iletken vardır ve herbiri üzerindeki net yük sıfırdır. Sıfır yükü

iletkenler üzerine dağıtmanın bir yolu Şek. 3.9'daki gibi olur, yani her yerde elektrik alanı sıfır yapar. İkinci tek çözüm teoremine göre bu düzen aradığımız çözümdür: yükler telde akıp birbirlerini sıfırlar.

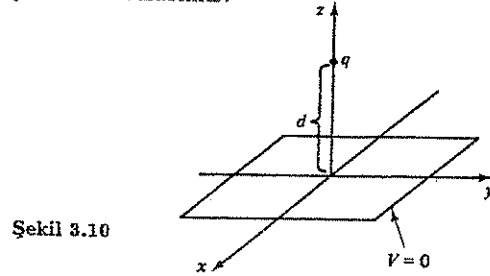
Problem 3.4 Bir elektrik alanın tek çözümü olması için, yük dağılımıyla birlikte, iletken yüzeylerde ya V , veya $\partial V/\partial n$ normal türevlerinin verilmesinin yeterli olduğunu ispatlayın.

Problem 3.5 İkinci tek çözüm teoreminin daha şık bir ispatı, Problem 1.56c'deki Green özdeşliğinde $T = U = V_3$ alınarak yapılır. Ayrıntıları gösterebilir misiniz?

3.2 GÖRÜNTÜ YÖNTEMİ

3.2.1 Klasik Görüntü Problemi

Topraklanmış ve sonsuz bir iletken düzlemden d uzaklıkta noktasal bir q yükü düşünelim (Şek. 3.10). *Soru:* Düzlemin üst tarafındaki bölgede potansiyel ne olur? Elbette $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ olmaz, q yüküne yakın iletken yüzeyinde bir miktar ekşi yük toplanacaktır ve toplam potansiyel hem q ve hem de bu yüzey yükünden kaynaklanır. Peki, dağılımı bilmediğimiz bu yüzey yükünün potansiyelini nasıl bulabiliriz?



Şekil 3.10

Matematik bakış açısında bu problem, $(0,0,d)$ noktasında q yükü bulunan $z > 0$ bölgesinde Poisson denkleminin çözümünü gerektirir. Sınır koşulları da şöyledir:

1. $z = 0$ olduğunda $V = 0$ (iletken yüzey topraklanmıştır).
2. Yükten çok uzaklarda (yani, $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$ olduğunda), $V \rightarrow 0$.

Birinci tek çözüm teoremi, bu koşulları sağlayan tek bir fonksiyon olduğunu garanti etmektedir. O halde, akıllı bir tahminle böyle bir fonksiyon bulabilirsek, doğru çözümü bulmuş oluruz.

Tahmin: Bu problemi bir an unutup; bunun yerine, *tümüyle farklı* şu problemi ele alalım: $(0,0,d)$ noktasında $+q$ yükü ve $(0,0,-d)$ noktasında $-q$ yükünden oluşan ve iletken düzlemin *olmadığı* sistem (Şek. 3.11). Bu sistemin potansiyelini doğrudan yazabiliriz:

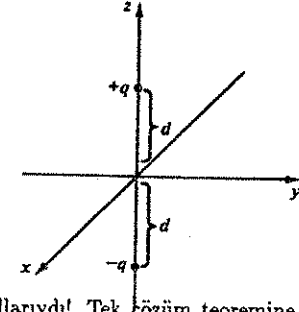
$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] \quad (3.8)$$

(Paydalar, herbir yükün (x,y,z) noktasına uzaklığıdır.) Şimdi şu iki limite bakalım:

1. $z = 0$ olduğunda $V = 0$ oluyor.
2. $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$ olduğunda $V \rightarrow 0$ oluyor.

Ayrıca, $z > 0$ bölgesinde sadece $(0,0,d)$ konumunda $+q$ yükü bulunmaktadır. Ama

3.2. GÖRÜNTÜ YÖNTEMİ



Şekil 3.11

bunlar zaten ilk problemin sınır koşullarıydı! Tek çözüm teoremine göre, ikinci sistemin "üst yarısı" ($z \geq 0$) ilk sistemin aynı potansiyeli olmaktadır. ($z < 0$) olan alt taraf elbette farklıdır, ama kimin umurunda? Biz, sınır koşullarını sağlayan üst taraftaki çözümü arıyoruz.) *Sonuç:* Sonsuz iletken düzlemin dışındaki yükün potansiyeli, (3.8) denkleminin ($z \geq 0$) bölgesindeki kısmıdır.

Burada tek çözüm teoreminin oynadığı önemli role dikkat edin. O olmasaydı, kimse bu çözüme inanmazdı, çünkü tamamen farklı bir yük dağılımından yola çıkıp elde edilmişti. Tek çözüm teoremine göre, aranan bölgede Poisson denklemini ve sınır koşullarını sağlıyorsa, çözüm bu olmalıdır.

3.2.2 Toplanan Yüzey Yükü

Potansiyeli bulduktan sonra, iletken yüzeyinde toplanan σ yük yoğunluğu kolayca bulunur. (2.42) formülüne göre

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

olup, $\partial V/\partial n$, yüzeyde V 'nin yüzeye dik türevidir. Bu problemde normal z -yönünde olduğundan

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0}$$

olur. (3.8) denklemini kullanılırsa

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-q(z-d)}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} + \frac{q(z+d)}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right\}$$

veya

$$\sigma(x,y) = \frac{-qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad (3.9)$$

Beklendiği gibi, yüzey yükü negatif olup en büyük değerini $x = y = 0$ 'da alır.

Yük yoğunluğunu bulmuşken, iletken yüzeyinin toplam yükünü de hesaplayalım:

$$Q = \int \sigma da$$

xy -düzlemindeki bu integral kartezyen koordinatlarda $da = dx dy$ alınarak hesaplanabilir, ama kutupsal (r, θ) koordinatlarında $r^2 = x^2 + y^2$ ve $da = r dr d\theta$ alınarak daha kolay hesaplanır:

$$\sigma(r) = \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{(-qd)r dr d\theta}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} = -qd \left(\frac{-1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right) \Big|_0^\infty = -q \quad (3.10)$$

Yüzeydeki toplam yükün $-q$ olacağını biraz düşünerek tahmin edebiliriz.

3.2.3 Kuvvet ve Enerji

Yüzeyde toplanan yükten dolayı, q yükü iletken yüzeye doğru çekilir. Bu çekim kuvvetini hesaplayalım. q nun bulunduğu bölgede potansiyel, eşdeğer sistemin (yani, iletken yok, $\pm q$ yükleri var) potansiyeline eşit olduğundan, elektrik alan, ve dolayısıyla kuvvet, aynı olacaktır. Buna göre

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{k} \quad (3.11)$$

Fakat dikkat: İki sistemde de herşeyin aynı olduğunu sanmayın; örneğin, enerji aynı değildir. İletken düzlemin bulunmadığı, iki noktasal yük sisteminin enerjisini (2.36) denkleminde yazalım:

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2d} \quad (3.12)$$

İletken ve bir noktasal yüklü sistemin enerjisi bunun yarısı olur:

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d} \quad (3.13)$$

Neden yarısı? (2.39) formülünü hatırlayalım:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

İki noktasal yüklü sistemde, düzlemin üst ($z > 0$) ve alt ($z < 0$) yarısı bu integrale eşit katkıda bulunurlar. İletken düzlemlili sistemde ise, sadece elektrik alanın sıfırdan farklı olduğu üst yarım düzlem katkıda bulunur; dolayısıyla, enerji yarısı kadar olur.

Bu enerjiyi farklı bir yoldan daha hesaplayabiliriz: q yükünü $z = -\infty$ 'dan $z = d$ noktasına getirmek için \vec{F} kuvvetine karşı yapılan işi bulalım.

$$W = \int_{-\infty}^d (-\vec{F}) \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^d \frac{q^2 dz}{4z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q^2}{4z} \right) \Big|_{-\infty}^d = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d}$$

q yükünü iletken düzlemin yanına getirirken sadece q üzerinde iş yapılır, iletken yüzeyinde yük toplanması fazladan bir iş gerektirmez. Oysa, iletken düzlemsiz iki yüklü sistemde, her iki yük üzerinde iş yapıldığı için, iki katı iş gerekir.

3.2.4 Diğer Görüntü Problemleri

Yukarda anlatılan yöntem diğer sistemlere de uygulanabilir. İletken düzlem yakınındaki her yük dağılımının, aynadaki görüntüsü gibi (zıt işaretli) yüklerle tamamlanmış eşdeğer problemini çözersek, orijinal sistemin iletken düzlem dışındaki çözümüne eşdeğer olur. Benzer şekilde çözülebilen iletken küre problemi de ilginçtir.

Örnek 3.2: R yarıçaplı ve topraklanmış iletken kürenin merkezinden s uzaklıkta noktasal bir q yük vardır (Şek. 3.12). Küre dışında potansiyeli bulun. (Küre içinde potansiyel sıfırdır.)

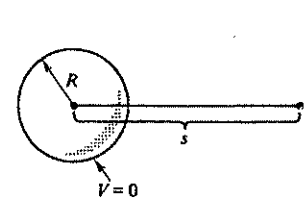
Çözüm: Tümüyle farklı bir sisteme bakalım (Şek. 3.13). q yükü yanısıra,

$$q' = -\frac{R}{s} q \quad (3.14)$$

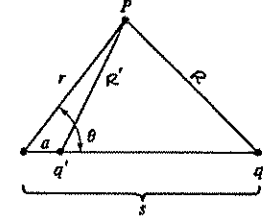
değerinde diğer bir noktasal yük,

$$a = \frac{R^2}{s} \quad (3.15)$$

3.2. GÖRÜNTÜ YÖNTEMİ



Şekil 3.12



Şekil 3.13

uzaklığa konulmuş olsun. İletken düzlem yok—sadece, bu iki yük var. Bu sistemin potansiyeli

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} \right) \quad (3.16)$$

olur; burada R ve R' sırasıyla q ve q' yüklerinden uzaklıklardır. Bu potansiyelin küre yüzeyi üzerinde sıfır olduğu kontrol edilebilir (Problem 3.6); yani asıl problemin sınır koşullarını sağlar.

O halde, (3.16) denklemi, tek çözüm teoremine göre, noktasal yük ve iletken küre probleminin de çözümü olur. (Dikkat ederseniz, görüntü yükleri V nin hesaplanacağı bölge içinde yer almamalıdır. Bu problemde, $a < R$ olduğundan, q' görüntü yükü kürenin içinde yer almakta olup, çözüm aradığımız bölge dışında kalır.) Bu arada, noktasal yük ile iletken küre arasındaki çekim kuvvetini de hesaplayabiliriz:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(s-a)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 Rs}{(s^2 - R^2)^2} \quad (3.17)$$

Görüntü yönteminde çözümün bulunuşu sanki tesadüflere bağlı gibi görünebilir. Ama, bu problemi ilk kez çözen kişi herhalde q' yükünün değerini ve nereye koyacağını bilmiyordu. Sonra, (3.16) denkleminde hangi q' ve a değerlerinin küre yüzeyinde potansiyeli sıfırlayacağını keşfetmiş olabilir. Burada bence en ilginç nokta, görüntü yönteminin işliyor olmasıdır. Örneğin, aynı problemde küre yerine küp alınsaydı, görüntü yöntemi hiçbir q' değeri için işe yaramazdı.

Problem 3.6 (a) Kosinüs teoremini kullanarak (3.16) denkleminin şöyle yazılacağını gösterin:

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + (rs/R)^2 - 2rs \cos \theta}} \right] \quad (3.18)$$

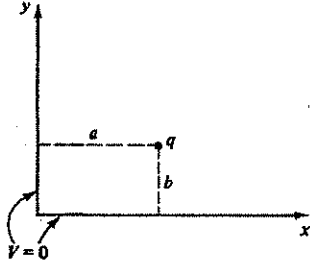
Burada r, θ kutupsal koordinatlar olup, q yükü, Şek. 3.13'de olduğu gibi, z -ekseni yönünde alınmıştır. Bu ifadede $r = R$ olduğunda $V = 0$ oluşu daha kolay görülmektedir. (b) Küre yüzeyinde toplanan yük yoğunluğunu θ açısının fonksiyonu olarak bulun. Yük yoğunluğunun integralini alıp yüzeydeki toplam yükü hesaplayın (sizce değeri ne olmalı?).

(b) Bu sistemin elektrostatik enerjisini hesaplayın.

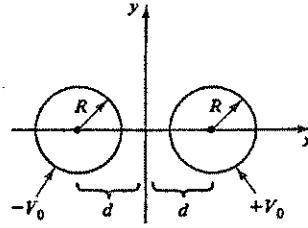
Problem 3.7 Örnek 3.2'de iletken kürenin topraklanmış (yani, $V = 0$) olduğunu varsaymıştık. Eğer iki tane görüntü yükü kullanılırsa, sabit V_0 potansiyelindeki küre problemi de çözülebilir. Kullanacağınız q'' yükün değeri ne olmalı ve nereye konulmalıdır? Bir q yükü ile V_0 potansiyelli iletken küre arasındaki çekim kuvvetini bulun.

Problem 3.8 Boyca yük yoğunluğu λ olan sonsuz doğrusal bir tel topraklanmış bir iletken düzlemden d uzaklığında bulunmaktadır. (İletken yüzeyi xy -düzlemi olarak alın ve telin z eksenine paralel olduğunu varsayın.)

- (a) Düzlem dışındaki bölgede potansiyeli bulun.
 (b) İletken yüzeyinde toplanan $\sigma(x, y)$ yük yoğunluğunu bulun.



Şekil 3.14.



Şekil 3.15

Problem 3.9 Birbirine dik ve topraklanmış iki yarı sonsuz düzlem dışında bir q yükü Şek. 3.14'deki gibi konmuştur. Görüntü sistemi kurun ve bu bölgedeki potansiyeli bulun—hangi görüntü yükleri nerelere konulmalıdır? q üzerindeki kuvvet ne kadar olur? q yükünü sonsuzdan getirmek için yapılan iş ne kadardır? Bu iki düzlem 90° 'den farklı açıda kesişmiş olsalardı, görüntü yöntemi yine çalışır mıydı? Değilse, hangi özel açılarda çözüm olur?

Problem 3.10. Herbirinin yarıçapı R olan, sonsuz uzunlukta iki silindirik iletken den biri V_0 ve diğeri $-V_0$ potansiyelde tutulmaktadır (Şek. 3.15). Dış bölgede potansiyeli bulun. (Yol gösterme: Problem 2.48 sonucunu kullanın.) Silindirlerden biri V_0 potansiyelde ve diğeri topraklanmış ($V = 0$) olduğunda yönteminizi nasıl değiştirirsiniz?

3.3 DEĞİŞKEN AYRIMI

Bu kısımda değişken ayrımı yöntemiyle Laplace denkleminin doğrudan çözümüne gireceğiz. Bu yöntem fizikçilerin kısmi diferansiyel denklem çözümünde en sevdikleri yöntemdir. Bölge sınırında V potansiyeli veya onun normal türevi $\partial V/\partial n$ belirtilmişse uygulanabilir. Yöntemin temeli basittir: Çözümü her bir değişkene bağlı fonksiyonların çarpımı olarak aramak. Fakat, cebirsel ayrıntılar bazan fazla karmaşık olabilir. Bu nedenle, yöntemi bir iyi örnek üzerinde anlatacağım. Önce Kartezyen ve sonra küresel koordinatlarda örneklerle bakacağız—silindirik koordinatların incelenmesini size bırakacağım.

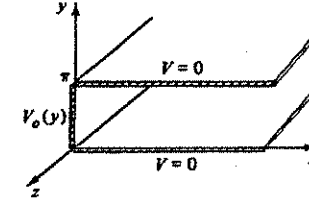
3.3.1 Kartezyen Koordinatlar

Örnek 3.3: Herbiri xz -düzlemine paralel, topraklanmış ($V = 0$) iki sonsuz iletken düzlemden biri $y = 0$ diğeri $y = \pi$ uzaklıktadır (Şek. 3.16). $x = 0$ olan sol tarafı kapatan sonsuz şerit düzlem belirli $V_0(y)$ potansiyelinde tutulmaktadır. (Bu şerit, diğer iki düzlemden yalıtılmıştır.) Bu iletkenlerin çevrelediği bölgede potansiyeli bulun.

Çözüm : Bu sistemde z -yönünde bir değişim olmadığından, problem gerçekte iki boyutlu olur ve Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (3.19)$$

3.3. DEĞİŞKEN AYRIMI



Şekil 3.16

olarak yazılabilir. Bu denklemin sağladığı sınır koşulları şöyledir:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & y = 0 \text{ için } V = 0 \\ \text{(ii)} & y = \pi \text{ için } V = 0 \\ \text{(iii)} & x = 0 \text{ için } V = V_0(y) \\ \text{(iv)} & x \rightarrow \infty \text{ için } V \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

(Bu son koşul, problemde açıkça belirtilmese de, fiziksel olarak gereklidir: $x = 0$ daki şeridin V_0 potansiyelinden uzaklara gidildiğinde potansiyel sıfıra gitmelidir.) O halde, bölgenin tüm sınırlarında potansiyel belirtilmiş olduğundan, tek çözüm vardır.

İlk adım şöyle bir çözüm aramaktır:

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.21)$$

İlk bakışta bu kısıtlama saçma gibi görünebilir—Laplace denkleminin çözümleri çoğunlukla bu yapıda değildirler. Örneğin, $V(x, y) = (5x + 6y)$ fonksiyonu Laplace denklemini sağlar, ama bir çarpım yapısında değildir. Acaba bu yolla çözümlerin büyük bir kısmını kaçırmış olmuyor muyuz? Hele biraz daha sabredin; bu çözümlerin ilginç bir özelliği vardır: bunları birbirine ekleyip genel çözümü bulacağız.

(3.21) ifadesini Laplace denkleminde kullanırsak

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Sonraki adımda, değişkenler “ayrılır”, yani x ’e bağlı tüm terimler bir araya, y ’ye bağlı tüm terimler bir araya getirilir. Bunun için, denklemi $V = XY$ ile böleriz:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (3.22)$$

Burada birinci terim sadece x değişkenine, ikinci terim de y değişkenine bağlıdır. Diğer bir deyişle, denklemin yapısı şöyledir:

$$f(x) + g(y) = 0$$

Bu tür bir eşitliğin doğru olabilmesi ancak bir şekilde mümkündür: f ve g ’nin ikisi de sabit olmalıdır. Gerçekten de, x değişirken $f(x)$ değişiyorsa, y sabit tutulduğunda $f(x) + g(y)$ değişir, sıfıra eşit kalmaz. Buna göre,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_1, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2 \quad \text{ve} \quad C_1 + C_2 = 0$$

Bu sabitlerden biri pozitifse diğeri negatif olur (belki ikisi de sıfırdır). Genelde, tüm olasılıkları araştırmak gerekebilir; fakat, birazdan anlaşılaçağı üzere, bu problemde C_1 pozitif ve C_2 negatif alınır. Buna göre

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y \quad (3.23)$$

Ne olduğunu görüyor musunuz? (3.19) kısmi diferansiyel denklemi yerine iki tane adi diferansiyel denklem elde ettik. Adi diferansiyel denklem çözümü daha kolaydır. Nitekim, (3.23) denklemleri hemen çözülebilir:

$$X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}, \quad Y(y) = C \sin ky + D \cos ky$$

ve potansiyel çözümü

$$V(x, y) = (A e^{kx} + B e^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky) \quad (3.24)$$

olarak bulunur. Şimdi yapılacak iş, sınır koşullarını koymaktır. (iv) koşulundan başlarsak, sonsuzda $V = 0$ olması için, $A = 0$ olmalıdır. B sabitini diğer iki sabit içine katıp yeniden adlandırsak

$$V(x, y) = e^{-kx} (C \sin ky + D \cos ky)$$

olur. (i) koşuluna göre $D = 0$ olmalıdır. O halde

$$V(x, y) = C e^{-kx} \sin ky \quad (3.25)$$

yazılır. Sonra, (ii) koşulu kullanılır:

$$\sin k\pi = 0$$

Bu sonuca göre k bir tamsayı olmalıdır. (Şimdi niçin C_1 sabitini pozitif aldığımızı açıklayalım: X fonksiyonu sinüsel olsaydı, $x \rightarrow \infty$ için sifra gitmezdi. Tersine, Y fonksiyonu üstel olsaydı, hem $y = 0$ ve hem de $y = \pi$ değerinde sıfır olmazdı.)

Değişken ayrımı yöntemiyle ancak buraya kadar gelebiliriz. Şimdi, $x = 0$ 'daki sınır koşulunu sağlamak mümkün müdür? Şayet, tesadüfen $V_0(y)$ fonksiyonu $\sin ky$ olarak verilmişse, bu mümkün değildir. Fakat, yöntemin can alıcı noktası buradadır: Değişken ayrımı bize bir değil, her k değerine karşılık gelen sonsuz sayıda çözüm vermiştir. Bunlardan biri yalnız başına son sınır koşulunu sağlamayabilir, ama bunların lineer kombinasyonu sağlar. Laplace denklemi lineer bir denklemdir; yani V_1, V_2, V_3, \dots fonksiyonları birer çözümse, $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 + \dots$ kombinasyonu da Laplace denklemini sağlar (burada $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ keyfi sabitlerdir):

$$\nabla^2 V = \alpha_1 \nabla^2 V_1 + \alpha_2 \nabla^2 V_2 + \dots = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots = 0$$

Bu özellikten yararlanıp (3.25) türü çözümlerin lineer kombinasyonu ile çok daha genel bir çözüm kurabiliriz:

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-kx} \sin ky \quad (3.26)$$

Bu çözüm hala ilk üç sınır koşulunu sağlamaktadır (bunun için $V = 0$ olan sınır koşullarını önceden ele aldım). Şimdi sorun şöyledir: C_k katsayıları nasıl seçmeliyiz ki son sınır koşulunu sağlayalım? Yani, $x = 0$ için $V(0, y) = V_0(y)$ olmalıdır:

$$V(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin ky = V_0(y) \quad (3.27)$$

Bu seri toplamını tanıdınız—Fourier sinüs serisi. Matematikte Dirichlet teoremine göre, $V_0(y)$ fonksiyonlarının hemen hemen tümü—sonlu süreksizlik gösterenler de dahil— böyle bir seri toplamı olarak yazılabilirler.

Bu toplama içinde gömülü C_k katsayıları nasıl bulunur? Kolay: (3.27) denkleminin her iki tarafını $\sin(ny)$ ile çarpıp $[0, \pi]$ aralığında integralini alırız (n bir tamsayı):

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_0^{\pi} \sin ky \sin ny dy = \int_0^{\pi} V_0(y) \sin ny dy \quad (3.28)$$

Soldaki integralin değeri şudur:

$$\int_0^{\pi} \sin ky \sin ny dy = \begin{cases} 0 & (k \neq n) \\ \frac{\pi}{2} & (k = n) \end{cases} \quad (3.29)$$

Yani, toplamadaki terimlerden $k = n$ olanın dışındakilerin integrali sıfır olur. $k = n$ için sol taraf $(\pi/2)C_n$ olacağından,

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V_0(y) \sin ny dy \quad (3.30)$$

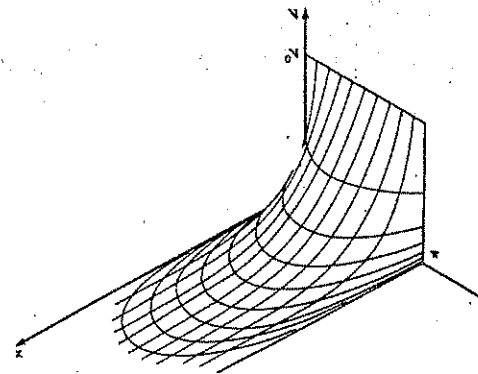
bulunur. Böylece çözümü elde etmiş oluyoruz. Çözüm (3.27) formülüdür ve oradaki C_n katsayıları (3.30) formülüyle belirlenir.

Semut bir örnek olmak üzere, $x = 0$ 'daki metal şeritin sabit V_0 potansiyelinde olduğunu varsayalım Buna göre

$$C_n = \frac{2V_0}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ny dy = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & (n \text{ çift ise}) \\ \frac{4V_0}{n\pi} & (n \text{ tek ise}) \end{cases} \quad (3.31)$$

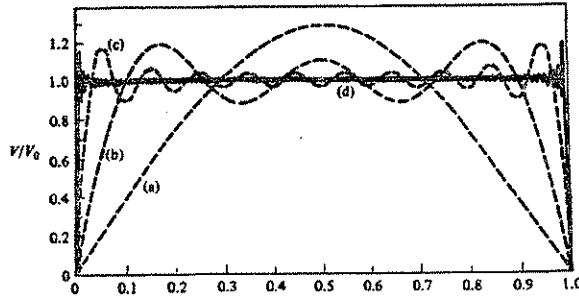
olur ve komple çözüm yazılır:

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k \text{ tek}} \frac{1}{k} e^{-kx} \sin ky \quad (3.32)$$



Şekil 3.17

Bu potansiyelin grafiği Şek. 3.17 'de gösterilmiştir. Şek. 3.18 'de ise, $x = 0$ duvarındaki $V = V_0$ değerine, Fourier serisinin giderek nasıl yaklaştığı gösterilmiştir. [(a) eğrisinde sadece $k = 1$ terimi, (b) eğrisinde ilk 5 terim, (d) eğrisinde de ilk 100 terimin katkısı vardır.]



Şekil 3.18

Biraz geç olacak ama söyleyeyim: (3.32) serisinin toplamı vardır. Sonuç şöyledir:

$$V(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \arctan\left(\frac{\sin y}{\sinh x}\right)$$

Bu ifadenin Laplace denklemini ve dört sınır koşulunu sağladığı kontrol edilebilir.

Değişken ayrımı yönteminin başarısı (3.25) bağıntısındaki fonksiyonların iki özelliğinden kaynaklanır: kapalılık ve diklik (ortogonalite). Bir $f_n(x)$ fonksiyonlar kümesi cinsinden, her $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x) \quad (3.33)$$

olarak ifade edilebiliyorsa, $f_n(x)$ kümesi *kapalıdır* denir. Örneğin, $\sin(nx)$ fonksiyonları $[0, \pi]$ aralığında kapalıdır. Keza, $f_n(x)$ fonksiyonlar kümesindeki herhangi iki eleman için

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x) dx = 0, \quad (n \neq m) \quad (3.34)$$

oluyorsa, $f_n(x)$ kümesi $[a, b]$ aralığında *dik* (ortogonal) olur. Örneğin, $\sin(nx)$ kümesi $[0, \pi]$ aralığında diktir. Yukarıda C_n katsayılarını bulmak için bu özellikten yararlandık.

Örnek 3.4 : Yine xz -düzlemine paralel, topraklanmış iki sonsuz düzlem $y = 0$ ve $y = \pi$ uzaklıktadır (Şek. 3.19). Bu düzlemler arasındaki bölgeyi $x = \pm a$ 'da kapatan iki metal şerit sabit V_0 potansiyelinde bulunuyorlar. (Kısa devre olmaması için, bu şeritler ince birer yalıtkanla komşu düzlemlerden yalıtılmışlardır.) Bu sonsuz dikdörtgen boru içindeki potansiyeli bulun.

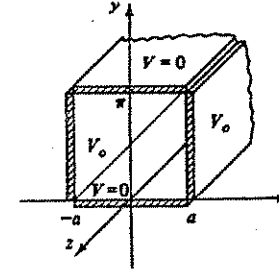
Çözüm : Yine sistem z -değişkeninden bağımsızdır ve çözülecek Laplace denklemini

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

olur. Sınır koşullarına gelince:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & y = 0 \text{ için } V = 0 \\ \text{(ii)} & y = \pi \text{ için } V = 0 \\ \text{(iii)} & x = a \text{ için } V = V_0 \\ \text{(iv)} & x = -a \text{ için } V = V_0 \end{array} \right\} \quad (3.35)$$

3.3. DEĞİŞKEN AYRIMI



Şekil 3.19

Düşünce yöntemi bir önceki örneğin (3.24) denklemine kadar aynıdır:

$$V(x, y) = (A e^{kx} + B e^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky)$$

Fakat, bu kez $A = 0$ alamayız; çünkü çözüm bölgesi $x = \infty$ 'a kadar uzanmaz. Bu sonlu bölgede e^{kx} terimi de potansiyele katkıda bulunabilir. Öte yandan, problemin x -ekseni boyunca simetrik olduğu açıktır; yani $V(-x, y) = V(x, y)$, veya *çift fonksiyon* olur. Bunun için $A = B$ olmalıdır. Hiperbolik fonksiyonlardan

$$e^{kx} + e^{-kx} = 2 \cosh kx$$

oluşturur ve $2A$ çarpanını C ve D içine katıp yeniden tanımlarsak

$$V(x, y) = \cosh kx (C \sin ky + D \cos ky)$$

yazılır. (i) ve (ii) sınır koşulları yine $D = 0$ ve tamsayı k olmasını gerektirir:

$$V(x, y) = C \cosh kx \sin ky \quad (3.36)$$

Bu $V(x, y)$ çift fonksiyon olduğundan, (iii) koşulunu sağlarsa, otomatik olarak (iv) koşulunu da sağlayacaktır. O halde, en genel çözümü yazabiliriz:

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cosh kx \sin ky$$

C_k katsayıları (iii) koşulundan bulunur:

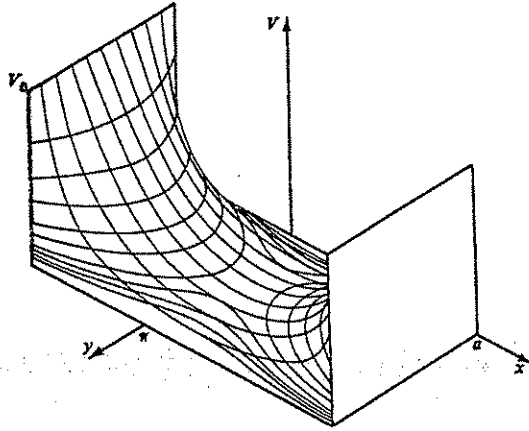
$$V(a, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cosh ka \sin ky = V_0$$

Yine Fourier analizindeki katsayı bulma problemini çözeriz. Doğrudan (3.31) formülünden alıyorum:

$$C_n = \frac{2V_0}{\pi} \int_0^\pi \sin ny dy = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & (n \text{ çift ise}) \\ \frac{4V_0}{n\pi} & (n \text{ tek ise}) \end{cases}$$

Sonuç olarak, potansiyel şöyle olur:

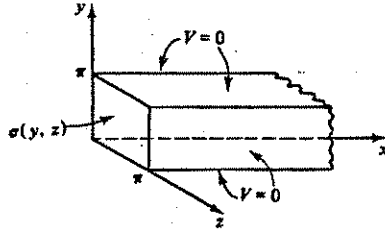
$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k \text{ tek}} \frac{1}{k} \frac{\cosh kx}{\cosh ka} \sin ky \quad (3.37)$$



Şekil 3.20

Bu fonksiyonun grafiği Şek. 3.20'de gösterilmiştir.

Örnek 3.5 : Sonsuz uzunlukta ve topraklanmış ($V = 0$) bir borunun kesiti kare şeklinde olup bir kenarı π uzunluğundadır (Şek. 3.21). Borunun $x = 0$ da olan yüzü bir yalıtkanla kapatılmış ve yalıtkan üzerinde $\sigma(y, z)$ yüzey yük yoğunluğu verilmiştir. Boru içinde potansiyeli bulun.



Şekil 3.21

Çözüm : Bu sistem gerçek bir üç boyutlu problemdir:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3.38)$$

Sınır koşulları şöyle ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad y = 0 \text{ için } V = 0 \\ & \text{(ii)} \quad y = \pi \text{ için } V = 0 \\ & \text{(iii)} \quad z = 0 \text{ için } V = 0 \\ & \text{(iv)} \quad z = \pi \text{ için } V = 0 \\ & \text{(v)} \quad x \rightarrow \infty \text{ için } V \rightarrow 0 \\ & \text{(vi)} \quad x = 0 \text{ için } \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\sigma(y, z)}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.39)$$

(Bu son koşul, yüzeyde elektrik alandaki artışı veren (2.42) denkleminde gelir.) Her zaman

3.3. DEĞİŞKEN AYIRIMI

olduğu gibi, aradığımız çözüm

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (3.40)$$

şeklinde olacaktır. Bu ifadeyi Laplace denkleminde yerine koyup $V = XYZ$ ile bölersek

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_1, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = C_3$$

ve $C_1 + C_2 + C_3 = 0$

bulunur. Örnek 3.3'deki deneyimimize göre, yine C_1 katsayısı pozitif, C_2 ve C_3 ise negatif alınmalıdır. $C_2 = -k^2$ ve $C_3 = -l^2$ alırsak, $C_1 = k^2 + l^2$ olur. Buna göre,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = (k^2 + l^2)X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} = -l^2 Z \quad (3.41)$$

Yine, üç değişkenli kısmi diferansiyel denklem yerine üç tane adi diferansiyel denklem elde ettik. Bunların çözümleri doğrudan yazılır:

$$\begin{aligned} X(x) &= A e^{\sqrt{k^2 + l^2}x} + B e^{-\sqrt{k^2 + l^2}x} \\ Y(y) &= C \sin ky + D \cos ky \\ Z(z) &= E \sin lz + F \cos lz \end{aligned}$$

(v) sınır koşuluna göre $A = 0$, (i) sınır koşuluna göre $D = 0$ ve (iii) sınır koşuluna göre $F = 0$ olmalıdır. (ii) ve (iv) sınır koşulları ise k ve l nin tamsayı olduklarını söylerler. Geride kalan sabitleri yeniden adlandırsak

$$V(x, y, z) = C e^{-\sqrt{k^2 + l^2}x} \sin ky \sin lz \quad (3.42)$$

Bu çözüm, (vi) dışındaki tüm sınır koşullarını sağlar. Burada belirsiz iki tamsayı parametre olduğundan, en genel lineer kombinasyon çift toplam şeklinde yazılacaktır:

$$V(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} C_{k,l} e^{-\sqrt{k^2 + l^2}x} \sin ky \sin lz \quad (3.43)$$

Şimdi son sınır koşulunu kullanalım:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{k^2 + l^2} C_{k,l} \sin ky \sin lz = \frac{\sigma(x, y)}{\epsilon_0} \quad (3.44)$$

$C_{k,l}$ sabitlerini bulmak için her iki tarafı $\sin ny \sin mz$ ile çarpıp (n, m tamsayı) $[0, \pi]$ aralığında integral alırız:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{k^2 + l^2} C_{k,l} \int_0^{\pi} \sin ky \sin ny dy \int_0^{\pi} \sin lz \sin mz dz \\ = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sigma(y, z) \sin ny \sin mz dy dz \end{aligned}$$

(3.29) daki diklik bağıntısına göre, sol taraf $(\pi/2)^2 \sqrt{n^2 + m^2} C_{n,m}$ olur. Buradan katsayılar bulunur:

$$C_{n,m} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{n^2 + m^2}} \int_0^\pi \int_0^\pi \sigma(y, z) \sin ny \sin mz dy dz \quad (3.45)$$

Sonuç olarak, çözüm (3.43) denklemdir ve katsayılar (3.45) denklemiyle verilir.

Somut bir örnek olarak, borunun $x = 0$ daki yüzünde sabit σ_0 yüzey yükü varsa,

$$C_{n,m} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{n^2 + m^2}} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin ny \sin mz dy dz \quad (3.46)$$

$$= \begin{cases} 0 & (n \text{ ve } m \text{ çift}) \\ \frac{16\sigma_0}{\pi^2 \epsilon_0 n m \sqrt{n^2 + m^2}} & (n \text{ ve } m \text{ tek}) \end{cases}$$

Sonuç olarak, çözümü yazabiliriz:

$$V(x, y, z) = \frac{16\sigma_0}{\pi^2 \epsilon_0} \sum_{n=1,3,5,\dots} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{e^{-\sqrt{n^2 + m^2} x} \sin ny \sin mz}{m n \sqrt{n^2 + m^2}} \quad (3.47)$$

Beklendiği gibi, ardışık terimlerin katkısı giderek azalmaktadır. Pratik hesaplarda ilk birkaç terimi almak yeterli olur.

Problem 3.11 Örnek 3.3 'teki yarı sonsuz borunun $x = 0$ daki yüzeyi iki metal şeritle kapatılmıştır. Şeritlerden biri $y = 0$ 'dan $y = \pi/2$ ye kadar uzanmakta olup V_0 potansiyelinde tutulmaktadır; diğeri $y = \pi/2$ den $y = \pi$ ye kadar uzanmakta ve $-V_0$ potansiyelindedir. Boru içindeki potansiyeli bulun.

Problem 3.12 Örnek 3.3 'teki $x = 0$ yüzeyinde $V_0(y)$ potansiyeli için, yüzeyde toplanan $\sigma(y)$ yüzey yükü ifadesini çıkarın ve $V_0 = \text{sabit}$ için yüzey yük yoğunluğunu hesaplayın.

Problem 3.13 Örnek 3.3 'teki $x = 0$ yüzeyinde, $V_0(y)$ potansiyeli yerine, $\sigma(y)$ yüzey yükü belirtilmiştir. $V(x, y)$ için genel çözümü bulun ve $\sigma = \sigma_0$ durumuna uygulayın.

Problem 3.14 Dikdörtgen kesitli sonsuz bir boru z -eksenine paralel konmuş olup, $y = 0$, $y = \pi$ ve $x = 0$ daki yüzeyleri topraklanmıştır. $x = a$ 'daki dördüncü yüzey belirli $V_0(y)$ potansiyelinde tutuluyor.

(a) Boru içindeki potansiyelin genel ifadesini çıkarın.

(b) $V_0(y) = V_0$ (sabit) için potansiyeli hesaplayın.

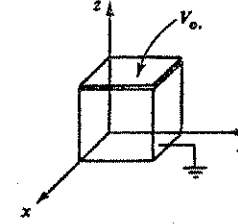
Problem 3.15 Örnek 3.3, 3.4 ve 3.5 'te, hesapları kolaylaştırmak için y uzaklığı $[0, \pi]$ arasında alınmıştır. $y = [0, b]$ aralığında değişiyorsa, (3.32), (3.37) ve (3.47) denklemlerinin yeni ifadelerini bulun. [(3.47) denkleminde ayrıca $z = [0, c]$ aralığında olsun.] Bu soruda hesap değil biraz düşünmek yeterlidir.

Problem 3.16 Bir küpün beş metal yüzeyi birbirine kaynatılmış ve topraklanmıştır (Şek. 3.22). Küpün üst yüzünde diğerlerinden yalıtılmış metal bir levha V_0 potansiyelinde tutulmaktadır. Küp içindeki potansiyeli bulun. (Küpün bir kenarı π uzunluğundadır.)

3.3.2 Küresel Koordinatlar

Buraya kadar olan örneklerde kartezyen koordinatlar kullanılması doğaldı; çünkü bölge sınırlarında düzlemler vardı. Yuvarlak cisimler için de küresel koordinatlar daha uygun

3.3. DEĞİŞKEN AYRIMI



Şekil 3.22

olur. Bu koordinatlarda Laplace denklemi şöyle yazılıyordu:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.48)$$

Burada **eksenel simetriye** sahip durumları ele alacağız; bu durumda V potansiyeli ϕ açısından bağımsız olur:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.49)$$

Yine değişken ayrımı yönteminde

$$V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) \quad (3.50)$$

şeklinde bir çözüm arayalım. Bu ifade kullanılır ve denklem $V = R \Theta$ ile bölünürse

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \quad (3.51)$$

Birinci terim yalnız r değişkenine, ikinci terim de yalnız θ değişkenine bağlı olduğundan, daha önce gördüğümüz gibi, her ikisi de sabit olmalıdır:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1), \quad \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \quad (3.52)$$

Burada sabitin neden $l(l+1)$ olarak alındığı birazdan anlaşılacaktır.

Yine, kısmi diferansiyel denklem yerine iki adi diferansiyel denklem elde edildi. Ancak, bu kez diferansiyel denklemler pek tanıdık değildir. Önce radyal denklemi ele alalım:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1) R \quad (3.53)$$

Bu denklemin genel çözümünün

$$R(r) = A r^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad (3.54)$$

olduğu kontrol edilebilir; A ve B belirsiz sabitlerdir. Açısal denkleme gelince

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin \theta \Theta \quad (3.55)$$

Bu denklemin çözümleri **Legendre polinomları** olurlar:

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos \theta) \quad (3.56)$$

Burada $P_l(x)$ polinomları Rodrigues formülü ile tanımlanır:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad (3.57)$$

İlk birkaç Legendre polinomu Tablo 3.1 'de sıralanmıştır.

Tablo 3.1 Legendre Polinomları
$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Tablo incelenirse, $P_l(x)$ polinomunun l . dereceden olduğu ve, l 'nin tamsayı değerine göre, tek veya çift fonksiyon olduğu görülür. Her polinomun katsayısı $(1/2^l l!)$ seçildiğinden

$$P_l(1) = 1 \quad (3.58)$$

olur. Rodrigues formülü sadece pozitif l değerleri için tanımlanmıştır. Öte yandan, ikinci dereceden her diferansiyel denklemin iki bağımsız çözümü olması gerekir. $P_l(x)$ bunlardan biridir. Diğer "ikinci çözüm" $\theta = 0$ veya $\theta = \pi$ için sonsuz (ıraksak) olmaktadır ve fiziksel olarak gözönüne alınmaz. Örneğin, $l = 0$ için ikinci çözüm şöyle olmaktadır:

$$\Theta(\theta) = \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.59)$$

O halde, eksenel simetrik sistemler için Laplace denkleminin çözümü yazılabilir:

$$V(r, \theta) = \left(A r^l + \frac{B}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

Böylece, değişken ayrımı yöntemi, her tamsayı l değerine karşılık gelen sonsuz sayıda çözüm verir. Genel çözüm bunların lineer kombinasyonu olur:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (3.60)$$

Aşağıdaki örnekler bu önemli sonucun uygulamalarıdır.

Örnek 3.6: R yarıçaplı boş küre yüzeyinde potansiyel $V_0(\theta)$ olarak belirtilmiştir. Küre içinde potansiyeli bulun.

Çözüm: (3.60) formülündeki çözümü kullanalım. Orijinde ($r = 0$) çözümün ıraksak olmasını önlemek için $B_l = 0$ olmalıdır. Buna göre

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (3.61)$$

olur. Bu çözüm $r = R$ olan küre yüzeyinde, belirtilen $V_0(\theta)$ fonksiyonunu sağlamalıdır:

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = V_0(\theta) \quad (3.62)$$

Bu koşulu sağlayan A_l katsayıları bulunabilir mi? Evet, Legendre polinomları da (sinüsler gibi) $-1 \leq x \leq 1$ (veya, $0 \leq \theta \leq \pi$) aralığında, kapalı ve dik (ortogonal) bir fonksiyonlar kümesi oluştururlar. Bunların diklik bağıntısı şöyledir:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & (l \neq m \text{ ise}) \\ \frac{2}{(2m+1)} & (l = m \text{ ise}) \end{cases} \quad (3.63)$$

O halde, (3.62) denkleminin iki tarafı $P_m(\cos \theta) \sin \theta$ ile çarpılıp integral alınırsa

$$A_m R^m \frac{2}{(2m+1)} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$A_m = \frac{(2m+1)}{2R^m} \int_0^\pi V_0(\theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.64)$$

Sonuç olarak, çözüm (3.61) denklemiyle ve A_l katsayıları (3.64) denklemiyle verilir.

Ancak, pratikte bu açısal integrallerin hesaplanması zordur. Kolay çözülebilen durumlarda ise, A_l katsayılarını bulmanın daha pratik bir yolu vardır: Örneğin, küre yüzeyindeki potansiyel şöyle verilmiş olsun:

$$V_0(\theta) = \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.65)$$

Bu denklem $\cos \theta$ 'nin kuvvetleri cinsinden yazılıp Legendre polinomları oluşturulur. Yarım açı formülü kullanılırsa

$$V_0(\theta) = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} [P_0(\cos \theta) - P_1(\cos \theta)]$$

Bu ifade (3.62) denkleminde kullanılıp iki taraf karşılaştırılırsa, $A_0 = 1/2$, $A_1 = -(1/2R)$, ve diğer tüm A_l katsayılarının sıfır olduğu kolayca görülür. Buna göre, küre içindeki çözüm şöyledir:

$$V(r, \theta) = \frac{1}{2} \left[r^0 P_0(\cos \theta) - \frac{r^1}{R} P_1(\cos \theta) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right) \quad (3.66)$$

Örnek 3.7: Aynı problemi küre dışında çözün.

Çözüm: Bu kez sonsuzda potansiyelin ıraksak olmaması için $A_l = 0$ olmalıdır:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (3.67)$$

Yine, bu çözümün küre yüzeyinde verilen potansiyel dağılımını sağlaması istenir:

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = V_0(\theta)$$

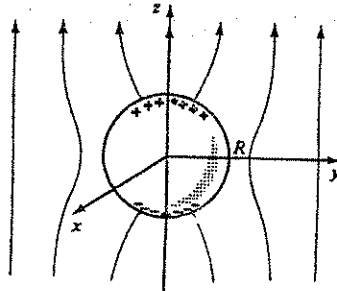
İki tarafı $P_m(\cos \theta)$ ile çarpıp integralini alır ve (3.63) diklik bağıntısını kullanırsak

$$\frac{E_m}{R^{m+1}} \frac{2}{(2m+1)} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$B_m = \frac{(2m+1)}{2} R^{m+1} \int_0^\pi V_0(\theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.68)$$

olur. (3.67) denklemi çözüm olur ve katsayılar (3.68) denklemiyle bulunur.

Örnek 3.8: R yarıçaplı yüksüz bir metal küre, z -ekseni yönündeki $\vec{E} = E_0 \hat{k}$ düzgün elektrik alanı içine konmuştur (Şek. 3.23). Bu alan pozitif yükleri "kuzey" kutbu civarına iterek, "güney" kutup civarında negatif bir yük oluşturacaktır. Bu toplanan yükün alanı ise, küre çevresindeki alan çizgilerini değiştirecektir. Küre dışında potansiyeli bulun.



Şekil 3.23

Çözüm: Metal küre bir eşpotansiyel yüzeydir; bu yüzeyi referans seçelim ve potansiyelini sıfır alalım. Bu durumda, simetriye göre tüm xy -düzlemi sıfır potansiyelde olacaktır. Bu kez z sonsuza gittiğinde potansiyelin sıfır olduğunu söyleyemeyiz. Gerçekte, küreden çok uzaklarda $E_0 \hat{k}$ alanını veren potansiyel

$$V \rightarrow -E_0 z + C$$

olur ($\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ olduğunu hatırlayın). Ekvator düzleminde $V = 0$ olabilmesi için C sabiti sıfır olmalıdır. O halde, küresel koordinatlarda bu problemin sınır koşulları şöyle ifade edilir:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & r = R \text{ için } V = 0 \\ \text{(ii)} & r \gg R \text{ için } V \rightarrow -E_0 r \cos \theta \end{array} \right\} \quad (3.69)$$

(3.60) denklemdeki çözüme bu sınır koşullarını uygulayalım. (i) koşuluna göre

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \quad \rightarrow \quad B_l = -A_l R^{2l+1} \quad (3.70)$$

olmalıdır. Bunu çözümde kullanalım:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$r \gg R$ olduğunda, parantez içindeki ikinci terim yok sayılabilir. Bu durumda (ii) koşulu

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

İki taraf karşılaştırılırsa, sadece $l = 1$ olan terimin kalacağı görülür. $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$ olduğuna dikkat edilirse,

$$A_1 = -E_0, \quad \text{ve diğer tüm } A_l \text{ katsayıları} = 0$$

ve problemin çözümü yazılabilir:

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta \quad (3.71)$$

Küre yüzeyinde toplanan yük bulunmak istenirse, bilinen yol izlenir:

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R} = \epsilon_0 E_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta_R = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (3.72)$$

Beklendiği gibi, "kuzey" yarımkürede, ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) pozitif yük yoğunluğu, "güney" yarımkürede ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$) ise negatif yük yoğunluğu toplanır.

Örnek 3.9: R yarıçaplı bir küre yüzeyinde yük yoğunluğu $\sigma_0(\theta)$ fonksiyonu ile belirtilmiştir. Küre içinde ve dışında potansiyeli bulun.

Çözüm: İç bölgedeki çözümü yazalım:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (r \leq R) \quad (3.73)$$

(B_l terimleri alınmadı, çünkü orijinde yakınsak değiller); dış bölgede ise

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (r \geq R) \quad (3.74)$$

olur (bu kez A_l terimleri sonsuzda ıraksak oldukları için alınmadılar). Bu iki fonksiyon küre yüzeyinde uygun sınır koşullarıyla birleştirilmelidir. Önce, (2.28) koşuluna hatırlayalım: $r = R$ sınırında potansiyel sürekli olmalıdır:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (3.75)$$

İki taraftaki aynı indislili Legendre polinomları katsayıları eşitlenirse

$$B_l = A_l R^{2l+1} \quad (3.76)$$

olur. İkinci olarak, (2.30) koşuluna göre, V nin normal (yani, radyal) doğrultudaki türevi sınırdan sonlu bir süreksizlik gösterir:

$$\frac{\partial V_{\text{dış}}}{\partial r} - \frac{\partial V_{\text{iç}}}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{\sigma_0(\theta)}{\epsilon_0} \quad (3.77)$$

Yukardaki çözümlerin türevleri bu denklemde kullanılırsa

$$-\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -\frac{\sigma_0(\theta)}{\epsilon_0}$$

ve B_l katsayıları (3.76) denkleminde alınır

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = \frac{\sigma_0(\theta)}{\epsilon_0} \quad (3.78)$$

Sonra, Legendre polinomlarının diklik bağıntısından katsayılar bulunur:

$$A_m = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{m-1}} \int_0^\pi \sigma_0(\theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.79)$$

Özel bir yük dağılımı olarak

$$\sigma_0(\theta) = C \cos \theta = C P_1(\cos \theta) \quad (3.80)$$

verilmiş olsun (C bir sabit). Bu durumda, $m = 1$ dışındaki tüm katsayılar sıfır olacaktır:

$$A_1 = \frac{C}{2\epsilon_0} \int_0^\pi [P_1(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta = \frac{C}{3\epsilon_0}$$

Buna göre, küre içindeki potansiyel

$$V(r, \theta) = \frac{C}{3\epsilon_0} r \cos \theta \quad (r \leq R) \quad (3.81)$$

ve küre dışındaki potansiyel

$$V(r, \theta) = \frac{CR^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (r \geq R) \quad (3.82)$$

olur. Bu sonuç bize yabancı değil. Örnek 3.8 'de $E_0 \hat{k}$ dış alanındaki küre yüzeyinde toplanan yük dağılımı $3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$ olarak bulunmuştu. O halde, bu örnekte $C = 3\epsilon_0 E_0$ seçilirse, küre dışındaki potansiyel için yine

$$E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$$

bulunur. Küre içindeki potansiyel ise [(3.81) denkleminde bakın]:

$$E_0 r \cos \theta = E_0 z$$

olur ve bu, $-E_0 \hat{k}$ elektrik alanına karşılık gelir. Yani, yüzeyde toplanan yükün alanı (olması gerektiği gibi) dış elektrik alanı içinde sıfırlar.

Problem 3.17 Rodrigues formülünden $P_3(x)$ polinomunu elde edin ve $P_3(\cos \theta)$ 'nın (3.55) denklemini $l = 3$ için sağladığını gösterin. P_3 ile P_1 'in birbirine dik olduğunu, integral olarak gösterin.

Problem 3.18 (a) Bir küre yüzeyindeki potansiyel sabit V_0 değerindedir. Örnek 3.6 ve 3.7 sonuçlarını kullanarak küre içinde ve dışında potansiyeli bulun. (Elbette yanıtları biliyorsunuz—bu sadece sonuçların tutarlı olduğunu görmek içindir.)

(b) Örnek 3.9 sonuçlarını kullanarak, yüzeyinde düzgün σ_0 yük yoğunluğu bulunan küresel kabuk içinde ve dışında potansiyeli bulun.

Problem 3.19 Bir küre yüzeyindeki potansiyel

$$V_0(\theta) = k \cos 3\theta$$

3.3. DEĞİŞKEN AYRIMI

olarak veriliyor (k bir sabit). Küre içinde ve dışında potansiyeli, küre yüzeyindeki $\sigma(\theta)$ yük yoğunluğunu bulun. (Küre içinde veya dışında yük bulunmadığını varsayın.)

Problem 3.20 İçinde veya dışında yük bulunmayan bir küre yüzeyinde potansiyel $V_0(\theta)$ olarak belirtilmiştir. Küre yüzeyindeki yük yoğunluğunun

$$\sigma(\theta) = \frac{\epsilon_0}{2R} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 C_l P_l(\cos \theta) \quad (3.83)$$

$$C_l = \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.84)$$

bağıntılarıyla bulunacağını ispatlayın.

Problem 3.21 Yüklü bir metal kürenin yarıçapı R ve yükü Q 'dur. Bu küre düzgün bir \vec{E}_0 dış elektrik alanı içine konuyor. Küre dışında potansiyeli bulun. (Potansiyelin sıfır referans noktasını nasıl seçtiğinizi açıkça belirtin.)

Problem 3.22 Problem 2.26 'da düzgün yüklü bir disk eksen üzerindeki potansiyel

$$V(r, 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{r^2 + R^2} - r)$$

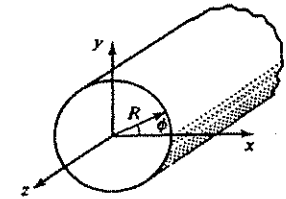
olarak bulunmuştu. (a) Bu sonucu ve $P_l(1) = 1$ özelliğini kullanarak, diskin eksen dışında ve $r > R$ olan bir noktadaki potansiyeli yaklaşık olarak, (3.67) formülünde ilk üç terimi alarak hesaplayın.

(b) Aynı yöntemle, (3.61) formülünü kullanarak $r < R$ için potansiyeli bulun. (Not: İç bölgeyi disk üstünde ve altında iki yarımküre olarak düşünmelisiniz. Her iki yarımkürede A_l katsayılarının aynı olduğunu varsaymayın.)

Problem 3.23 R yarıçaplı küresel kabuğun "kuzey" yarımküresi üzerinde düzgün σ_0 yüzey yük yoğunluğu, "güney" yarımküresi üzerinde ise $-\sigma_0$ yüzey yük yoğunluğu vardır. Küre içinde ve dışındaki potansiyeli (katsayıları A_6, B_6 'ya kadar hesaplayarak) bulun.

• **Problem 3.24** Laplace denklemini değişken ayrımı yöntemiyle silindirik koordinatlarda çözün. Silindirik simetri (yani z 'den bağımsız) olduğunu varsayın. Radyal denklemin tüm çözümlerini bulduğunuzdan emin olun. Yanıtınız sonsuz doğrusal telin potansiyelini verebiliyor mu?

Problem 3.25 R yarıçaplı sonsuz silindir şeklindeki metal bir boru, düzgün \vec{E}_0 elektrik alanına dik yönde konulmuştur. Boru yüzeyinde toplanan yüzey yükünü bulun.



Şekil 3.24

Problem 3.26 R yarıçaplı sonsuz silindir yüzeyinde

$$\sigma = a \sin 5\phi$$

yüzey yük yoğunluğu vardır (Şek. 3.24). Silindir içinde ve dışında potansiyeli bulun.

veya, daha açık yazalım:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho d\tau + \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta \rho d\tau + \frac{1}{r^3} \int (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \rho d\tau + \dots \right] \quad (3.91)$$

Potansiyeli $1/r$ 'nin kuvvet serisi olarak veren bu ifadeye **multipol açılımı** denir. $n = 0$ olan birinci terime **monopol terimi** denir ve $1/R$ olarak azalır; ikincisi ($n = 1$) **dipol terimi** olup $1/r^2$ olarak azalır; üçüncüsü ($n = 2$) **kuadrupol terimi** olur ve $1/r^3$ şeklinde azalır; dördüncüsü **oktupol terimi**, ... vb.

(3.90) açılımı bu haliyle tam çözümdür, fakat onun asıl yararı yaklaşık çözümlerde anlaşılır: büyük r değerlerinde sıfırdan farklı ilk terim, yük dağılımının karakterini belirler; daha sonraki terimler buna küçük düzeltmeler olarak eklenebilir.

Problem 3.27 Merkezi orijinde olan a yarıçaplı küre hacminde

$$\rho(r, \theta) = \rho_0 \frac{a}{r^2} (a - 2r) \sin \theta$$

yük yoğunluğu bulunmaktadır (ρ_0 bir sabit, r, θ ise küresel koordinatlarıdır). Küreden çok uzakta ve z -ekseni üzerindeki bir noktada yaklaşık potansiyeli bulun.

3.4.2 Monopol ve Dipol Terimleri

Bir yük dağılımına uzaktan bakıldığında, genellikle monopol terimi daha önemli olur:

$$V_{\text{mon}}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (3.92)$$

Burada $Q = \int \rho d\tau$ dağılımın toplam yüküdür. Yüklerden çok uzakta bu beklenen bir sonuçtur. Özel olarak, orijindeki noktasal bir yük için V_{mon} ifadesi, sadece büyük r için değil, her yerde tam çözümdür. Tabii bu durumda diğer yüksek dereceli terimler sıfır olurlar.

Dağılımın toplam yükü sıfır ise, dipol terimi önemli olacaktır (tabii, bu da sıfır olabilir):

$$V_{\text{dip}}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int (r' \cos \theta) \rho d\tau$$

Burada θ açısı \vec{r} ile \vec{r}' arasında olduğundan

$$r' \cos \theta = \vec{r}' \cdot \hat{r}$$

yazılırsa, dipol terimi şöyle ifade edilir:

$$V_{\text{dip}}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \int \vec{r}' \rho d\tau$$

Buradaki integral artık P noktasının yerine bağlı olmayıp, yük dağılımının **dipol momenti** adını alır:

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho d\tau \quad (3.93)$$

Buna göre, dipol momentinin potansiyel katkısı şöyle olur:

$$V_{\text{dip}}(P) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.94)$$

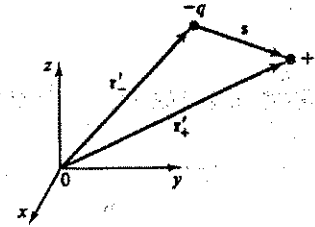
3.4. MULTİPOL AÇILIMI

Dipol momenti yük dağılımının geometrisine bağlıdır. (3.93) formülünü boyca yoğunluk, yüzeysel yoğunluk için nasıl değiştireceğimizi biliyoruz (bkz. Kısım 2.1.4). Örneğin, noktasal yüklerden oluşan bir sistemin dipol momenti

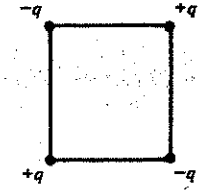
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i' \quad (3.95)$$

Gerçek bir dipol (eşit ve zıt iki yük) için, dipol momenti

$$\vec{p} = q\vec{r}'_+ - q\vec{r}'_- = q(\vec{r}'_+ - \vec{r}'_-) = q\vec{s} \quad (3.96)$$



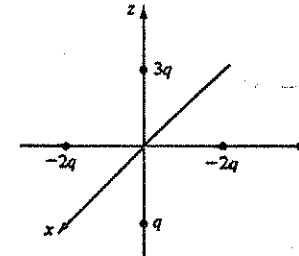
Şekil 3.28



Şekil 3.29

olur. Burada \vec{s} vektörü negatif yükten pozitif yük doğru alınır (Şek. 3.28). Bu ifadeyi (3.94) formülünde kullanırsanız, Örnek 3.10'daki sonucu bulabilirsiniz. Ama dikkat edin: V_{dip} terimi hala dipolün *yaklaşık* potansiyelidir—daha yüksek mertebeden katkılar da olabilir. Yüklerden ne kadar uzağa gidilirse, yüksek mertebeden terimler daha hızlı sıfıra gideceği için, V_{dip} gerçek potansiyele o kadar daha iyi bir yaklaşıklık olur. Benzer şekilde, sabit r uzaklığından bakıldığında, yükler arasındaki s uzaklığını ne kadar küçültürseniz, dipol yaklaşıklığı o kadar daha iyi olur. Potansiyeli tam (3.94) formülüyle verilen "ideal" bir dipol için s uzaklığı sıfıra gitmelidir. Ama bu durumda dipol momentinin sıfıra gitmesini önlemek için, q yükünü de sonsuz almak gerekir! O halde ideal dipol, $s \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$ olurken $qs = p$ sabit kalan yapay bir limittir.

Dipol momentleri birer *vektördür* ve vektörler gibi toplanırlar. \vec{p}_1 ve \vec{p}_2 gibi iki dipol varsa, toplam dipol moment $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ olur. Örneğin, Şek. 3.29'daki gibi, bir karenin köşelerine konulan dört yüklü sistemin net dipol moment $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ sıfır olur. Bu yükleri ister düşey yönde iki dipol gibi toplayın ($\uparrow + \downarrow = 0$), ister yatay iki dipol gibi toplayın ($\leftarrow + \rightarrow = 0$), sıfır bulursunuz. (Bu sistem, daha önce sözünü ettiğimiz *kuadrupoldür*, ve uzak mesafelerdeki yaklaşık potansiyeli kuadrupol terimi ile verilir.)



Şekil 3.30

Problem 3.28 Yükleri $q, 3q, -2q$ ve $-2q$ olan dört noktasal yük Şek. 3.30'daki gibi eksenler üzerinde eşit d uzaklıklarında bulunmaktadır. Orijinden çok uzakta bir P noktasındaki

potansiyeli yaklaşık hesaplayın. (Yanıtınızı P noktasının (r, θ, ϕ) küresel koordinatlarıyla ifade edin.)

Problem 3.29 Örnek 3.9'da $\sigma = C \cos \theta$ yüzey yük yoğunluğu bulunan R yarıçaplı küre potansiyelinin tam çözümü bulunmuştur.

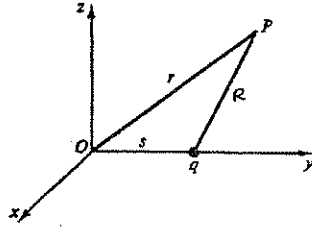
(a) Bu yük dağılımının dipol momentini bulun.

(b) Küreden çok uzaktaki bir noktada yaklaşık potansiyeli bulun ve (3.82) denklemindeki tam çözümle karşılaştırın. Daha yüksek mertebeden momentler için ne söyleyebilirsiniz?

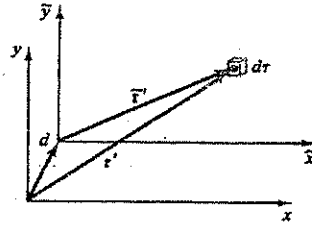
Problem 3.30 Örnek 3.10'daki dipol hesabındaki $1/R_{\pm}$ açılımını $(s/r)^3$ mertebesine kadar sürdürün ve potansiyeldeki kuadrupol ve oktopol momentleri için birer ifade çıkarın.

3.4.3 Multipol Açılımında Orijin Seçimi

Yukarda, orijindeki noktasal yükün "ideal" bir monopol olduğunu söyledim. Fakat, yük orijinde değilse artık ideal monopol olmaz. Örneğin, Şek. 3.31'deki yükün $\vec{p} = qsj$ kadar bir dipol momentine vardır; dolayısıyla potansiyelin multipol açılımında bir de dipol terimi kazanır. Bu yük için $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ monopol potansiyeli tam çözüm değildir; tam çözüm $q/(4\pi\epsilon_0 R)$ olur. Dikkat ederseniz multipol açılımı orijinden uzaklığın tersinin $(1/r)$ kuvvet serisidir, $1/R$ seri olarak açılırsa, sadece ilk değil, diğer tüm terimler de gelir.



Şekil 3.31

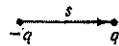


Şekil 3.32

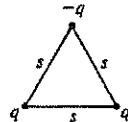
O halde, orijin yer değiştirdiğinde (veya, buna eşdeğer olarak, yük yer değiştirdiğinde) multipol açılımı değişebilir. Q monopol momentine değişmeyecektir, çünkü toplam yük koordinat seçiminden bağımsızdır. Orijin yer değiştirirse dipol momentine genelde değişir, ama önemli bir duruma dikkat: Eğer toplam yük sıfırsa, dipol momentine orijin seçiminden bağımsız olur. Şek. 3.32'de gösterildiği gibi, orijini \vec{d} kadar öteleyelim. Yeni dipol momentine şöyle olur:

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho d\tau = \int (\vec{r}' - \vec{d}) \rho d\tau = \int \vec{r}' \rho d\tau - \vec{d} \int \rho d\tau = \vec{p} - \vec{d}Q$$

Özel olarak, $Q = 0$ ise $\vec{p} = \vec{p}$ olur. Yani, birisi size



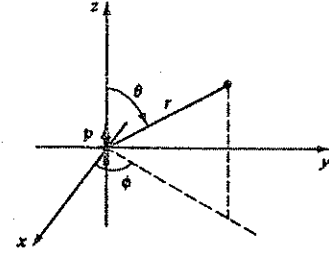
sisteminin dipol momentini sorarsa qs diye yanıtırsınız. Ama



sisteminin dipol momentini sorarlarsa, "hangi orijine göre?" diye sormanız gerekir.

3.4. MULTİPOL AÇILIMI

3.4.4 Dipolün Elektrik Alanı



Şekil 3.33

Buraya kadar hep potansiyelle çalıştık. Şimdi ideal bir dipolün elektrik alanını hesaplayalım. \vec{p} momentine orijinde ve z -ekseni yönünde alınır (Şek. 3.33), potansiyeli veren (3.94) formülü şöyle olur:

$$V_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.97)$$

Elektrik alan potansiyelin negatif gradyanıdır:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

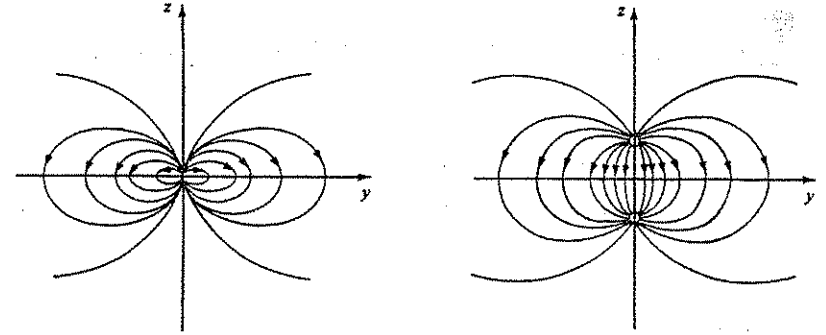
$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

Buna göre, elektrik alan vektörü

$$\vec{E}_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (3.98)$$

Dipol alanının $1/r^3$ olarak azaldığına dikkat edin; monopol alanı $Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ uzaklığın karesiyle ters orantılıydı. Benzer şekilde, kuadrupol alanı $1/r^4$, oktopol alanı da $1/r^5$ olarak azalacaktır. (Görüldüğü gibi, gradyan alınınca potansiyeldeki $1/r$ kuvvetleri bir artar.)



(a) İdeal dipolün alanı

Şekil 3.34

(b) Fiziksel dipolün alanı

Şek. 3.34a'da ideal dipolün alan çizgileri görülmektedir. Kıyaslamak için, "fiziksel" bir dipolün alanını da Şek. 3.34b'de gösterdim. Merkez bölgesini elinizle kapatırsanız, iki şeklin ne kadar benzediğini görürsünüz. Fakat, orijin civarında iki şekil arasında büyük fark vardır.

O halde, (3.98) formülü ancak $r \gg s$ olduğunda gerçek bir dipol alanını temsil edebilir. Bunu sağlamak için, ya büyük r uzaklığına gidilir, yahut da yükler birbirine iyice yaklaştırılır.

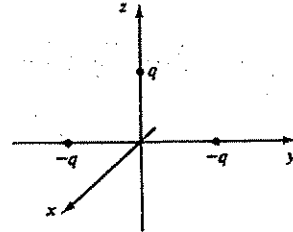
Problem 3.31 Orijinde z -ekseni yönünde konulmuş "ideal" bir dipol vardır.

(a) $(a, 0, 0)$ noktasına konulan bir q yüküne etkiyen kuvveti (kartezyen koordinatlarda) hesaplayın.

(b) $(0, 0, a)$ noktasına konulan q yükü üzerindeki kuvvet ne olur?

(c) q yükünü $(a, 0, 0)$ dan $(0, 0, a)$ 'ya getirmek için ne kadar iş yapılır?

Problem 3.32 Üç yük Şek. 3.35'teki gibi orijinden aynı d uzaklığında bulunmaktadır. Orijinden çok uzaklarda yaklaşık elektrik alanı bulun. Küresel koordinatlarda hesap yapın ve multipol açılımında ilk iki terimi tutun.



Şekil 3.35

• **Problem 3.33** İdeal bir dipolün elektrik alanının

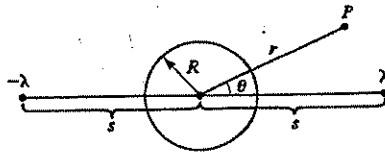
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}]}{r^3} \quad (3.99)$$

olarak yazılabileceğini gösterin. (Bu ifadenin (3.98) formülüne göre avantajı, her koordinat sisteminde geçerli olmasıdır.)

BÖLÜM 3 ÜZERİNE EK PROBLEMLER

Problem 3.34 Kütlesi m olan noktasal bir q yükü sonsuz iletken bir düzlem üzerine d yükseklikten bırakılıyor. Düzleme çarpıncaya kadar geçen süre ne olur? (Yanıt: $(\pi/q)\sqrt{md^3/2}$).

Problem 3.35 Birbirine paralel sonsuz iki metal düzlem arasındaki uzaklık a 'dır. Bir q yükü aradaki bölgeye, levhalardan birinden x uzaklığa konuyor. q üzerine etkiyen kuvveti bulun. Yanıtınızı $a \rightarrow \infty$ ve $x = a/2$ limitlerinde kontrol edin.



Şekil 3.36

Problem 3.36 R yarıçaplı sonsuz iletken silindirin iki yanında, eşit s uzaklıkta paralel ve boyca yük yoğunlukları $\pm\lambda$ olan sonsuz iki doğrusal tel vardır (Şek. 3.36). Silindirin net yükü sıfırdır. P noktasında potansiyeli bulun.

$$\left(\text{Yanıt: } V(r, \theta) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{(r^2 + s^2 + 2rs \cos \theta)[(rs/R)^2 + R^2 - 2rs \cos \theta]}{(r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta)[(rs/R)^2 + R^2 + 2rs \cos \theta]} \right\} \right)$$

Problem 3.37 Sabit V_0 potansiyelinde tutulan a yarıçaplı iletken kürenin çevresinde eş

PROBLEMLER

merkezli b yarıçaplı küresel bir kabuk vardır. Kabuk yüzeyindeki yük yoğunluğu

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$$

olarak belirlenmiştir (σ_0 bir sabit ve θ kutup açısıdır).

(a) $r > b$ ve $a < r < b$ bölgelerinde potansiyeli bulun.

(b) İletken yüzeyinde toplanan $\sigma_i(\theta)$ yük yoğunluğunu bulun.

(c) Bu sistemin toplam yükü ne kadardır? Yanıtınızın büyük r uzaklığında V nin davranışıyla tutarlı olduğunu kontrol edin.

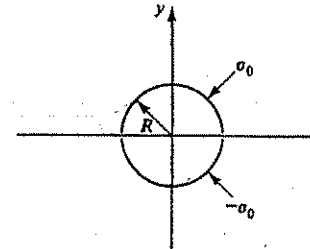
$$\left(\text{Yanıt: } V = \begin{cases} aV_0/r + (b^3 - a^3)\sigma_0 \cos \theta / (3\epsilon_0 r^2) & r \geq b \\ aV_0/r + (r^3 - a^3)\sigma_0 \cos \theta / (3\epsilon_0 r^2) & r \leq b \end{cases} \right)$$

Problem 3.38 z -ekseni üzerine $[-a, a]$ aralığında toplam $+Q$ yükü düzgün olarak dağılmıştır. $r > a$ olmak üzere, (r, θ) koordinatlı bir noktadaki potansiyelin

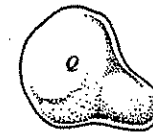
$$V(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_4(\cos \theta) + \dots \right]$$

olduğunu gösterin. (Yol gösterme: $|x| < 1$ için $\log[(1+x)/(1-x)] = 2[x + x^3/3 + x^5/5 + x^7/7 + \dots]$ olur.)

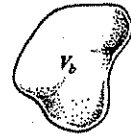
Problem 3.39 R yarıçaplı sonsuz silindirik kabuğun üst yarısında düzgün σ_0 yük yoğunluğu, alt yarısında ise $-\sigma_0$ yük yoğunluğu vardır (Şek. 3.37). Silindirin içinde ve dışında elektrik alanı bulun.



Şekil 3.37



(a)



(b)

Şekil 3.38

Problem 3.40 $z = -a$ ile $z = +a$ arasında uzanan doğrusal tel üzerindeki boyca yük yoğunluğu (a) $\lambda = \lambda_0 \cos(\pi z/2a)$; (b) $\lambda = \lambda_0 \sin(\pi z/a)$; (c) $\lambda = \lambda_0 \cos(\pi z/a)$ olarak veriliyor (λ_0 bir sabit). Herbiri için potansiyelin multipol açılımında sıfırdan farklı ilk terimi hesaplayın.

• **Problem 3.41** R yarıçaplı bir küre içinde dağılmış tüm yüklerin ortalama potansiyeli

$$E_{ort} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{R^3} \quad (3.100)$$

olur; \vec{p} toplam dipol momentidir. Bu sade güzellikteki formül türlü yollarla ispatlanabilir. İşte bunu ispatlamanın bir yolu:

(a) Küre içinde bir P noktasındaki tek bir q yükünün ortalama elektrik alanı ile, yük yoğunluğu $\rho = -q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ olan düzgün yüklü kürenin bu P noktasındaki elektrik alanının aynı olduğunu gösterin. Yani,

$$E_{ort} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\frac{4}{3}\pi R^3)} \int \frac{q}{R^2} \hat{R} d\tau \quad (3.101)$$

olduğunu gösterin. Burada \vec{R} , P noktasından $d\vec{r}$ elemanına çizilen vektördür.

(b) Düzgün yüklü kürenin elektrik alanını Gauss yasasından bulun (bkz. Problem 2.12). Cevabınızı q yükünün dipol momenti cinsinden ifade edin.

(c) Bu sonucu, toplanabilirlik ilkesini kullanarak, herhangi bir yük dağılımına genelleştirin.

(d) Küre dışındaki tüm yüklerin küre içindeki ortalama elektrik alanı ne olur?

Problem 3.42 (a) Bir ρ_1 yük dağılımı yalnız başına $V_1(\vec{r})$ potansiyelini, diğer bir ρ_2 yük dağılımı ise yalnız başına $V_2(\vec{r})$ potansiyelini oluşturuyorlar. (İki sistem birbirinden tümüyle farklı olabilir—örneğin 1.sistem düzgün yüklü küre, 2.sistem düzlem kapasitör olabilir.) Green karşılık teoremi denilen şu formülü ispatlayın:

$$\int_{\text{tüm uzay}} \rho_1 V_2 d\tau = \int_{\text{tüm uzay}} \rho_2 V_1 d\tau$$

(Yol gösterme: $\int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau$ integralini iki şekilde hesaplayın: önce $\vec{E}_1 = -\nabla V_1$ alın ve kısmi integrasyon uygulayın; sonra aynı işi \vec{E}_2 için yapın.)

(b) Şimdi Şek. 3.38'deki iki iletkeni gözönüne alın. Sadece a iletkenine Q yükü verdiğinizde b iletkeninin potansiyeli V_b olsun. Öte yandan, a iletkeni yüksüzken b iletkenine aynı Q yükü verdiğinizde a iletkeninin potansiyeli V_a olsun. Green karşılık teoremini kullanarak $V_a = V_b$ olduğunu gösterin. (Bu sonuç şaşırtıcıdır; çünkü iki iletkenin yapısı ve geometrisi hakkında hiçbir varsayım yapılmadı.)

Problem 3.43 Problem 3.42'deki Green karşılık teoremini kullanarak şu iki problemi çözün. (Yol gösterme: 1. dağılım olarak gerçek durumu alın, 2. dağılımda ise q yükünü kaldırıp iletkenlerden birini V_0 potansiyelinde tutun.)

(a) Bir düzlem kapasitörün iki levhası topraklanmış ve aradaki bölgeye, 1. levhadan x uzaklıkta noktasal bir q yükü konulmuştur. Düzlemler arasında d uzaklığı vardır. Her bir levhada toplanan yükü bulun. (Yanıt : $Q_1 = q(x/d - 1)$; $Q_2 = -qx/d$.)

(b) Yarıçapları a ve b olan eşmerkezli iki küresel kabuk topraklanmış ve aradaki bölgeye merkezden r uzaklıkta noktasal q yükü konulmuştur. Herbir küre üzerinde toplanan yükü bulun.

Problem 3.44 Multipol açılımındaki kuadrupol teriminin

$$V_{\text{kuad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij} \right)$$

şeklinde ifade edileceğini gösterin. Buradaki kuadrupol moment tensörünün bileşenleri

$$Q_{ij} = \int (3r_i' r_j' - (r')^2 \delta_{ij}) \rho d\tau$$

olup, δ_{ij} Kronecker deltasıdır.

(b) Şek. 3.29'daki sistem için Q_{ij} tensörünün dokuz bileşenini hesaplayın. (Karenin merkezini orijinde ve kenar uzunluğunu s alın.)

(c) Eğer, monopol ve dipol momentleri sıfır ise, kuadrupol momentinin orijin seçiminden bağımsız olduğunu gösterin. (Bu hiyerarşi böyle gider: sıfırdan farklı ilk multipol momentinin değeri orijin seçiminden bağımsızdır.)

Problem 3.45 Örnek 3.8'de düzgün bir \vec{E}_0 dış elektrik alanına konulan R yarıçaplı iletken kürenin elektrik alanını hesaplamıştık. Aynı problemi görüntü yöntemiyle çözün ve yanıtınızın (3.71) denkleminde uyduğunu görün. (Yol gösterme: Örnek 3.2'yi izleyin, ama q yükünün tam tersi yönde diğer bir $-q$ yükü daha koyun. $s \rightarrow \infty$ olurken $2q/(4\pi\epsilon_0 s^2) = E_0$ değerini sabit tutun.)

4

DİELEKTRİK ORTAMLAR

4.1 POLARİZASYON

4.1.1 Dielektrikler

Bu bölümde elektrik alanının madde içindeki etkilerini araştıracağız. Madde türlü hallerde olabilir—katı, sıvı, gaz, metal, tahta, cam— ve tüm bu maddeler elektrostatik alanda farklı davranış gösterirler. Fakat, gündelik hayatta kullanılan maddelerin çoğu iki ana grupta toplanabilirler: iletkenler ve yalıtkanlar (veya dielektrikler). İletkenlerden daha önce söz etmiştik; bu maddelerin içinde serbestçe dolaşabilen sınırsız sayılabilecek miktarda elektron bulunur. Fiziksel olarak, metal atomlarından herbirinin bir veya iki elektronu belli bir atoma bağlı olmayıp, ortamda serbestçe dolaşabilir. Buna karşılık dielektriklerde tüm yükler belirli atom veya moleküllere bağlıdır—hareketleri molekül içinde sınırlıdır. Bu mikroskopik yer değiştirmeler iletkenlerdeki kadar dramatik olmasa da, toplam etki dielektrik maddelerin karakteristik davranışlarını belirler. Bir elektrik alanında dielektrik atom veya moleküllerin yük dağılımları başlıca iki şekilde değişebilir: *genleşme* ve *dönme*. Önce bu davranışları inceleyelim.

4.1.2 Etkileşmeli Dipoller

Nötr bir atom \vec{E} dış elektrik alanı içine konulduğunda ne olur? İlk bakışta, atom yüksüz olduğuna göre, hiçbir değişiklik olmayacağını düşünebilirsiniz. Fakat, bu doğru değildir. Atom bir bütün olarak yüksüz olabilir, fakat pozitif yükler çekirdekte toplanmış, negatif yüklü elektronlar ise çekirdeğin çevresine dağılmıştır. Bu iki bölge dış elektrik alandan farklı şekilde etkilenirler: çekirdeğe alan yönünde bir kuvvet uygulanırken, elektronlar zıt yönde itilirler. İlke olarak, alan şiddeti yeterince büyükse, atomun elektronlarını koparıp onu iyonlaştırabilir. Fakat normal şiddette alanların etkisiyle, atomda yeni bir denge oluşur: elektronların yük merkezi çekirdekle çakışık olmayan yeni bir konuma yer değiştirir. Bu pozitif ve negatif yük merkezleri arasındaki çekim kuvveti atomu bir arada tutar. Bu süreç— \vec{E} alanında çekirdek ve elektronların zıt yönde yer değiştirmesi, iki yük merkezinin birbirini çekmesi—sonunda dengeye ulaştığında polarize olmuş bir atom elde ederiz. Şimdi atomun, elektrik alanla aynı yönde bir \vec{p} dipol momenti vardır. Eğer elektrik alan fazla büyük değilse, bu etkileşmeli dipol elektrik alanına orantılı olur:

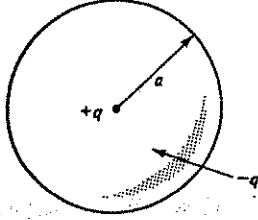
$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (4.1)$$

Buradaki α orantı katsayısına atomik polarizabilite katsayısı denir. Büyüklüğü atomun yapısına bağlıdır. Tablo 4.1'de deneysel olarak gözlenen bazı atomik polarizabilite katsayıları verilmiştir.

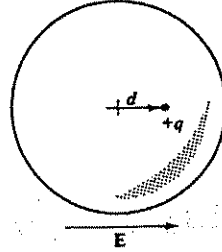
Tablo 4.1 Atomik Polarizabilite Katsayıları
(Tabloda $\alpha/(4\pi\epsilon_0)$ oranı 10^{-30} m birimiyle verilmiştir.)

Element :	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K
	0.66	0.21	12	9.3	1.5	0.4	27	1.6	34

Örnek 4.1 : İkel bir atom modelinde, $+q$ yüklü noktasal bir çekirdek ve a yarıçaplı küre hacmi içinde düzgün dağılmış $-q$ yüklü elektron bulutu vardır (Şek. 4.1). Bu atomun polarizabilite katsayısını hesaplayın.



Şekil 4.1



Şekil 4.2

Çözüm : Şek. 4.2 'de gösterildiği gibi, \vec{E} dış elektrik alanında çekirdek sağ tarafa, elektron bulutu da sol tarafa hafifçe yer değiştirecektir. Bu yer değiştirme çok küçük olduğundan, elektron bulutunun küresel biçimini koruduğunu varsayabiliriz (bkz. Problem 4.1). Çekirdek küre merkezinden d kadar uzaktayken denge oluştuğunu varsayalım. Bu uzaklıkta, çekirdeğin sağa iten dış alan kuvveti ile, sola doğru çeken iç alanın kuvveti birbirini dengeler: $E = E_e$ olup E_e elektron bulutunun elektrik alanıdır. Düzgün yüklü bir kürenin merkezinden d uzaklıkta elektrik alan ifadesini, Gauss yasasıyla kolayca bulabiliriz (bkz. Problem 2.12):

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3}$$

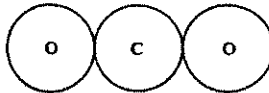
O halde, denge durumunda

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3}, \quad \text{veya} \quad p = qd = (4\pi\epsilon_0 a^3) E$$

bulunur ve orantı katsayısı atomik polarizabiliteyi verir:

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 = 3\epsilon_0 v \quad (4.2)$$

Burada v atomik hacimdir. Bu model çok ilkel olmakla birlikte, (4.2) formülü yaklaşık iyi (deneysel değerden dört beş kat daha fazla) sonuç verir.



Şekil 4.3

Moleküllerde durum bu kadar basit değildir, çünkü moleküller her yönde farklı şekilde polarize olabilirler. Örneğin karbon dioksit (Şek. 4.3) molekülünde, dış alanı molekül doğrultusunda uygularsanız polarizabilite $4.5 \times 10^{-40} \text{ C}^2 \cdot \text{m/N}$, moleküle dik doğrultuda uygularsanız sadece $2 \times 10^{-40} \text{ C}^2 \cdot \text{m/N}$ olur. Molekül eksenine açı yapan bir elektrik alan uygulandığında, etkileşmeli dipol momenti bu iki doğrultudaki bileşenlere ayrılıp her yönde farklı polarizabilite katsayısı kullanılmaktadır:

$$\vec{p} = \alpha_{\perp} \vec{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \vec{E}_{\parallel}$$

4.1. POLARİZASYON

Bu durumda dipol momenti elektrik alandan farklı bir yönde oluşabilir. Hiçbir simetrisi olmayan bir molekül için \vec{E} ile \vec{p} arasındaki bağıntının en genel ifadesi

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \\ p_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \\ p_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Buradaki dokuz tane α_{ij} sabitleri molekülün polarizabilite tansörü adını alır. Bu sabitlerin aldıkları değerler seçtiğiniz koordinat eksenlerine bağlıdır. Molekülün asal eksenleri seçilirse, köşegen dışındaki elemanlar sıfır olur ve sadece $\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{zz}$ asal polarizabilite katsayıları kalır.

Problem 4.1 Levhaları arasında 1 mm uzaklık olan ve 500 V 'luk bataryaya bağlı iki metal levha arasındaki bölgede, Bohr yarıçapı 0.5 angström olan bir hidrojen atomu bulunmaktadır. Etkileşme sonucu oluşan d uzaklığının atom yarıçapına oranı ne kadardır? (Not: Gördüğünüz gibi, yer değiştirme gerçekten çok küçüktür.)

Problem 4.2 Kuantum mekanikine göre, taban durumundaki hidrojen atomunda elektron yük yoğunluğu

$$\rho = \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a}$$

olur; burada q elektron yükü ve a Bohr yarıçapıdır. Bu atomun polarizabilite katsayısını bulun.

Problem 4.3 (4.1) formülüne göre bir atomun etkileşmeli dipol momenti dış alanla doğru orantılıdır. Bu kesin bir yasa olmayıp, "göz kararı" bir kuraldır ve buna uymayan teorik durumlar düşünülebilir. Örneğin, R yarıçaplı küre içindeki elektron yoğunluğunun merkezden uzaklıkla orantılı olduğunu varsayalım. Bu durumda p ile E arasındaki bağıntı ne olur? (4.1) formülünün geçerli olması için $\rho(r)$ -yoğunluğunun sağlaması gereken koşullar nedir?

Problem 4.4 Polarizabilitesi α olan nötr bir atomdan r uzaklığa noktasal bir $-q$ yükü konuyor. r 'nin çok büyük olduğu durumda, aradaki kuvveti bulun.

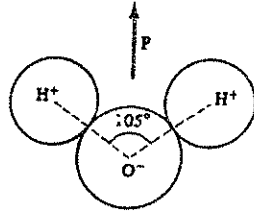
4.1.3 Polar Moleküller

Yukarıda ele aldığımız nötr atomun başlangıçta dipol momenti yoktu, uygulanan elektrik alanla etkileşerek dipol kazandı. Bazı moleküllerin ise kalıcı dipol momentleri vardır. Örneğin, su molekülünde elektronlar oksijen molekülü civarında toplanırlar (Şek. 4.4); molekül 105° kıvrılmış olduğundan köşe noktasında negatif yük toplanır, uçlarda ise pozitif yük kalır. (Suyun dipol momenti büyüktür: $6.1 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$. Suyun eritici özelliği de buradan kaynaklanır.) Bu tür polar moleküller bir dış elektrik alanına konulduğunda ne olur? Elektrik alan düzgün ise, pozitif uçtaki $\vec{F}_+ = q\vec{E}$ kuvveti, negatif uçtaki $\vec{F}_- = -q\vec{E}$ kuvvetini sıfırlar (Şek. 4.5). Fakat, kuvvet sıfır olsa da, bir tork (dönme momenti) vardır:

$$\vec{N} = (\vec{r}_+ \times \vec{F}_+) + (\vec{r}_- \times \vec{F}_-) = \left[\left(\frac{\vec{s}}{2} \right) \times (q\vec{E}) \right] + \left[\left(-\frac{\vec{s}}{2} \right) \times (-q\vec{E}) \right] = q\vec{s} \times \vec{E}$$

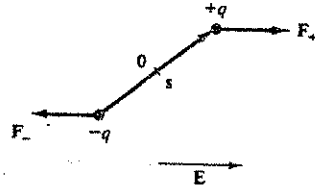
O halde, bir \vec{p} dipolüne düzgün \vec{E} alanında etkiyen tork şöyle olur:

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (4.4)$$



Şekil 4.4

4. DİELEKTRİK ORTAMLAR



Şekil 4.5

Dikkat ederseniz \vec{N} torku \vec{p} dipolünü, \vec{E} alanına paralel olacak şekilde döndürür. Demek ki serbest bir dipol momenti, uygulanan dış alan yönünde olmaya çalışır.

Elektrik alan düzgün değilse, \vec{F}_+ ile \vec{F}_- birbirini sıfırlamaz ve dipol üzerinde, torka ilave olarak, net bir kuvvet oluşur. Fakat bu kuvvetin gerçekten önemli olabilmesi için \vec{E} alanındaki değişimin çok şiddetli olması gerekir; bu nedenle dielektriklerin özellikleri incelenirken kuvvet gözönüne alınmaz. Buna rağmen, düzgün olmayan elektrik alanda bir dipole uygulanan kuvveti hesaplayalım, çünkü sonuç ilginçtir:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q(d\vec{E})$$

Burada $d\vec{E}$ artı ve eksi uçlardaki elektrik alanları arasındaki farktır. Dipol boyunun çok küçük olduğunu kabul edersek, bu artış (1.25) formülüyle hesaplanabilir. Örneğin, E_x bileşenindeki küçük artış

$$dE_x = (\vec{\nabla} E_x) \cdot \vec{s}$$

olur. E_y ve E_z bileşenleri için de benzer bağıntılar vardır. Bunları birlikte ifade etmek istersek

$$d\vec{E} = (\vec{s} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

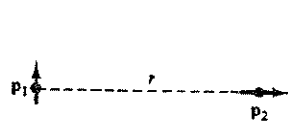
olur. Buradan, dipol üzerindeki kuvvet bulunur:

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

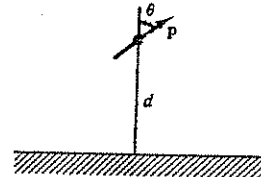
(4.5)

Tork için bulunan (4.4) denklemini, düzgün olmayan elektrik alanında da "ideal", yani noktasal dipol için tam doğrudur. Fiziksel dipoller için bu formüller yaklaşık olur.

Problem 4.5 Şek. 4.6'daki ideal \vec{p}_1 ve \vec{p}_2 dipolleri arasında r uzaklığı bulunmaktadır. \vec{p}_2 'nin \vec{p}_1 'e uyguladığı tork ne kadardır? \vec{p}_1 'in \vec{p}_2 'ye uyguladığı tork ne olur?



Şekil 4.6



Şekil 4.7

Problem 4.6 Topraklanmış sonsuz bir iletken düzlemde d yükseklikte bir \vec{p} dipolü vardır (Şek. 4.7). Dipol düşey doğrultuyla θ açısı yapıyor. \vec{p} üzerindeki torku bulun. Dipol serbestçe dönebiliyorsa, hangi yönde dengede olur?

4.2. POLARİZE OLMUŞ BİR CİSMİN ELEKTRİK ALANI

Problem 4.7 Bir dış elektrik alandaki dipolün enerjisinin

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (4.6)$$

olduğunu gösterin.

Problem 4.8 Birbirinden \vec{r} kadar uzakta iki dipolün etkileşme enerjisinin

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})}{r^3} \quad (4.7)$$

olduğunu gösterin. (Yol gösterme: Problem 4.7 ve (3.99) formülünü kullanın.)

Problem 4.9 Problem 4.5'teki iki dipolü tekrar ele alıp, \vec{p}_1 dipolünün \vec{p}_2 'ye uyguladığı kuvveti bulun. Sonra (bu daha zordur) \vec{p}_2 'nin \vec{p}_1 'e uyguladığı kuvveti hesaplayın. Yanıtlarınız Newton'un üçüncü yasası ile uyumlu olur mu?

4.1.4 Polarizasyon

Buraya kadar olan kısımlarda bir dış alanın tek atom veya molekül üzerindeki etkilerini ele aldık. Şimdi baştaki soruya yanıt verebilecek durumdayız: Dielektrik bir madde elektrik alan içine konulduğunda ne olur? Bu madde nötr atomlar veya apolar moleküllerden oluşuyorsa, elektrik alanın etkisiyle her bir atom veya molekül alan yönünde küçük bir dipol momenti kazanır. Madde polar moleküllerden oluşuyorsa, her bir kaçı dipol momenti üzerine etkiyen tork onu alan yönünde dönmeye zorlayacaktır. (Madde içindeki ısısal çalkantı hareketi bu dönüşün tam olmasını engeller; moleküller sürekli birbiriyle çarpışarak bu süreci bozarlar. Bu nedenle, özellikle yüksek sıcaklıkta, hizaya geliş tam olmaz, ve alan sıfırlandığında kaybolur.)

Dikkat ederseniz, her iki mekanizma aynı temel sonuca yol açar: elektrik alan yönünde çok sayıda küçük dipoller oluşur—yani, dielektrik içinde polarizasyon olur. Bu etkinin derecesini veren polarizasyon vektörü şöyle tanımlanır:

$$\vec{P} \equiv \text{birim hacimdeki dipol momentleri}$$

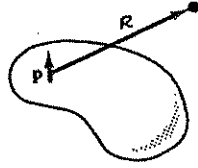
Buradan itibaren polarizasyonun hangi mekanizmayla olduğuna bakmayacağız. Aslında, yukarıda anlattığımız iki mekanizma pek kesin çizgilerle ayrılmış değildir. Polar moleküllerde dahi bir miktar yük yer değiştirmesinden kaynaklanan polarizasyon olur. Bazı maddelerde ise elektrik alan kaldırıldığında polarizasyon sıfırlanmaz. Her neyse, polarizasyonun sebebini unutalım ve polarize olmuş bir maddenin kendi oluşturduğu elektrik alanı inceleyelim.

4.2 POLARİZE OLMUŞ BİR CİSMİN ELEKTRİK ALANI

4.2.1 Bağlı Yükler

Polarize olmuş—yani, içinde çok sayıda küçük dipoller bulunan—bir madde parçası gözönüne alalım. \vec{P} polarizasyon vektörü, yani birim hacimdeki dipol momentleri verilmiş olsun. Soru: Bu cismin kendi oluşturduğu elektrik alan (yani, polarizasyona yol açan dış alan değil) ne olur? Bir kere, tek bir dipolün elektrik alanını biliyoruz; o halde bu cisim sonsuz küçük parçalara bölüp her bir hacimdeki dipollerin katkılarını toplayabiliriz. Ama, her zaman olduğu gibi, potansiyelle çalışmak daha kolaydır. Bir dipolün potansiyelini hatırlatalım [(3.94) formülü]:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (4.8)$$



Şekil 4.8

Burada \vec{R} vektörü dipolün bulunduğu yerden potansiyelin hesaplandığı noktaya çizilen vektördür (Şek. 4.8). Ele aldığımız küçük $d\tau$ hacim elemanı içindeki dipol momentini $\vec{p} = \vec{P} d\tau$ olacağından, polarize olmuş maddenin toplam potansiyelini yazabiliriz:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{hacim}} \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^2} d\tau \quad (4.9)$$

İlke olarak çözümü bulmuş sayılırız. Fakat, biraz matematik cambazlık bunu daha aydınlatıcı bir şekle dönüştürebilir. Önce, şu ifadeyi hatırlayalım:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^2}$$

Burada türev $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ içindeki \vec{r} koordinatına göre alınacaktır. Buna göre

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{hacim}} \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau$$

olur. Kısmi integrasyon için verdiğimiz 5. kuralı uygularsak

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\text{hacim}} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{R} \vec{P} \right) d\tau - \int_{\text{hacim}} \frac{1}{R} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) d\tau \right]$$

ve diverjans teoremi yardımıyla

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{yüzey}} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{a}}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{hacim}} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{R} d\tau \quad (4.10)$$

olur. Birinci terim bir yüzey yük yoğunluğunun potansiyeli yapısındadır. Bu yüzey yüküne σ_b dersek

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (4.11)$$

olur; burada \hat{n} yüzey normal vektörüdür. İkinci terim hacımsal bir yük yoğunluğunun potansiyeli gibidir. Bu yük yoğunluğuna ρ_b dersek

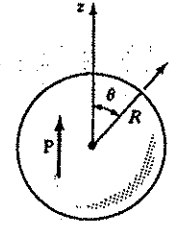
$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (4.12)$$

Bu tanımlara göre potansiyel ifadesi şöyle olur:

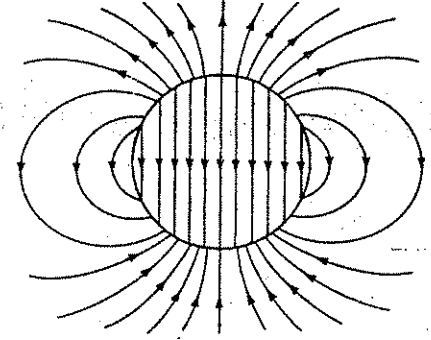
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{yüzey}} \frac{\sigma_b da}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{hacim}} \frac{\rho_b d\tau}{R} \quad (4.13)$$

Bu ifadenin anlamı şudur: Polarize olmuş bir cismin potansiyeli (dolayısıyla, elektrik alanı) $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ kadar bir hacımsal yük yoğunluğu ile, $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ kadar bir yüzey yükünün birlikte oluşturdukları elektrik alana eşdeğerdir. O halde, (4.9) formülündeki gibi sonsuz küçük dipollerin integralini almak yerine, önce bu bağlı yükleri buluruz; daha sonra hacim ve yüzey yüklerinin potansiyellerini bildiğimiz yöntemlerle hesaplayabiliriz.

Örnek 4.2: Düzgün polarize olmuş R yarıçaplı bir kürenin elektrik alanını bulun.



Şekil 4.9



Şekil 4.10

Çözüm: Polarizasyon yönünü z-ekseni olarak seçelim (Şek. 4.9). Hacim içinde polarizasyon her yerde aynı olduğundan, $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$ olur. Ancak, yüzey yük yoğunluğu vardır:

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos \theta$$

Burada θ kutup açısıdır. O halde problem, yüzeyinde $P \cos \theta$ yük yoğunluğu bulunan kürenin potansiyelini bulmaktır. Oysa, bu problemi Bölüm 3'te Örnek 3.9 olarak çözmüştük. Yanıtı buraya alalım:

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta & (r \leq R) \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta & (r \geq R) \end{cases}$$

$r \cos \theta = z$ olduğundan, küre içindeki elektrik alan düzgün olacaktır:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{P}{3\epsilon_0} \vec{\nabla}(z) = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{z} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (r < R) \quad (4.14)$$

Bu sonucu ilerde sıkça kullanacağız. Küre dışındaki potansiyel ise, orijindeki ideal bir dipolün potansiyeli gibidir:

$$V_{\text{dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2} \quad (4.15)$$

Bu iki ifade karşılaştırılırsa, orijindeki eşdeğer dipol momentini şöyle olmalıdır:

$$\vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{P} \quad (4.16)$$

Bu ise, kürenin toplam dipol momentinden başka bir şey değildir.

Düzgün polarize olmuş kürenin elektrik alanı Şek. 4.10'da gösterilmiştir.

Problem 4.10 R yarıçaplı küre içindeki polarizasyon vektörü $\vec{P} = k\vec{r}$ olarak veriliyor (k bir sabit, \vec{r} orijinden itibaren konum vektörüdür).

(a) σ_b ve ρ_b bağlı yük yoğunluklarını bulun.

(b) Küre içinde ve dışında elektrik alanı bulun.

Problem 4.11 Yarıçapı R ve uzunluğu L olan bir silindir içinde, eksene paralel ve düzgün bir \vec{P} polarizasyonu vardır. Bağlı yük yoğunluklarını bulun ve bir şekil üzerinde elektrik alan çizgilerini yaklaşık gösterin. Üç şekil çizin: biri $L \gg R$, diğeri $L \ll R$ ve üçüncüsü $L \approx R$ için olsun. (Bu düzeneğe elektret çubuk denir ve mıknatıs çubuğa eşdeğerdir. Fakat kalıcı elektret çubuk yapılabilecek madde (örneğin, baryum titanat) sayısı pek azdır.)

Problem 4.12 Örnek 4.2'deki düzgün polarize olmuş kürenin potansiyelini doğrudan (4.9) formülüyle hesaplayın.

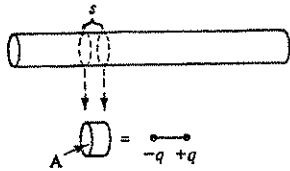
4.2.2 Bağlı Yüklerin Fiziksel Yorumu

Bir önceki kısımda polarize olmuş bir cismin elektrik alanının, σ_b , ρ_b gibi "bağlı yük" yoğunluklarının oluşturduğu elektrik alana eşdeğer olacağını gördük. Fakat bu sonuç bir takım matematik işlemlerle elde edilmişti ve bu bağlı yüklerin ne olduğunu pek anlayamadık. Bazı kitaplar bağlı yüklerin "soyut bir kavram" olduğu izlenimini verir. Bu izlenim yanlıştır: ρ_b ve σ_b gerçek yük yoğunluklarıdır. Şimdi bu yüklerin nasıl oluştuğunu göstermek istiyorum.

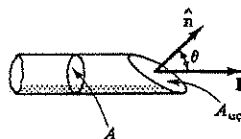


Şekil 4.11

Ana fikir çok basittir: Şek. 4.11'de olduğu gibi, bir doğru üzerinde aynı yönde dizilmiş dipoller gözönüne alalım. Doğru içinde her yerde dipollerden herbirinin artı yükü kendisine komşu olan eksi yükü nötrleyecektir; fakat iki uçta bir artı ve bir eksi yük boşta kalırlar. Sanki bir uçtaki dipolün artı yükü koparılıp diğer uca taşınmış gibi olur. Elbette bu doğru değildir, ama küçük yerdeştirmelerin toplam etkisi buna eşdeğerdir. Uçlardaki bu yüklerin koparılamayacağını belirtmek için bunlara *bağlı yükler* diyoruz. Dielektriklerdeki yükler belirli atom veya moleküllere bağlıdır; bunun dışında, bağlı yüklerin diğer yüklerden bir farkı yoktur.



Şekil 4.12



Şekil 4.13

Belirli bir düzgün polarizasyondan kaynaklanan bağlı yük miktarını bulmak için \vec{P} vektörüne paralel ince bir dielektrik tüp gözönüne alalım (Şek. 4.12). Bu ince dielektrik parçasının dipol momentini PA_s olur (A kesit ve s uzunluktur). Aynı dipol momentini uçlardaki yükler cinsinden yazarsak qs olur. O halde, tüpün pozitif ucunda toplanan yük miktarı

$$q = PA$$

4.2. POLARİZE OLMUŞ BİR CİSMİN ELEKTRİK ALANI

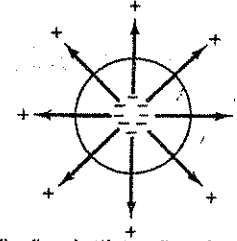
olur. Tüpün uçları dik kesitliyse, yüzey yük yoğunluğu

$$\sigma_b = \frac{q}{A} = P$$

olur. Uçlardaki kesit θ kadar eğik kesilmiş olsaydı (Şek. 4.13), bu kesitin alanına $A_{uç}$ dersek, yine $A = A_{uç} \cos \theta$ olacağından, bu kez yüzey yükü

$$\sigma_b = \frac{q}{A_{uç}} = P \cos \theta = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

olurdu. O halde, düzgün bir polarizasyon yüzeyde $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ kadar bir yüzey yükü oluşturur. Daha önce matematik yolla bulduğumuz bağlı yükün kaynağı budur.



Şekil 4.14

Polarizasyon düzgün değilse, yüzeyde olduğu gibi, madde içinde de yük toplanması olur. Şek. 4.14 incelenirse, uaksak bir \vec{P} vektörünün negatif yüklerin merkezde birikmesine yolaçağı anlaşılır. Belirli bir hacimde biriken $\int \rho_b d\tau$ bağlı yük miktarı, yüzeyden dışarı atılan yüke eşit ve zıt işaretli olacaktır. Yüzeyden atılan yük, yukarıda düzgün polarizasyon için yaptığımız hesaba göre, yine $\vec{P} \cdot \hat{n}$ olacağından

$$\int_{\text{hacim}} \rho_b d\tau = - \int_{\text{yüzey}} \vec{P} \cdot d\vec{a} = - \int_{\text{hacim}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) d\tau$$

Bu hesap her hacim için doğru olduğuna göre;

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

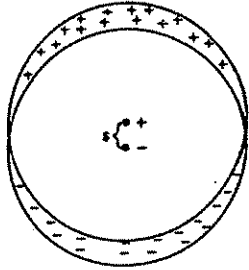
olur ve daha önce matematiksel olarak bulduğumuz sonucu verir.

Örnek 4.3 : Düzgün polarize olmuş küre problemini (Örnek 4.2), bağlı yük kavramıyla çözmenin güzel bir yolu vardır. Polarize küre yerine üst üste bindirilmiş zıt yüklü iki küre düşünelim. Polarizasyon yoksa bu iki küre tamamen çakışır ve birbirinin yüklerini sıfırlar. Düzgün polarizasyon olduğunda (Şek. 4.15), pozitif yüklerin $+z$ yönünde, negatif yüklerin $-z$ yönünde hafifçe yer değiştirdiklerini düşünelim. Artık iki küre tam çakışık değildir; birbirlerini örten bölgede yine yük sıfır olur, ama üst tarafta pozitif ve alt tarafta negatif birer "şapka" kalır. Bu şapka içindeki yük σ_b bağlı yüküdür.

Çözüm : Problem 2.18'de örtüşen iki yüklü kürenin örtüşme bölgesinde elektrik alanı hesapladınız; sonuç şöyleydi:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{s}}{R^3}$$

Burada q pozitif kürenin yükü ve \vec{s} negatif küre merkezinden pozitif küre merkezine çizilen vektördür. Bu sonucu yukardaki kürenin polarizasyonu cinsinden ifade edebiliriz. (4.16)



Şekil 4.15

denklemine göre, $\vec{p} = q\vec{s} = (\frac{4}{3}\pi R^3)\vec{P}$ alınırsa

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

bulunur.

Küre dışında elektrik alanı hesaplamak, her kürenin yükünü kendi merkezindeymiş gibi düşünebiliriz. Böyle bir dipolün potansiyeli

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

olur. Bu ifadeler Örnek 4.2 sonuçlarını doğrulamaktadır.

Problem 4.13 Yarıçapı R olan sonsuz silindir içinde, eksene dik yönde ve düzgün \vec{P} polarizasyonu vardır. (Dikkat edin, *radyal* değil.) Silindir içinde elektrik alanı bulun. Silindir dışındaki alanın

$$\vec{E} = \frac{R^2}{2\epsilon_0 r^2} [2(\vec{P} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{P}]$$

olduğunu gösterin.

Problem 4.14 Nötr bir dielektrik polarize olduğunda bağlı yükler oluşur, ama toplam yük sıfır olmak zorundadır. (4.11) ve (4.12) denklemlerini kullanarak, toplam bağlı yük miktarının sıfır olduğunu gösterin.

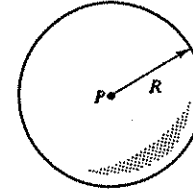
4.2.3 Dielektrik İçinde Elektrik Alan

Yukarda bağlı yük kavramlarını incelerken dipollerin "ideal" olduğunu varsaydım. Oysa, gerçek bir dielektrik madde, boyları çok küçük de olsa, fiziksel dipollerden oluşur. Ayrıca, atom veya moleküllerde toplanmış olan dipol yoğunluğunu sürekli bir \vec{P} vektörüyle temsil ettim. Bu yöntem doğru mudur? Dielektrik dışında bir sorun yoktur: Dış bölgede dipollerden çok uzakta (r büyük) olduğumuzdan, ideal ve fiziksel dipol potansiyelleri arasında gözlenebilir bir fark yoktur. Fakat dielektrik içinde, ideal ve fiziksel dipol potansiyelleri farklıdır.

Ashnda biraz düşünürseniz, madde içindeki elektrik alanın mikroskopik ölçekte hesaplanması son derece güç bir iştir. Örneğin, bir elektronun yanbaşında muazzam bir elektrik alan vardır; biraz uzakta elektrik alan daha küçük ve bambaşka bir yönde olabilir. Bu gerçek mikroskopik alanın hesabı güç olmakla birlikte işe yarar bir büyüklük değildir. Nasıl ki makroskopik ölçekte, suyun molekül yapısını gözardı edip sürekli bir akışkan olarak

4.2. POLARİZE OLMUŞ BİR CİSMİN ELEKTRİK ALANI

ele alabiliyorsak, madde içindeki yerel değişimleri bir yana bırakıp makroskopik elektrik alanı gözönüne alabiliriz. Bu alan, çok küçük ama yine de binlerce atom içeren küçük bir hacimdeki ortalama alandır. Böylece hem mikroskopik alandaki ani değişimleri yumuşatmış oluruz, hem de elektrik alandaki makroskopik değişimleri hesaba katmış oluruz. (pratikte bu, cismin boyutlarından çok küçük bir hacim içinde ortalama demektir.) Fizikçiler "madde içindeki alan" deyimi ile makroskopik elektrik alanı kastederler.



Şekil 4.16

O halde, yukarda ideal dipollerle bulduğumuz sonuçlarda makroskopik alanın söz konusu olduğunu göstermemiz gerekiyor. Burası çok ince bir noktadır, gayreti elden bırakmayım. Dielektrik içindeki bir P noktasında makroskopik alanı bulmak istiyoruz (Şek. 4.16). Küçük bir hacim içinde mikroskopik alanın ortalamasını almam gerekiyor; o halde P noktası etrafında R yarıçaplı bir küre düşünelim (R yarıçapı molekül boyutunun binlerce katı kadar olsun). P noktasındaki makroskopik alanın iki bileşeni vardır: küre içindeki yüklerin alanı ve küre dışındaki yüklerin alanı:

$$\vec{E} = \vec{E}_{dış} + \vec{E}_{iç}$$

Problem 3.41'de küre dışındaki yüklerin ortalama alanının küre merkezindeki alana eşit olduğunu ispatlamıştınız. $\vec{E}_{dış}$ alanı küre dışındaki dipollerin alanıdır: bu dipoller çok uzakta olduğundan, (4.9) formülünü güvenerek kullanabiliriz:

$$V_{dış} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{dış\ hacim} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{R^2} d\tau \quad (4.17)$$

Küre içindeki dipoller çok yakın olduğundan bu yolla hesaplayamayız. Fakat tek istediğimiz, bunların ortalama alanıdır. Yine Problem 3.41'deki sonuca göre, içindeki yük dağılımı ne olursa olsun, ortalama alan

$$\vec{E}_{iç} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{R^3}$$

olur; buradaki toplam dipol momenti $\vec{p} = (\frac{4}{3}\pi R^3)\vec{P}$ olduğundan

$$\vec{E}_{iç} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (4.18)$$

bulunur. Küre yarıçapını çok küçük varsaydığımız için \vec{P} vektörü küre içinde sabit olur.

Şimdi dikkat: (4.17) integralinde hesaba katılmayan hacim düzgün polarize olmuş bir küre hacmidir ve buradan gelebilecek katkı (4.14) formülündeki $-\vec{P}/3\epsilon_0$ alanı olurdu. Oysa, (4.18) denklemindeki iç alan tam bu değerdedir! O halde, integrali dielektrik *tüm hacmine* yayarsak makroskopik alanı veren potansiyel

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{R^2} d\tau \quad (4.19)$$

olur. Kısım 4.2.1'de bağlı yükleri bulurken kullandığımız alan bu makroskopik alandı; o zaman bunun farkında değildik.

Son birkaç paragrafı iyice anlayabilmek için yeniden okumanız gerekebilir. Burada herşey, bir küre içindeki *ortalama* alan ile, aynı toplam dipol momentine sahip düzgün polarize kürenin merkezindeki alanın *eşit* oluşuna dayanmaktadır. Yani, mikroskopik yük dağılımı ne kadar acıba olursa olsun, eğer makroskopik (ortalama) alanla ilgileniyorsam, bunların yerine düzgün bir dipol dağılımı alabilirim. Burada ispat için bir küre kullandık; aynı sonuç, ispatı daha zor olsa da, bir küp veya silindir için de geçerli olurdu.

4.3 ELEKTRİK DEPLASMAN VEKTÖRÜ

4.3.1 Dielektrik Ortamlarda Gauss Yasası

Kısım 4.2'de polarizasyon etkisinin, dielektrik hacim içinde $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ ve dielektrik yüzeyinde $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ kadar birer yük birikimine yol açtığını gördük. Yani, ortamdaki polarizasyon oluşturduğu elektrik alan bu yüklerin alanıdır. O halde, bir dielektrik ortamda en genel elektrik alan, iki tür yükten kaynaklanabilir: bağlı yüklerin alanı ve *serbest* yüklerin alanı. (Serbest yük terimi burada tam uygun değildir, ama kullanılır.) Bu serbest yükler yakındaki bir iletken yüzeyindeki elektronlar, veya dielektrik ortama katılanmış iyonlar olabilir; yeter ki polarizasyondan kaynaklanmış olmasın. Buna göre, dielektrik ortamdaki yük yoğunluğu şöyle yazılabilir:

$$\rho = \rho_b + \rho_f \quad (4.20)$$

Gauss yasası uygulayalım:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \vec{P} + \rho_f$$

Buradaki \vec{E} toplam elektrik alanıdır, sadece polarizasyon yüklerinin katkısı değil. Diverjanslı iki terimi birleştirelim:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

Parantez içindeki ifade elektrik deplasman vektörü olarak bilinir ve \vec{D} ile gösterilir:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.21)$$

Buna göre, Gauss yasası şöyle olur:

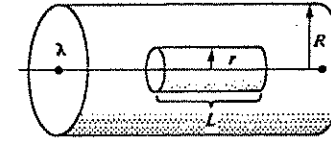
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (4.22)$$

Veya, integral ifadesi

$$\oint_{\text{yüzey}} \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f' \quad (4.23)$$

olup Q_f' hacim içinde kalan toplam serbest yüküdür. Gauss yasasının bu ifade şekli dielektrik ortamlar için çok uygundur, çünkü *sadece serbest yükler* cinsinden ifade edilmiştir. Miktarını ayarlayabildiğimiz yük serbest yüküdür, bağlı yükler peşinden gelir: Serbest yükler verildiğinde ortamda bir polarizasyon, yani bağlı yükler oluşur. Tipik bir problemde ρ_f verilmiştir, ama ρ_b 'nin ne olacağı belli değildir. (4.23) formülü verilen bilgiyi hemen kullanmamızı sağlar. Özellikle simetrik dağılımlarda, bildiğimiz yöntemlerle \vec{D} 'yi hemen hesaplayabiliriz.

Örnek 4.4: Boyca yük yoğunluğu λ olan sonsuz doğrusal telin çevresi, R yarıçapına kadar lastik yalıtkanla çevrilmiştir (Şek. 4.17). Elektrik deplasman vektörünü bulun.



Şekil 4.17

Çözüm : L uzunlukta ve r yarıçaplı silindirik bir Gauss yüzeyi alınır ve (4.23) formülü uygulanırsa

$$D(2\pi rL) = \lambda L$$

ve

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r} \quad (4.24)$$

bulunur. Bu sonucun hem dielektrik içinde ve hem de dışında geçerli olduğuna dikkat edelim. Dielektrik dışında ($r > R$) $\vec{P} = 0$ olduğundan,

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (r > R)$$

bulunur. Bu aşamada, dielektrik içinde elektrik alanı hesaplayamayız, çünkü \vec{P} vektörünü bilmiyoruz.

Belki dikkatinizi çekmiştir, Gauss yasasının diferansiyel ifadesini [(4.22) denklemini] çıkarırken σ_b bağlı yüzey yükünü gözönüne almadım. Gerçekten de, Gauss yasasını dielektrığın *tam dış* yüzünde uygulayamayız; çünkü yüzeyde ρ_b ıraksak olup \vec{E} 'nin diverjansını da ıraksak yapar. Fakat, dielektrik içinde bu yöntem doğru olduğuna göre, şöyle bir model düşünebiliriz: Haddenin dış yüzünde, polarizasyonun sıfıra gittiği ince bir geçiş bölgesi olduğunu varsayalım. Bu durumda bağlı yüzey yükü olmayacaktır ve Gauss yasasının diferansiyel şekli *her yerde* geçerli olur. İntegral Gauss ifadesinde bu sorun yoktur.

Problem 4.15 İç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan küresel bir kabuk (Şek. 4.18) içindeki dielektrik maddenin polarizasyonu

$$\vec{P} = \frac{k}{r} \hat{r}$$

olarak verilmiştir (k bir sabit). *Serbest yük* yoktur. Her üç bölgedeki elektrik alanı şöyle iki yoldan bulun:

- Bağlı yükleri ve sonra bunların elektrik alanını bulun.
- Gauss yasasından \vec{D} 'yi bulun ve (4.21) tanımından \vec{E} 'ye geçin. İkinci yöntemin daha kestirme olduğuna dikkat edin.

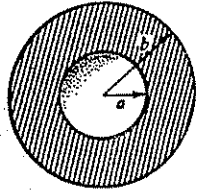
Problem 4.16 Problem 4.11'deki elektret çubuk için, \vec{P} , \vec{E} ve \vec{D} alan çizgilerini gösteren üç şekil çizin. ($L \approx 2R$ olduğunu varsayın.)

Problem 4.17 Bir dielektrik madde içindeki elektrik alan \vec{E}_0 olarak veriliyor. Buna göre, elektrik deplasman vektörü $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}$ olur.

(a) Dielektrik içinden küresel bir kovuk boşaltılıyor (Şek. 4.19). Kovuk merkezindeki elektrik alanı \vec{E}_0 ve \vec{P} cinsinden bulun. Yine kovuk merkezindeki deplasman vektörünü \vec{E}_0 ve \vec{P} cinsinden bulun.

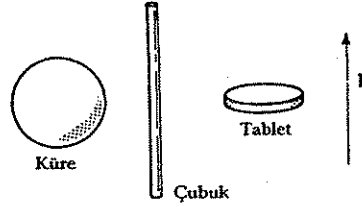
(b) Aynı soruyu \vec{P} -vektörüne paralel, ince bir çubuk şeklindeki kovuk için yanıtlayın.

(c) Aynı soruyu \vec{P} -vektörüne dik, ince bir tablet şeklindeki kovuk için yanıtlayın.



Şekil 4.18

Buradaki kovukların içlerinde \vec{P} , \vec{E}_0 ve \vec{D}_0 sabit kalacak şekilde çok küçük olduklarını varsayın. (Yol gösterme: Bir kovuk açmak, aynı geometrik şekle sahip fakat zıt polarizasyonlu bir dielektrik oraya koymakla eşdeğerdir.)



Şekil 4.19

4.3.2 Yanıltıcı Bir Paralellik

(4.22) denklemi Gauss yasasına benziyor, ancak ρ toplam yükü yerine ρ_f serbest yükü, ve $\epsilon_0 \vec{E}$ yerine de \vec{D} alınmış. Bu paralellige bakıp \vec{D} vektörünün \vec{E} "gibi" özelliklere sahip olduğunu sanabilirsiniz. "Dielektrik problemlerinde bağlı yükleri unuturum, bildiğim yoldan alanı hesaplarım, bulduğum sonuca \vec{E} değil \vec{D} derim." türünden bir mantık çok çekici gelebilir, ama yanlıştır. Örneğin, \vec{D} için "Coulomb yasası" yazılamaz:

$$\vec{D} \neq \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_f \vec{R}}{R^2} d\tau$$

\vec{E} ile \vec{D} arasındaki farkı anlamak için şu noktaya dikkat edelim: Bir vektörü belirtmek için diverjansı yeterli değildir, rotasyonelin de verilmesi gerekir. Elektrostatik alanın rotasyoneli daima sıfır olduğundan ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$), bu nokta bazan unutulur. Oysa, \vec{D} 'nin rotasyoneli her zaman sıfır olmaz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + (\vec{\nabla} \times \vec{P}) = \vec{\nabla} \times \vec{P} \quad (4.25)$$

Burada \vec{P} 'nin rotasyonelinin mutlaka sıfır olması gerekmez (Örnek 44 ve Problem 4.15'te sıfır değildir). Problem 4.16'daki elektret çubuk örneğine bakalım: Burada hiç serbest yük yoktur; eğer \vec{D} 'nin sadece ρ_f 'den kaynaklandığına inanıyorsanız, her yerde $\vec{D} = 0$ olması gerekirdi; buna göre, içerde $\vec{E} = -\vec{P}/\epsilon_0$ ve dışarda $\vec{E} = 0$ olurdu. Oysa bu, yanlıştır. (Bu problemde nerede $\vec{\nabla} \times \vec{P} \neq 0$ olduğunu bulmayı size bırakıyorum.) O halde, $\vec{\nabla} \times \vec{D} \neq 0$ olur, ve dolayısıyla skaler bir fonksiyonun gradyanı olarak yazılamaz. Yani, \vec{D} için "potansiyel" yoktur.

Tavsiye: Elektrik deplasman sorularında önce simetri arayın. Problem küresel, silindirik veya düzlem simetriye sahipse, bildiğimiz Gauss yasası yöntemiyle (4.23) formülünden \vec{D} doğrudan bulunur. (Çünkü bu durumlarda $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$ olur, rotasyoneli düşünmeye gerek kalmaz.) Simetri yoksa başka bir yöntem bulmanız gerekecektir, ama \vec{D} 'nin sadece serbest yüklerin "alanı" olduğunu düşünmeyin.

4.4 LİNEER DİELEKTRİKLER

4.4.1 Duygunluk, Geçirgenlik ve Dielektrik Sabiti

Buraya kadarki incelememizde \vec{P} polarizasyonunu verilmiş varsayıp, kaynağıyla ilgilenmedik. Fakat Kısım 4.1'de polarizasyonun, atom veya moleküllerin dipol momentlerinin bir dış elek-

trik alanda yönelmesi sonucu oluştuğunu söylemiştik. Çoğu maddelerde, eğer uygulanan elektrik alan çok şiddetli değilse, polarizasyon vektörü ortamdaki elektrik alanla orantılı olur:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (4.26)$$

Buradaki orantı katsayısına dielektrik ortamın duygunluğu denir. (Boyutsuz olması için, ϵ_0 çarpanı dışarı alınmıştır.) Her maddenin χ_e katsayısı mikroskopik yapısına bağlı olur. (4.26) bağıntısına uyan maddelere lineer dielektrikler denir.

(4.26) ifadesinde \vec{E} toplam alan olduğundan, hem serbest yükler ve hem de polarizasyondan kaynaklanabilir. Örneğin, bir dielektrik parçasını \vec{E}_0 dış alanı içine koyduğumuzda, (4.26) formülüyle hemen \vec{P} vektörünü bulamayız; dış alan maddeyi polarize edecek, bu polarizasyon kendi alanını oluşturacak ve bunun da katkısıyla toplam alan bulunacak, bu toplam alan polarizasyonu yeniden değiştirecek, ... Bu sonsuz döngünün nereye varacağını kestirmek her zaman kolay değildir; birazdan örneklerde göreceğiz. En akıllı yol deplasman vektörüyle başlamaktır.

Lineer ortamlar için

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \quad (4.27)$$

Buradan, \vec{P} yanı sıra, \vec{D} 'nin de elektrik alanla orantılı olduğu anlaşılır:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (4.28)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (4.29)$$

Burada ϵ ortamın geçirgenlik katsayısı olur. Boşlukta, polarize olacak madde olmadıysa, duygunluk sıfır ve dolayısıyla geçirgenlik ϵ_0 olur. ϵ_0 sabitine boşluğun geçirgenliği denmesi bu yüzdendir. Burada boyutsuz bir katsayı daha tanımlarsak

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e \quad (4.30)$$

K dielektrik sabiti adını alır. Bilinen bazı maddelerin dielektrik sabitleri Tablo 4.2'de verilmiştir. Bu üç sabit aynı bilgiyi verirler, biri biliniyorsa diğerleri hesaplanabilir. Aşında, lineer dielektriklerin fiziki (4.26) denkleminde gelir, (4.28) denklemini buna yeni bir şey katmaz.

Tablo 4.2 DİELEKTRİK SABİTLERİ
(Ayrıca belirtilmemişse, 1 atm ve 20°C koşullarında).

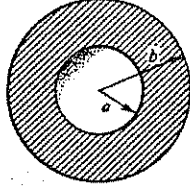
Madde	Dielektrik sabiti	Madde	Dielektrik sabiti
Boşluk	1	Hava (100 atm)	1.055
Helyum	1.000068	Polietilen	2.26
Neon	1.00013	Cam	4-7
Hidrojen	1.00025	Porselen	6-8
Argon	1.00055	Metanol	33.6
Azot	1.00058	Su	80.4
Hava	1.00059	HCN (0°C)	158
Su buharı	1.0126		

Lineer ve homojen dielektriklerde bağlı hacim yük yoğunluğu hemen bulunabilir:

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \chi_e \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \vec{D} \right) = -\left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_f \quad (4.31)$$

Buna göre, bağlı yük yoğunluğu serbest yüklerle orantılı olur. Özel olarak, hacim içinde serbest yük yoksa, bağlı yüklerin tümü yüzeyde oluşur.

Örnek 4.5 : *a* yarıçaplı metal küre üzerinde *Q* yükü vardır (Şek. 4.20). Bunun çevresinde *b* yarıçapına kadar olan bölge geçirgenliği ϵ olan lineer bir dielektrikle doldurulmuştur. Merkezdeki potansiyeli bulun (referans noktası sonsuzda olsun).



Şekil 4.20

Çözüm : *V* 'yi bulmak için \vec{E} 'yi bilmek gerekir; \vec{E} 'yi bulmak için bağlı yüklerin bilinmesi gerekir. Oysa, serbest yükü biliyoruz, ve problemin simetrik olduğu görülüyor. O halde, (4.23) Gauss yasasıyla \vec{D} hemen bulunur:

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (r > a)$$

(Metal küre içinde elbette $\vec{E} = \vec{P} = \vec{D} = 0$ olur.) \vec{D} bilindikten sonra, (4.28) formülünden \vec{E} bulunur:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} & (a < r < b) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & (r > b) \end{cases}$$

Buradan merkezdeki ($r = 0$) potansiyel hesaplanır:

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\infty}^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^b \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr - \int_b^a \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right) dr - \int_a^0 (0) dr \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b} \right) \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, polarizasyonun bilinmesine gerek yoktur. Ama, istenirse kolayca hesaplanır:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

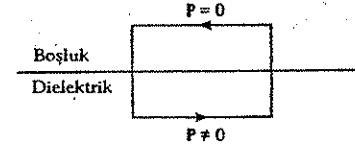
Buradan bağlı yükler bulunur:

$$\begin{aligned} \rho_b &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \\ \sigma_b &= \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi b^2} & (\text{dış yüzeyde}) \\ -\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi a^2} & (\text{iç yüzeyde}) \end{cases} \end{aligned}$$

a yarıçaplı yüzeydeki bağlı yükün negatif olduğuna dikkat edin (burada \hat{n} normal vektörü dielektrik dışına doğru, yani $-\hat{r}$ yönündedir). Bu, beklentimize uygundur, çünkü metal kürenin yükü dielektrik moleküllerin zıt yüklerini çekecektir. Dielektrik içinde elektrik

alanın azalmasını sağlayan etken, bu negatif yüzey yüküdür. Bu açıdan bakılırsa dielektrik, mükemmel olmayan bir iletken gibidir: iletken yüzeylerde toplanan yükler içerdeki alanı *tam olarak* sıfırlar; dielektrik kabuk ise kendi içindeki alanı sıfırlamak için elinden geleni yapar, fakat içerdeki alanı tam sıfırlayamaz.

Daha önce sözünü ettiğimiz \vec{E} ve \vec{D} arasındaki yanıltıcı paralellığın, lineer dielektriklerde artık sahiden doğru olacağını düşünebilirsiniz. Şimdi \vec{P} ve \vec{D} vektörleri \vec{E} ile orantılı olduğuna göre, bunların rotasyoneli de sıfır olmaz mı? Maalesef olmuyor: Farklı iki ortam üzerinden kapanan bir eğri üzerinde, \vec{E} integrali yine sıfırdır, ama \vec{P} integrali sıfır olmaya bilir. Bunun nedeni iki bölgedeki $\epsilon_0 \chi_e$ çarpanının farklı olmasıdır. Örneğin, Şek. 4.21'deki bir dielektrikle boşluk arakesitini ele alalım. \vec{P} bir tarafta sıfır, diğer tarafta sıfırdan farklıdır. Bu kapalı eğri üzerinde $\oint \vec{P} \cdot d\vec{l} \neq 0$ olacağından, Stokes teoremine göre \vec{P} 'nin rotasyoneli eğri içinde her yerde sıfır olmaz.



Şekil 4.21

Fakat tüm uzay tek tür lineer dielektrikle dolu ise, bu sorun ortadan kalkar; bu özel durum için

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \text{ve} \quad \vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$$

olur ve sadece serbest yükleri gözönüne alıp \vec{D} 'yi bulabiliriz:

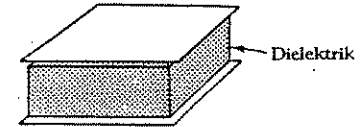
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{boşluk}}$$

Burada $\vec{E}_{\text{boşluk}}$ aynı serbest yüklerin hiç dielektrik olmadığı durumdaki elektrik alanıdır. (4.28) ve (4.30) denklemlerine göre, dielektrik içindeki elektrik alan

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{E}_{\text{boşluk}}}{K} \quad (4.32)$$

olur. Diğer bir deyişle, homojen lineer dielektrik içindeki elektrik alan, boşluktaki alan değerinin dielektrik sabitiyle bölünmesiyle elde edilir.

Örnek 4.6 : *Düzlem bir kapasitörün içi dielektrik sabiti K olan bir yalıtkan maddeyle doldurulmuştur (Şek. 4.22). Sığa nasıl değişir?*



Şekil 4.22

Çözüm : Elektrik alan sadece levhalar arasındaki bölgede olduğundan, dielektrik etkisiyle \vec{E} elektrik alanı ve dolayısıyla *V* potansiyel farkı $1/K$ çarpanı kadar azalacaktır. $C = Q/V$ ile tanımlanan sığa ise *K* çarpanı kadar artar:

$$C = K C_{\text{boşluk}}$$

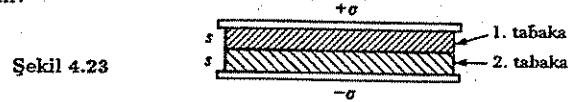
Bu özellik pratikte sığa artırmak için sıkça kullanılır.

Kristaller bazı eksen yönlerinde daha kolay polarize olabilirler. Bu durumda (4.26) formülü şöyle genelleşir:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\chi_{exx} E_x + \chi_{exy} E_y + \chi_{exz} E_z) \\ P_y &= \epsilon_0 (\chi_{eyx} E_x + \chi_{eyy} E_y + \chi_{eyz} E_z) \\ P_z &= \epsilon_0 (\chi_{ezx} E_x + \chi_{ezy} E_y + \chi_{ezz} E_z) \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Buradaki dokuz tane $\chi_{exx}, \chi_{exy}, \dots$ katsayıları duygunluk tansörünün bileşenlerini oluştururlar.

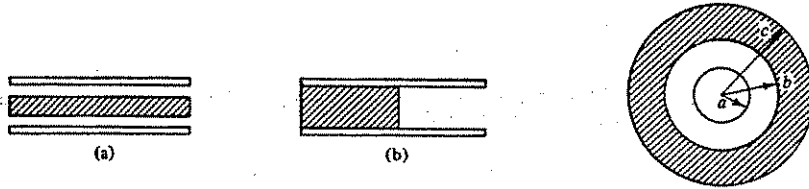
Problem 4.18 Şek. 4.23'te düzlem kapasitörün levhaları arasındaki boşluk iki farklı dielektrikle doldurulmuştur. Dielektriklerden herbirinin kalınlığı s , levhalar arası uzaklık $2s$ 'dir. Birincinin dielektrik sabiti 2, ikincinin 1.5 dur. Levhalar üzerindeki serbest yük yoğunluğu $\pm \sigma$ dir.



Şekil 4.23

- Herbir dielektrik bölgede \vec{D} deplasmanını bulun.
- Herbir dielektrik bölgede \vec{E} elektrik alanını bulun.
- Herbir dielektrik bölgede \vec{P} polarizasyonunu bulun.
- Levhalar arasındaki potansiyel farkını bulun.
- Bağlı yüklerin yerini ve miktarını bulun.
- Şimdi tüm (serbest ve bağlı) yükleri bildiğimize göre, herbir bölgedeki elektrik alanı doğrudan hesaplayın ve (b) deki yanıtınızla karşılaştırın.

Problem 4.19 Şek. 4.24'de bir düzlem kapasitörün levhaları arasındaki bölgenin yarı hacmi, K sabitli bir dielektrik maddeyle iki farklı şekilde doldurulmuştur. (a) durumunda sağa yüzde kaç artar? (b) durumunda ne olur?



Şekil 4.24

Şekil 4.25

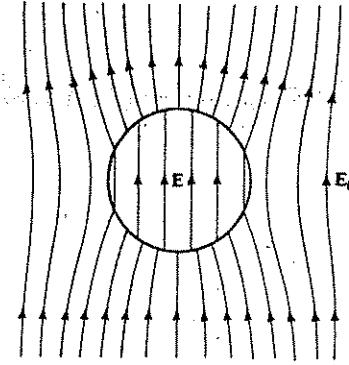
Problem 4.20 Lineer dielektrik maddeden yapılmış bir küre hacminde düzgün ρ serbest yük yoğunluğu katkılanmıştır. Küre merkezindeki potansiyeli bulun. (Küre yarıçapı R ve dielektrik sabiti K dir.)

Problem 4.21 Bakırdan yapılmış bir koaksiyal kablo, içte a yarıçaplı bir dolu silindir ve bununla eş eksenli ve iç yarıçapı b olan silindirik kabuktan oluşmaktadır (Şek. 4.25). Aradaki bölgenin b 'den c 'ye kadar olan kısmı dielektrik sabiti K olan bir yalıtkanla doldurulmuştur. Bu kablunun birim uzunluğunun sığasını bulun.

4.4.2 Lineer Dielektrikler için Özel Problemler

Buraya kadar verdiğimiz örnekler biraz yapay kalmaktadır, çünkü bu örneklerde ya polarizasyon önceden belirlenmiş, yahut da sistem simetrik verildiğinden deplasman vektörü doğrudan serbest yüklerden hesaplanabilmişti. Bunların dışındaki gerçekçi problemler ele alındığında, hesap teknikleri oldukça değişik ve ilginç olabilir.

Örnek 4.7: Lineer dielektrikten yapılmış bir küre, düzgün bir \vec{E}_0 dış elektrik alanı içine konuyor (Şek. 4.26). Küre içindeki elektrik alanı bulun.



Şekil 4.26

Çözüm:

Bu problem Bölüm 3'teki Örnek 3.8'i (düzgün elektrik alanda iletken küreyi) hatırlatıyor. İletken örneğinde, yüzeyde toplanan yükler \vec{E}_0 alanını içeride tamamen sıfırlıyordu. Dielektrik içinde elektrik alan, bağlı yüklerden dolayı azalır, ama tam sıfır olmaz.

Bu problemi değişik bir iterasyon tekniğiyle çözeceğiz: Küredeki polarizasyonun ardışık aşamalarla oluştuğunu varsayalım. \vec{E}_0 dış alanına girdiğinde küre içinde düzgün bir polarizasyon oluşur. (4.26) formülünü

$$\vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0$$

şeklinde kullanalım. Burada \vec{E} yerine \vec{E}_0 aldığımız için, \vec{P}_0 kürenin son polarizasyonu olmayacaktır. Bu polarizasyonun küre içindeki elektrik alana katkısı, düzgün polarize olmuş küre için bulduğumuz (4.14) formülünden hesaplanır:

$$\vec{E}_1 = -\frac{\vec{P}_0}{3\epsilon_0} = -\left(\frac{\chi_e}{3}\right) \vec{E}_0$$

Bu yeni \vec{E}_1 alanı küreyi biraz daha polarize eder:

$$\vec{P}_1 = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_1 = (\epsilon_0 \chi_e) \left(-\frac{\chi_e}{3}\right) \vec{E}_0$$

ve bu polarizasyonun elektrik alana katkısı

$$\vec{E}_2 = -\frac{\vec{P}_1}{3\epsilon_0} = \left(-\frac{\chi_e}{3}\right)^2 \vec{E}_0$$

olur. Kolayca anlaşıldığı gibi, n . aşamanın elektrik alana katkısı

$$\vec{E}_n = \left(-\frac{\chi_e}{3}\right)^n \vec{E}_0$$

olur. Şimdi, küre içindeki net alan tüm bu katkıların toplamı olacaktır:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{3} \right)^n \right] \vec{E}_0$$

Bu geometrik serinin toplamı vardır:

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{1 + \chi_e/3} \right) \vec{E}_0 = \left(\frac{3}{2 + \chi_e} \right) \vec{E}_0 \quad (4.34)$$

Görüldüğü gibi, küre içindeki elektrik alan, ve dolayısıyla polarizasyon düzgün olurlar.

Elbette, fiziksel polarizasyonun böyle aşamalar geçirerek oluştuğunu iddia etmiyorum. Bu, matematiksel bir teknik olarak doğru çözüme yakınsaklaşır. Sonuçtan kuşku duyuyorsanız, kontrol edelim: Bu \vec{E} alanından kaynaklanan polarizasyon ne kadar olur?

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \chi_e}{1 + \chi_e/3} \vec{E}_0$$

Ve bu polarizasyonun elektrik alana katkısı ne kadardır?

$$\vec{E}_{\text{küre}} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = -\frac{\chi_e}{3 + \chi_e} \vec{E}_0$$

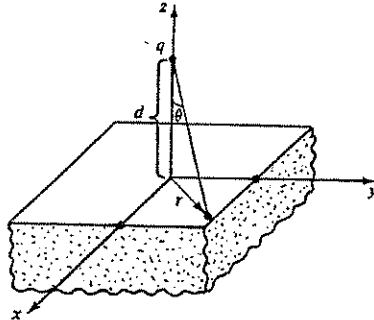
Şimdi, dış alanla küredeki polarizasyonun katkısını toplarsak, küre içindeki net alanı bulur muyuz?

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{küre}} = \vec{E}_0 - \frac{\chi_e}{3 + \chi_e} \vec{E}_0 = \frac{1}{1 + \chi_e/3} \vec{E}_0$$

Evet—yukardaki yanıt doğru polarizasyonu verdiği için, tutarlıdır.

Bu tekniğin başarılı olmasının nedeni, düzgün polarize olmuş küre içindeki elektrik alanın da düzgün oluşudur. Böyle olmasaydı, her aşamadaki elektrik alan ifadesi daha karmaşık olacak ve belki de seri toplamını yapamayacaktık. Merak ederseniz, söyleyeyim: Sadece elipsoit şeklindeki cisimlerde (küre ve sonsuz silindir de buna dahildir) düzgün polarizasyonun içindeki alanı da düzgün olmaktadır.

Örnek 4.8 : $z = 0$ düzleminin alt tarafı, durgunluğu χ_e olan lineer dielektrik maddeyle sonsuza kadar doludur (Şek. 4.27). Orijinden d yükseklikte bir noktaya konulan q yükü üzerindeki kuvveti hesaplayın.



Şekil 4.27

4.4. LİNEER DİELEKTRİKLER

Çözüm : xy -düzleminde toplanan yüzey yükü q ile ters işaretli, dolayısıyla kuvvet çekici olacaktır. (4.31) formülüne göre bağlı hacim yükü oluşmaz. Önce σ_b bağlı yüzey yükünü (4.11) ve (4.26) bağıntılarından hesaplayalım:

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = P_z = \epsilon_0 \chi_e E_z$$

Burada E_z dielektrik yüzeydeki elektrik alanın z -bileşenidir. Bu alan hem q yükü, hem de bağlı yükten kaynaklanır. q yükünün alanı Coulomb yasasından bulunur; bunun z -bileşeni

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + d^2} \cos \theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

Burada $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ alanı hesapladığımız noktanın orijinden uzaklığıdır. Öte yandan, bağlı yüzey yükünün alanı z -doğrultusunda $-\sigma_b/2\epsilon_0$ kadar olur. Buna göre

$$\sigma_b = \epsilon_0 \chi_e \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_b}{2\epsilon_0} \right]$$

Bu denklemi σ_b için çözeriz:

$$\sigma_b = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right) \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \quad (4.35)$$

Bu sonuç, $\chi_e/(\chi_e + 2)$ çarpanını saymazsak, sonsuz iletken düzlemde toplanan yük yoğunluğudur [(3.9) bağıntısı]. O halde, toplam bağlı yük de aynı oranda olacaktır:

$$q_b = -\left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right) q \quad (4.36)$$

Şimdi σ_b yüzey yükünün alanını doğrudan

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_b \hat{R} da}{R^2}$$

integraliyle bulabilirdik; ama görüntü yöntemiyle daha kestirme bir yol vardır.

Daha önce iletkenlerle yaptığımız gibi, dielektriği kaldırıp $(0, 0, -d)$ konumlu yere noktasal bir q_b görüntü yükü koyalım. Bu iki yüklü sistemin $z > 0$ bölgesindeki potansiyeli

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} + \frac{q_b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right] \quad (z > 0) \quad (4.37)$$

olur. Sonra, $(0, 0, d)$ noktasına, q 'ya ek olarak, q_b yükü koyalım. Aynı yerdeki bu iki yükün $z < 0$ bölgesindeki potansiyeli

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q + q_b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} \right] \quad (z < 0) \quad (4.38)$$

olur. Bu iki ifade birlikte ele alındığında, dielektrikli asıl sistemin potansiyeli olur. Çünkü (a) $z > 0$ için $(0, 0, d)$ noktasında bir q yüküyle Poisson denklemini sağlar; (b) sonsuzda sıfıra gider; (c) $z = 0$ arakesitinde süreklidir; (d) Potansiyelin yüzeye dik türevindeki süreksizlik, σ_b yüzey yükünü verecek şekildedir. Gerçekten de

$$-\epsilon_0 \left(\frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0+} - \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0-} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right) \frac{qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

O halde, asıl problemin potansiyeli bulunmuş demektir. Buradan, q yükü üzerindeki kuvvet q_b yükü ile hemen bulunur:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_b}{(2d)^2} \hat{k} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right) \frac{q^2}{4d^2} \hat{k} \quad (4.39)$$

Potansiyeli veren (4.37) ve (4.38) ifadelerini nasıl bulduğumu, yani görüntü yüklerini nasıl seçtiğimi sormayın. Önemli olan, bu çözümün Poisson denklemini ve sınır koşullarını sağlıyor olmasıdır. Görüntü yöntemi rastlantıya bağlı gibi görünse de, bir takım kuralları vardır: (1) Potansiyeli hesapladığınız bölgeye görüntü yükü koyamazsınız (örneğin, (4.37) denklemi $z > 0$ için potansiyeli verir, fakat q_b görüntü yükü $z = -d$ noktasına konmuştur); (2) Her bölgede, görüntü yükleri toplamı asıl problemdeki yüke eşit olmalıdır (bu problemde, $z < 0$ olan dielektrikte q_b yükü, $z \geq 0$ olan bölgede ise $q + q_b$ yükü vardır).

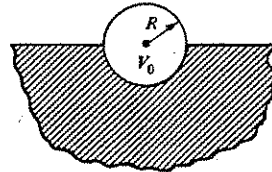
Problem 4.22 Lineer dielektrik bir maddeden yapılmış sonsuz silindir düzgün \vec{E}_0 dış elektrik alanı içine konulmuştur. Silindir içindeki elektrik alanı bulun. (Yarıçap R , duyunluk χ_e ve silindir eksen \vec{E}_0 yönüne diktir.) Burada Problem 4.13'e bir göz atmanız yararlı olur.

Problem 4.23 Örnek 4.7'deki, düzgün \vec{E}_0 alanı içindeki lineer dielektrik küre problemini değişken ayırımı yöntemiyle çözün. (Örnek 3.8'i inceleyin ve şu noktalara dikkat edin (a) $r = R$ 'de V süreklidir; (b) $r = R$ 'de V 'nin türevindeki süreksizlik $-\sigma_b/\epsilon_0$ olur; (c) dielektrik lineer olduğundan, $\sigma_b = \epsilon_0 \chi_e (\vec{E} \cdot \hat{r})$ dir.)

Problem 4.24 Örnek 4.8'deki xy -düzleminin üst tarafının da farklı χ'_e duyunlukta lineer bir dielektrikle dolu olduğunu varsayın ve q yükü üzerindeki kuvveti bulun.

Problem 4.25 Şu tek çözüm teoremini ispatlayın: Bir bölgede belirli ρ_f serbest yük yoğunluğu ve her biri belirli duyunluğa sahip çok sayıda lineer dielektrik cisimler vardır. Bölge sınırında V belirtilmişse (örneğin, sonsuzda $V = 0$ uygun bir sınır koşuludur), bölge içinde her yerde potansiyelin tek çözümü vardır. (Yol gösterme: İki çözümün farkı olan V_3 için $\vec{\nabla} \cdot (V_3 \vec{D}_3)$ 'ün bölgedeki hacim integraline bakın.)

Problem 4.26 Potansiyeli V_0 olan iletken bir küre, $z < 0$ olan bölgeyi tümüyle dolduran ve duyunluğu χ_e olan lineer dielektrik sıvı içine, yarısına kadar batırılıyor (Şek. 4.28). İddia: Uzayın her noktasındaki potansiyel, dielektrik olmadığı durumdaki potansiyelle aynıdır! Bu iddiayı şu şekilde test edin:



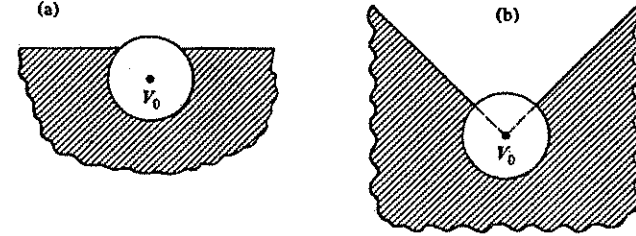
Şekil 4.28

(a) Şekildeki sistemin $V(r)$ potansiyelini V_0 , R ve r cinsinden yazın. Bu potansiyeli kullanarak elektrik alan, polarizasyon, yüzey yük yoğunluğu ve küre yüzeyindeki serbest yük yoğunluğunu hesaplayın.

(b) Bu yüklerin aynı $V(r)$ potansiyelini verdiğini gösterin.

(c) Problem 4.25'teki tek çözüm teoremini kullanarak ispatı tamamlayın. Aynı potansiyel için Şek. 4.29'daki sistemler çözülebilir mi? Yanıtınız hayırsa, açıklayın.

4.4. LİNEER DİELEKTRİKLER



Şekil 4.29

4.4.3 Dielektrik Sistemlerde Enerji

Bir kapasitörü V potansiyeline kadar yüklemek için yapılması gereken iş, (2.48) formülüne göre

$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

olur. Kapasitörün içi lineer bir dielektrik maddeyle dolu ise, boşluğa göre sığadaki değişme, Örnek 4.6'da bulunduğu gibi

$$C = K C_{\text{boşluk}}$$

olur. Buna göre, dielektrikle dolu kapasitörü yüklemek için gerekli iş aynı katsayı ile çarpılmış olarak artar. Bunu anlamak kolaydır: Bağlı yüklerin potansiyeli azaltıcı etkisini karşılayabilmek için levhalara daha fazla yük vermek gerekir.

Bölüm 2'de bir elektrostatik sistemde depolanan enerji için (2.39) genel formülünü çıkarmıştık:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad (4.40)$$

Bu formülün lineer dielektrikli kapasitör için alacağı şekli tahmin edebiliriz:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int K E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau \quad (4.41)$$

Bunu ispat etmek için, dielektrik maddenin önceden yerleştirildiğini ve serbest yüklerin azar azar getirildiğini varsayalım. ρ_f yükünde küçük bir $\Delta\rho_f$ artışı olduğunda polarizasyon değişecek, dolayısıyla bağlı yüzey yükü de değişecektir. Fakat biz serbest yükler arttığında yapılan işteki artışı bulmak istiyoruz:

$$\Delta W = \int (\Delta\rho_f) V d\tau \quad (4.42)$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$ olduğundan, $\Delta\rho_f = \vec{\nabla} \cdot (\Delta\vec{D})$ olur. Buna göre

$$\Delta W = \int [\vec{\nabla} \cdot (\Delta\vec{D})] V d\tau$$

olur. Vektör özdeşliklerden birini hatırlayalım:

$$\vec{\nabla} \cdot (\Delta\vec{D} V) = [\vec{\nabla} \cdot (\Delta\vec{D})] V + \Delta\vec{D} \cdot (\vec{\nabla} V)$$

Bu özdeşliği ve $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ bağıntısını kullanırsak

$$\Delta W = \int \vec{\nabla} \cdot (\Delta\vec{D} V) d\tau + \int (\Delta\vec{D}) \cdot \vec{E} d\tau$$

Birinci integrali diverjans teoremiyle bir yüzey integraline dönüştürdüğümüzde, tüm uzaydaki integrali sıfır olur. O halde, yapılan işteki artış

$$\Delta W = \int (\Delta \vec{D}) \cdot \vec{E} d\tau \quad (4.43)$$

olur. Bu formül tüm maddeler için geçerlidir. Şimdi, ortamın lineer dielektrik olduğunu varsayalım. Bu durumda $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ alabiliriz. Küçük artışlar için şu bağıntının doğruluğu kontrol edilebilir:

$$\frac{1}{2} \Delta (\vec{D} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \Delta (\epsilon E^2) = \epsilon (\Delta \vec{E}) \cdot \vec{E} = (\Delta \vec{D}) \cdot \vec{E}$$

Buna göre, işteki küçük artış

$$\Delta W = \Delta \left(\frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau \right)$$

Bu bir tam diferansiyeldir. O halde, kapasitörü sıfır yükten itibaren son durumuna getirmek için yapılan iş yazılabilir:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau \quad (4.41)$$

Bu, yukarda öngördüğümüz (4.41) formülüdür.

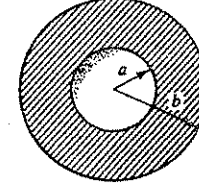
Bölüm 2'de genel incelemede çıkardığımız (4.40) formülünün lineer dielektrikler için geçerli olmayıp, (4.41) formülüne dönüşmesi size tuhaf gelebilir. Burada önemli nokta hangi formülün yanlış olduğu değil, hangi durumlara karşılık geldikleridir. Bu nokta ince olduğundan, gelin başa dönelim: Gerçekte "bir sistemin enerjisi" nedir? Yanıt: Sistemi o duruma getirmek için yapılması gereken iştir. Kabul—fakat ortamda dielektrik varsa bu duruma getirmek iki türlü olabilir: (1) Tüm (serbest ve bağlı) yükleri cımbızla birer birer getirir ve bulunmaları gereken yerlere yapıştırırız. Sistemi "o duruma getirmek" den anladığımız buysa, sistemin enerjisi (4.40) formülüdür. Ama bu iş, dielektrik molekülleri çekip uzatmak veya bükmek için gerekli işi içermeyecektir. (Örneğin, moleküldeki pozitif ve negatif yükleri elastik bir yayla bağlı olarak düşünürsek, her molekülü polarize etmek için gerekli $\frac{1}{2} kx^2$ yay enerjisi hesaba katılmamış olur.) (2) Henüz polarize olmamış dielektrik yerleştirildikten sonra, serbest yükleri birer birer getiririz ve bu sırada dielektriğin istediği gibi değişmesine izin veriz. Eğer, sistemi "o duruma getirmek"ten anladığınız buysa (ki pratikte yapılan da budur; sadece serbest yüklerle oynayabiliriz), o zaman size (4.41) formülü gerekir. Bu durumda, "yay" enerjisi de dolaylı olarak hesaba katılmış olur. Başka bir dille anlatayım: 2. yöntemde sistemin toplam enerjisi üç parçadan oluşur: serbest yükün elektrostatik enerjisi, bağlı yükün elektrostatik enerjisi ve "yay" enerjisi:

$$W_{\text{top}} = W_{\text{serbest}} + W_{\text{bağlı}} + W_{\text{yay}}$$

Son iki terim eşit ve zıt işaretli olurlar, çünkü 2. yöntemde bağlı yükler tüm süreç boyunca dengededirler ve bunlar üzerinde yapılan net iş sıfırdır. O halde, 2. yöntem W_{serbest} enerjisini hesaplarken W_{top} enerjisini de vermiş oluyor; oysa 1. yöntem $W_{\text{serbest}} + W_{\text{bağlı}}$ enerjisini verirken W_{yay} enerjisini unutuyor.

Bazı kitaplarda (4.41) formülünün lineer olmayan dielektrikler için de geçerli olduğu söylenir, ama yanlışır: (4.43) denkleminin lineerlik varsayımı yapmak gerekir. Hatta bazı lineer olmayan sistemlerde "depolanan enerji" kavramı da anlamını yitirir, çünkü yapılan iş sadece son duruma değil, o duruma nasıl geldiğine bağlı olur. Örneğin, molekül içindeki "yay" biraz sürtünmeli ise, W_{yay} enerjisi izlenen yola göre istenildiği kadar büyük olabilir. Örneğin, (4.41) formülünü, kalıcı polarizasyona sahip elektretlere uygularsanız anlamsız bir sonuç bulursunuz.

Problem 4.27 R yarıçaplı iletken küre üzerinde Q yükü vardır (Şek. 4.30). Küre çevresinde b yarıçapına kadar olan bölge, duymunluğu χ_e olan lineer dielektrik maddeyle doludur. Bu sistemin enerjisini bulun.

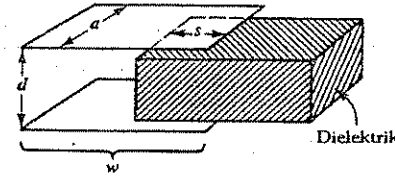


Şekil 4.30

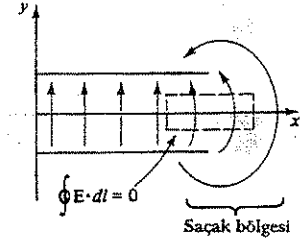
Problem 4.28 (4.40) ve (4.41) formüllerindeki enerjiyi, kalıcı \vec{P} polarizasyonuna sahip R yarıçaplı küre için hesaplayın. Aradaki farkı yorumlayın. Bu sistemin "gerçek" enerjisi hangisidir?

4.4.4 Dielektriklerde Kuvvetler

İletken maddeler nasıl elektrik alana doğru çekiliyorsa [(2.44) denklemi], dielektrikler de aynı nedenle çekilirler. Bağlı yükler zıt işaretli serbest yüklerle yakın yerde toplanırlar. Dielektriklerde kuvvet hesapları bazan şaşırtıcı sonuçlar verebilir. Örneğin, bir düzlem kapasitörün levhaları arasında yarı girmiş bir dielektrik çubuk gözönüne alalım (Şek. 4.31). Düzlem kapasitörün levhaları arasındaki elektrik alanın düzgün olduğunu ve dışarda sıfır olduğunu söyleyip durduk. Eğer bu doğru olsaydı, dielektrik çubuğa hiçbir kuvvet etkimezdi. Oysa, gerçek durumda kapasitörün kenarlarında elektrik alan saçakları vardır. (Nitekim, kapasitörün kenarında elektrik alan aniden sıfıra inseydi, Şek. 4.32'deki kapalı eğri üzerindeki integral sıfır olmazdı.) Çoğu durumlarda bu saçaklar yok sayılabilir, ama burada ele aldığımız etkinin tek nedeni bunlardır. Dielektriği kapasitör içine çeken kuvvet bu düzgün olmayan elektrik alandan kaynaklanır.



Şekil 4.31



Şekil 4.32

Saçak alanı hesabı son derece karmaşıktır; fakat çok şükür bu hesabı hiç gerek göstermeyen bir hesap yöntemi vardır. Sistemin enerjisine W dersek, bu enerji s örtüşme uzunluğuna bağlı olacaktır. Dielektriği küçük bir ds kadar dışarı çektiğimizde, enerjideki değişme yapılan iş kadar olacaktır:

$$dW = F_{\text{biz}} ds \quad (4.44)$$

Burada F_{biz} bizim uyguladığımız kuvvettir. Dikkat ederseniz, elektriksel F kuvvetini yenecek kadar bir zıt kuvvet uygulamak yeterlidir: $F_{\text{biz}} = -F$; daha fazlası çubuğu ivmelenendirir ve bu kez kinetik enerjideki artış da hesaba katmak zorunda kalırız. O halde, çubuk

üzerindeki elektriksel kuvvet şöyle olur:

$$F = -\frac{dW}{ds} \quad (4.45)$$

O halde, sistemin enerjisini s 'nin fonksiyonu olarak bulabilirsek, saçak alanını bilmeden, onun yolaçtığı F kuvvetini hesaplayabiliriz.

Kapasitörde depolanan enerjiye bakalım:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.46)$$

Bu sistemde sığa şöyle olur:

$$C = \frac{\epsilon_0 a}{d} (w + \chi_e s) \quad (4.47)$$

Burada w levhanın toplam uzunluğudur (Şek. 4.31). Dielektrik yer değiştirirken potansiyel de değişecektir; ama levhadaki yük sabit kalır: $Q = CV$. Buna göre,

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (4.48)$$

olur. Buradan F hesaplanır:

$$F = -\frac{dW}{ds} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{ds} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{ds} \quad (4.49)$$

Yukardaki C ifadesinin türevi alınır ve yerine konursa F kuvveti bulunur:

$$\frac{dC}{ds} = \frac{\epsilon_0 \chi_e a}{d} \quad \text{ve} \quad F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_e \frac{a}{d} V^2 \quad (4.50)$$

Kuvveti hesaplarken sıkça düşülen bir hata (4.46) denklemi kullanmak, yani V sabit almaktır. Böyle yapıldığında kuvvet

$$F = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{ds}$$

ters işaretli olarak bulunur. Elbette kapasitörü sabit bir potansiyelde tutmak mümkündür, örneğin bir bataryaya bağlanır. Ama bu kez, dielektrik yer değiştirirken batarya da iş yapar, bu durumda yapılan iş şöyle yazılmalıdır:

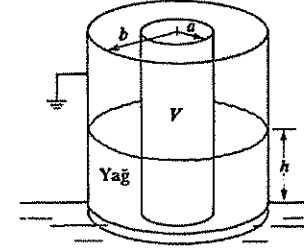
$$dW = F_{\text{biz}} + V dQ \quad (4.51)$$

Burada $V dQ$ bataryanın yaptığı iştir. Buradan kuvvet hesaplanırsa

$$F = -\frac{dW}{ds} + V \frac{dQ}{ds} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{ds} + V^2 \frac{dC}{ds} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{ds} \quad (4.52)$$

doğru işaretli, yani (4.49) formülündeki aynı iş bulunur. (Dikkat edin: Dielektriğe uygulanan kuvvet V veya Q 'yu sabit tutma niyetinize bağlı değildir—kuvvet yüklerin (serbest ve bağlı) dağılımına bağlıdır. Q sabit tutularak yapılan hesap daha kolaydır, çünkü bataryada yapılan işi düşünmek zorunda kalmazsınız. İlle de hesaplamak isterseniz, aynı kuvveti bulursunuz.)

Problem 4.29 İçtekinin yarıçapı a ve dıştakinin yarıçapı b olan eş eksenli iki silindirik metal tüp, duygunluğu χ_e ve kütle yoğunluğu d olan dielektrik bir yağ içinde dikine durmaktadır (Şek. 4.33). İçteki tüp V potansiyelinde, dıştaki tüp ise topraklanmıştır. Tüpler arasındaki boşlukta yağ hangi h yüksekliğine çıkar?



Şekil 4.33

Problem 4.30 Bir dipol üzerindeki kuvvet (4.5) formülünde $(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$ olarak bulunmuştur. Buna göre, dielektrik bir madde parçası üzerindeki toplam kuvvet

$$\vec{F} = \int (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_{\text{dış}} d\tau \quad (4.53)$$

olmalıdır. (Burada $\vec{E}_{\text{dış}}$, dielektriğinki katılmamış olan dış alandır. Şimdi, çok kişinin düştüğü hataya kapılıp, bu alan yerine toplam elektrik alanının alınacağını düşünebilirsiniz; nasıl olsa dielektrik kendi kendine kuvvet uygulamayacaktır. Ama, yüzey yükü olan yerde dielektriğin alanı süresiz olduğundan, bunun türevi gereksiz bir delta fonksiyonu verir.) (4.53) denklemini kullanarak, düzgün λ boyca yük yoğunluğu taşıyan sonsuz doğrusal telden r uzaklıkta bulunan ve duygunluğu χ_e olan a yarıçaplı küçük bir lineer dielektrik küre üzerindeki kuvveti hesaplayın.

4.4.5 Polarizabilite ve Duygunluk

Lineer dielektriklerde polarizasyon elektrik alanla orantılıdır [(4.26) denklemi]:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (4.54)$$

Dielektrik madde polar olmayan atomlar veya moleküllerden oluşuyorsa, herbiri üzerindeki etkileşmeli dipol momenti de elektrik alanla orantılı olur [(4.1) denklemi]:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (4.55)$$

Soru: α atomik polarizabilitesi ile χ_e duygunluğu arasında nasıl bir ilişki vardır? \vec{P} polarizasyonu tanımına göre, birim hacimde N atom varsa ve herbirinin dipol momenti \vec{p} ise

$$\vec{P} = N \vec{p} = N \alpha \vec{E} \quad (4.56)$$

olur. Şimdi hemen şöyle yazmayı düşünebilirsiniz:

$$\chi_e = \frac{N \alpha}{\epsilon_0} \quad (4.57)$$

Eğer, atom yoğunluğu küçükse, bu sonuç gerçek değere yakın olur. Fakat biraz dikkat ederseniz, önemli bir noktayı kaçırdığımızı görürsünüz: (4.54) formülündeki alan ortamdaki toplam makroskopik alandır, oysa (4.55) formülündeki alan ele aldığımız atom üzerindeki mikroskopik alan, yani atomun kendi katkısını içermeyen alandır. (Atomik polarizabilite bir dış alandaki tek atom için tanımlanır.) Mikroskopik alanın hesaplanamayacak kadar karmaşık olduğunu söylemiştik; burada yaklaşık bir hesap yapabiliriz.

Her atomun R yarıçaplı bir küre hacminin merkezinde olduğunu varsayalım. Buna göre, atomların sayısal yoğunluğu

$$N = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (4.58)$$

olur. Makroskopik alanı şöyle iki terime ayırabiliriz:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{kendi}} + \vec{E}_{\text{diğer}} \quad (4.59)$$

Burada \vec{E}_{kendi} atomun kendi alanının küre içindeki ortalama değeri, $\vec{E}_{\text{diğer}}$ ise küre dışındaki herşeyin alanıdır. (Aslında küre içindeki ortalama değil, küre merkezindeki alanın kullanılması gerekirdi; fakat Problem 3.41'de gördüğünüz gibi, ikisi eşittir.) Şimdi, (4.55) ve (4.56) denklemlerinde kullanılması gereken doğru alan $\vec{E}_{\text{diğer}}$ olmalıydı:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{diğer}}, \quad \vec{P} = N\alpha \vec{E}_{\text{diğer}} \quad (4.60)$$

Dipol momenti \vec{p} olan kürenin ortalama alanı yine Problem 3.41'de bulunmuştu:

$$\vec{E}_{\text{kendi}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{R^3}$$

Buna göre, (4.59) denklemini şöyle olur:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{R^3} \vec{E}_{\text{diğer}} + \vec{E}_{\text{diğer}} = \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right) \vec{E}_{\text{diğer}}$$

(4.58) denklemini kullanılıp R elenirse

$$\vec{E} = \left(1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}\right) \vec{E}_{\text{diğer}} \quad \text{ve} \quad \vec{P} = \frac{N\alpha}{(1 - N\alpha/3\epsilon_0)} \vec{E} \quad (4.61)$$

olur ve aranan bağıntı bulunur:

$$\chi_e = \frac{N\alpha/\epsilon_0}{(1 - N\alpha/3\epsilon_0)} \quad (4.62)$$

Bu sonuç, (4.57) formülündeki ilkel modelden daha gerçekçi bir bağıntıdır. Bu bağıntıyı yorumlamak üzere, Örnek 4.1'deki atom modeli için bulduğumuz α katsayısını kullanalım. (4.2) formülünde a yarıçaplı atomun polarizabilitesini $\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$ bulmuştuk. Bu değeri kullanırsak

$$\chi_e = \frac{N(4\pi a^3)}{(1 - N(\frac{4}{3}\pi a^3))} = \frac{3f}{1-f} \quad (4.63)$$

olur; buradaki $f = a^3/R^3$ oranı aynı zamanda, toplam hacim içinde atomların kapladığı hacim oranıdır. Gazlarda atomlar arası uzaklık çok büyük olduğundan f oranı çok küçük olur ve $\chi_e \rightarrow 0$ olur. [Bu limitte (4.57) formülü de iyi sonuç verir.] Fakat yoğun maddeler için (4.62) formülü tam uygun olmaz; her atomu küresel bir hacim içinde varsaymak doğru değildir. Aynı hesap, küre yerine küp atomlar alınır da aynı sonucu verir (bkz. Problem 4.32).

Fakat, χ_e gibi makroskopik bir büyüklük ile α gibi atomik bir parametre arasında doğrudan bir bağlantı kurulmuş olması çok ilginçtir. Genelde (4.62) denklemini K dielektrik sabiti cinsinden ifade edilir:

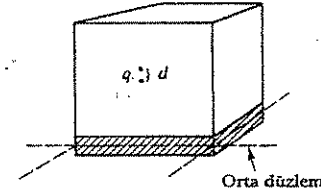
$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \left(\frac{K-1}{K+2} \right) \quad (4.64)$$

Bu bağıntı Clausius-Mossotti formülü veya, optikteki adıyla Lorentz-Lorenz denklemi olarak bilinir. Bir kapasitörün levhaları arasında dielektrik madde konulup C sığasındaki değişme ölçülürse, K sabiti doğrudan bulunur ve böylece atom yapısı hakkında bilgi alınır.

Polar moleküller için duyunluğun mikroskopik incelemesi sadece elektrostatik bir problem olmaktan çıkar. Çünkü bu kez ısısal çalkantı etkisi moleküllerin alan yönünde dizilmesini bozacaktır. Maddenin sıcaklığı arttıkça, moleküller arası çarpışmalar bu düzeni daha çok bozar ve duyunluğun azalmasını bekleriz. Bu inceleme istatistik mekanik gerektirir ve bunu bir problem olarak size bırakıyorum (bkz. Problem 4.38).

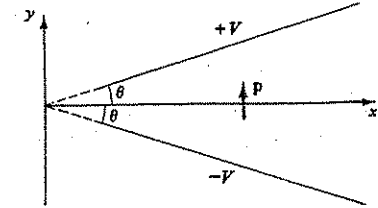
Problem 4.31 Tablo 4.1'deki maddelerin Clausius-Mossotti formülünü sağladığını gösterin. (Dielektrik sabitleri Tablo 4.2'de bulabilirsiniz.)

! Problem 4.32 Clausius-Mossotti formülünü çıkarırken, her atomun R yarıçaplı küresel bir hacim içinde olduğunu varsaymıştık. Atomları bir kenarı s uzunlukta kübik hacim içinde varsayıp aynı hesabı tekrar edin. (Merkezdeki bir \vec{p} dipolünün küp içindeki ortalama elektrik alanını hesaplamamız gerekiyor. Bunun için, Şek. 4.34'deki gibi, küp merkezinden d uzaklıktaki noktasal bir q yükünün ortalama alanını bulun. Simetriye göre, alt taraftaki taranmış kısım dışında alan ortalaması sıfır olacaktır. \vec{E} 'nin düşey bileşeninin $2d$ kalınlıkta fazla değişmediğini varsayıp alanın orta düzlemdeki değerini alabilir ve bu düzlemde $\int \vec{E} \cdot d\vec{a}$ Gauss yasasını uygulayabiliriz.



Şekil 4.34

BÖLÜM 4 ÜZERİNE EK PROBLEMLER



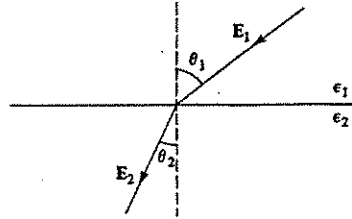
Şekil 4.35

Problem 4.33 y -yönünde bir \vec{p} dipolü Şek. 4.35'teki gibi, sonsuz iki iletken düzlem arasında eşit uzaklığa konulmuştur. Düzlemler x -ekseniyle aynı θ açısı yapmakta ve zıt $\pm V$ potansiyellerinde tutulmaktadır. \vec{p} üzerindeki bileşke kuvvetin yönü ne olur? Açıklayın.

Problem 4.34 Merkezi orijinde ve bir kenarı s olan küp şeklindeki bir dielektrik içinde kalıcı $\vec{P} = k\vec{r}$ polarizasyonu vardır (k bir sabit). Tüm bağlı yükleri bulun ve toplam bağlı yükün sıfır olduğunu gösterin.

Problem 4.35 Duygunluğu χ_e ve yarıçapı R olan küre şeklindeki lineer dielektriğin merkezine noktasal bir q yükü konulmuştur. $r < R$ olan bölgede elektrik alanı, polarizasyonu ve bağlı yükleri bulun. Yüzeydeki bağlı yük yoğunluğu ne kadardır? Bunu sıfırlayan negatif bağlı yük nerededir?

Problem 4.36 İki dielektrik ortamın arakesit düzleminde elektrik alan çizgileri yön değiştirir (Şek. 4.36). Yüzeyde *serbest* yük olmadığını varsayıp $\tan \theta_2/\theta_1 = \epsilon_1/\epsilon_2$ olduğunu gösterin.



Şekil 4.36

! Problem 4.37 Dielektrik sabiti K ve yarıçapı R olan küre şeklindeki lineer dielektrikğin merkezine noktasal bir \vec{p} dipolü konulmuştur. Küre içinde ve dışında potansiyeli bulun.

$$\left(\text{Yanıt: } \begin{aligned} & \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \frac{1}{K} \left[1 + 2 \frac{r^3}{R^3} \frac{(K-1)}{(K+2)} \right] & (r < R) \\ & \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \left(\frac{3}{K+2} \right) & (r > R) \end{aligned} \right)$$

! Problem 4.38 Clausius-Mossotti formülü [(4.62) denklemi] polar olmayan maddelerin duygunluğunu atomik polarizabilite katsayısı cinsinden verir. Polar maddelerin duygunluğunu, moleküllerin kalıcı p dipol momentleri cinsinden veren Langevin denklemini burada çıkaralım. Şu yolu izleyin:

(a) Bir \vec{E} dış alanındaki dipolün enerjisi $u = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ olup, dipolün yönüne bağlı olarak, $[-pE, +pE]$ arasındaki değerleri alabilir. İstatistik mekanığa göre, mutlak T sıcaklığında dengede olan bir sistemde, bir molekülün u enerjisine sahip olma olasılığı $\exp(-u/kT)$ Boltzmann çarpanı ile verilir. Buna göre, dipollerin ortalama enerjisi şöyle yazılabilir:

$$\langle u \rangle = \frac{\int u e^{-u/kT} du}{\int e^{-u/kT} du}$$

Buradaki integraller $[-pE, +pE]$ aralığındadır. Bu ifadeyi kullanarak, birim hacimde N molekülden oluşan bir maddenin polarizasyonunun

$$P = Np[\coth(pE/kT) - (kT/pE)]$$

olduğunu gösterin. Bu, Langevin formülüdür. $P/(Np)$ 'nin (pE/kT) 'ye göre grafiğini çizin.

(b) (Büyük alan/alçak sıcaklık) limitinde, hemen hemen tüm moleküllerin hizaya geldiğine ve maddenin lineer *olmadığına* dikkat edin. Fakat, genelde $kT \gg pE$ olur. Bu limitte maddenin lineer olduğunu gösterin, ve N, p, T, k cinsinden duygunluğunu bulun. Örnek olarak, suyun 20°C sıcaklıkta duygunluğunu hesaplayın ve Tablo 4.2'deki deneysel değerle karşılaştırın. (Suyun dipol momentleri $6.1 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ dir.) Sonucunuz deneyden çok farklı olacaktır, çünkü \vec{E} ile \vec{E}_{diger} arasındaki farkı yok saydık. Yoğunluğu az olan gazlarda bu fark küçük olduğundan daha iyi sonuç bulabilirsiniz. 100°C sıcaklıkta ve 1 atm basınçta su buharı için hesabı tekrar edin.

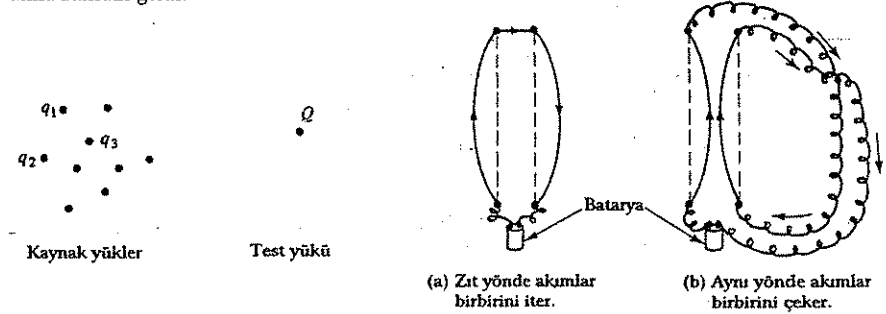
5

MAGNETOSTATİK

5.1 LORENTZ KUVVETİ

5.1.1 Magnetik Alan

Elektromagnetik teorisin temel problemini bir kez daha hatırlayalım: q_1, q_2, q_3, \dots kaynak yüklerinin bir Q test yükü üzerindeki etkisini hesaplamak (Şek. 5.1). Toplanabilirlik ilkesine göre, sadece iki yük arasındaki kuvvet ifadesini bilmek yeterlidir—toplam kuvvet her bir yükün Q üzerine uyguladığı kuvvetlerin vektörel toplamı olur. Buraya kadarki bölümlerde elektrostatiği, yani *durgun* yüklerin uyguladığı kuvveti inceledik. Şimdi *hareketli* yükleri ele alma zamanı geldi.



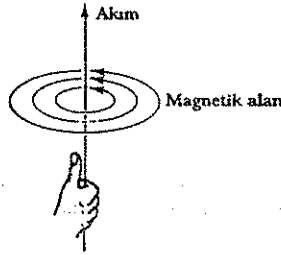
Şekil 5.1

Şekil 5.2

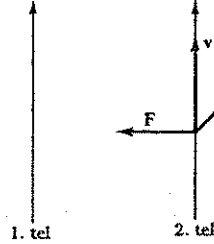
Sizi nelerin beklediğine bir örnek vermek isterim: Aralarında 20–30 cm uzaklık bulunan ve tavadan asılı iki tel düşünelim. Bu telleri bir bataryaya bağlıyorum, öyle ki akım bir telden gidip diğerinden geri dönüyor olsun. Akım verdiğimde tellerin birbirini ittiği gözlenir (Şek. 5.2a). Bunu nasıl açıklarsınız? Belki bataryadan tellere yükler verildiğini ve aynı işaretli yüklerin birbirini ittiğini düşünebilirsiniz. Ama bunun doğru olmadığını kolayca görürüz: akım geçerken tellere dışardan bir test yükü yaklaşırsak hiç kuvvet ölçmeyiz; yani, teller nötr durumdadır. (Telde elektronların hareket ettiği doğrudur, ama bu hareket sırasında dahi telin her yerinde aynı miktarda pozitif ve negatif yük vardır.) Şimdi telleri Şek. 5.2b'de olduğu gibi yerleştirir ve her iki teldeki akımın *aynı yönde* olmasını sağlarsam, bu kez tellerin birbirini *çektiğini* gözlenir!

Neyin nesi olduğunu henüz bilmiyorum ama, bunun elektrostatik kuvvet *olmadığı* açıktır. Sizi magnetik kuvvetle tanıştırayım. *Durgun* bir yük sadece \vec{E} elektrik alanı oluşturuyordu; *hareketli* yük, elektrik alana ek olarak, bir de \vec{B} magnetik alanı oluşturur. Magnetik alanın varlığı da kolayca gözlenebilir—bunun için oyuncak bir pusula yeterlidir. Bu aygıtın nasıl çalıştığı şimdilik önemli değil, pusula ibresinin magnetik alan yönünü gösterdiğini bilin yeter. İbre genelde *kuzey* yönünü gösterir, çünkü Dünya'nın magnetik alanı vardır; fakat laboratuvar da çok daha büyük magnetik alanlar oluşturabiliriz ve pusula oradaki magnetik alan yönünü gösterir. Şimdi, akım geçen bir tele pusulayı yaklaştırdığımızda tuhaf bir durum

gözeriz: Magnetik alan telden içeri veya telden dışarı doğru yönde değil, telin çevresinde dolanır yöndedir. Teli, baş parmak akım yönünde olacak şekilde, sağ elinizle kavırsanız, dört parmağınız magnetik alan yönünde kıvrılır (Şek. 5.3). Bu yöndeki bir alan yakındaki paralel bir akımı nasıl çekebilir? Şek. 5.4'teki ikinci telde magnetik alan kağıt düzlemi içine doğru, yüklerin hızı yukarı doğru, ama kuvvet sola doğru olur. Bu tür bir kuvveti temsil edecek ifade nasıl olmalıdır? Şimdi bunları inceleyelim.



Şekil 5.3



Şekil 5.4

5.1.2 Magnetik Kuvvet

Şek. 5.4'teki kuvvetin bir vektörel çarpımla temsil edilebileceğini herhalde görmüşsünüzdür. Gerçekten de, bir \vec{B} magnetik alanında \vec{v} hızıyla hareket eden bir Q yüküne etkiyen magnetik kuvvet şöyledir:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = Q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.1)$$

Bunu, $\vec{F}_{\text{elek}} = Q\vec{E}$ elektriksel kuvvetle birleştirirsek, bir Q yükü üzerindeki toplam elektromagnetik kuvveti veren Lorentz kuvveti ifadesini buluruz:

$$\vec{F} = Q [\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})] \quad (5.2)$$

Elbette (5.1) denklemini ispat etmiş olmuyorum. Bu da, Coulomb yasası gibi, teoremin bir aksiyomudur; doğru olup olmadığı deneyle anlaşılacaktır. Buradan sonra yapılacak iş \vec{B} magnetik alanını bulmaktır. Ancak, önce Lorentz kuvvetine biraz eğilelim, çünkü bu tür bir kuvvet çok şaşırtıcı hareketlere yol açabilmektedir.

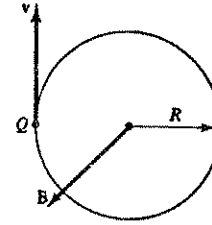
Örnek 5.1: Siklotron hareketi.

Yükü bir parçacığın magnetik alanda en bilinen hareketi düzgün dairesel harekettir. Şek. 5.5'teki düzgün magnetik alan kağıt düzleminden dışa doğrudur. Q yükünün v hızı kağıt düzleminde ise buna etkiyen magnetik kuvvet, sağ el kuralına göre, daima hızla dik olacaktır. Düzgün dairesel hareketin merkezci ivmesi v^2/R olduğundan, Newton'un ikinci yasası yazılırsa

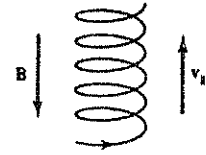
$$QvB = m \frac{v^2}{R} \quad \text{veya} \quad p = QBR \quad (5.3)$$

olur. Burada m parçacığın kütlesi ve p momentumudur. (5.3) denklemini siklotron formülü olarak bilinir, çünkü siklotron hızlandırıcısında bir parçacığın hareketini temsil eder. Bu formül deneylerde bir parçacığın momentumunun nasıl ölçülebileceğine de yol gösterir: parçacığı bilinen bir magnetik alan içine gönderin, oluşan dairesel yörüngenin yarıçapını ölçün. Nitekim temel parçacıkların momentumları hep böyle ölçülür.

5.1. LORENTZ KUVVETİ



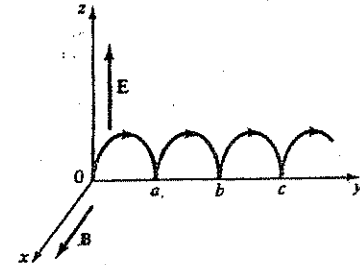
Şekil 5.5



Şekil 5.6

Bu örnekte yükün \vec{B} alanına dik bir düzlemde hareket ettiğini varsayalım. Eğer, buna ek olarak, parçacığın \vec{B} yönünde bir \vec{v}_{\parallel} hız bileşeni varsa, bu bileşen (5.1) formülündeki magnetik kuvvetten etkilenmez. Bu durumda parçacığın yörüngesi helezon şeklinde olur (Şek. 5.6). Yarıçap yine (5.3) formülüyle bulunur, fakat formülde hızın v_{\perp} bileşeni kullanılmalıdır.

Örnek 5.2: Sikloid hareketi. Düzgün magnetik alana ek olarak, buna dik yönde düzgün bir \vec{E} elektrik alanı vardır. (Şek. 5.7'de olduğu gibi, magnetik alanı x yönünde ve elektrik alanı z yönünde alalım.) Q yüklü bir parçacık orijinden ilk hızsız bırakılıyor. Parçacığın yörüngesi nasıl olur?



Şekil 5.7

Çözüm : Önce ne olup bittiğine bakalım. Başlangıçta parçacık durgun olduğundan, magnetik kuvvet sıfırdır ve sadece elektrik alan parçacığı z -yönünde ivmelendirir. Parçacık hız kazanmaya başladığında devreye giren magnetik kuvvet, sağ el kuralına göre, parçacığı sağa doğru çeker. Hız arttıkça F_{mag} kuvveti giderek büyür ve parçacığın yörüngesini y -eksenine paralel hale getirir. Buradan itibaren parçacık elektriksel kuvvete zıt yönde olduğundan yavaşlamaya başlar—magnetik kuvvet de azalır ve elektriksel kuvvet duruma hakim olup parçacığı τ noktasında durdurur. Bu noktadan itibaren her şey yeniden başlar ve parçacık sırasıyla b, c, \dots noktalarına uğrar.

Şimdi hesaba geçelim. x yönünde hiçbir kuvvet olmadığından, parçacığın konum vektörü $(0, y(t), z(t))$ ile gösterilirse, hız şöyle olur:

$$\vec{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$$

Burada nokta (') zamanla göre türevi gösterir. Vektörel çarpım hesaplanır:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = (B\dot{z})\hat{j} - (B\dot{y})\hat{k}$$

Newton'un 2.yasası ($\vec{F} = m\vec{a}$) uygulanır:

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = Q[E\hat{k} + B\hat{z}\hat{j} - B\hat{y}\hat{k}] = m\vec{a} = m(\ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k})$$

Veya, y ve z -bileşenlerini ayrı yazarsak

$$QB\dot{z} = m\ddot{y} \quad QE - QB\dot{y} = m\ddot{z}$$

olur. Burada siklotron frekansı adında bir parametre tanımlayalım:

$$\omega = \frac{QB}{m} \quad (5.4)$$

(Bu, elektrik alan yokluğunda, parçacığın dönme frekansı olur.) Buna göre, hareket denklemleri şöyle yazılır:

$$\ddot{y} = \omega\dot{z} \quad \ddot{z} = \omega\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right) \quad (5.5)$$

Bu denklem sisteminin genel çözümü (birinci denklemin türevi alınıp ikincide \ddot{z} elenir)

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Bu örnekte parçacık $t = 0$ anında orijinden [$y(0) = z(0) = 0$] ve ilk hızsız [$\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$] olarak başlamıştı. Bu koşullarla C sabitleri bulunur ve yerine konulur:

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t), \quad z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t) \quad (5.7)$$

Bu sonuç fiziksel olarak pek aydınlatıcı değil; şöyle bir parametre tanımlayalım:

$$R = \frac{E}{\omega B} \quad (5.8)$$

Sinüs ve kosinüsleri $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ özdeşliğini kullanarak elediğimizde

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2 \quad (5.9)$$

bulunur; bu R yarıçaplı bir çember denklemdir. Çemberin $(0, R\omega t, R)$ merkezi ise y -yönünde

$$v = \omega R = \frac{E}{B} \quad (5.10)$$

sabit hızıyla hareket etmektedir. Yani parçacık, tıpkı y -ekseni boyunca sabit v hızıyla giden bir tekerleğin çevresindeki nokta gibi hareket etmektedir. Matematikte bu eğriye **sikloid** denir. Dikkat edilirse, parçacığın net hareketi hiç de beklendiği gibi \vec{E} yönünde değil, ona dik yöndedir.

(5.1) formülündeki magnetik kuvvetin bir özelliğini vurgulamak gerekir:

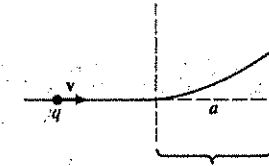
Magnetik kuvvet iş yapmaz.

Q yükü küçük bir $d\vec{l} = \vec{v} dt$ kadar yerdeğiştirdiğinde yapılan iş

$$dW_{\text{mag}} = \vec{F}_{\text{mag}} \cdot d\vec{l} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0 \quad (5.11)$$

olur, çünkü \vec{v} hızı ($\vec{v} \times \vec{B}$) çarpımına diktir. Magnetik kuvvetler hareket eden bir parçacığın yönünü değiştirebilir, ama hızını azaltıp çoğaltamazlar. Bu özellik Lorentz kuvvetinin yapısından kaynaklanır, fakat bazı durumlarda bunun yanlış olabileceğini düşünmemek elde değildir. Örneğin, otomobil hurdalarını kaldırmakta kullanılan magnetik vinçleri düşünün; burada magnetik kuvvetin iş yapmadığını söylemek cesaret ister. Böyle durumlarda mekanik kuvvetleri de katıp düşünmek gerekir.

Problem 5.1 q yüklü bir parçacık sayfanın içine doğru düzgün \vec{B} magnetik alanı bulunan bir bölgeye \vec{v} hızıyla giriyor (Şek. 5.8). Parçacığın alan dışına çıkarken geliş doğrultusundan d kadar saptığı gözleniyor. Parçacığın yük işareti nedir? Parçacığın momentumunu a, d, B ve q cinsinden bulun.

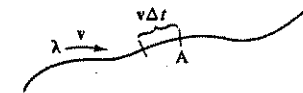


Şekil 5.8

Problem 5.2 Örnek 5.2'deki parçacık orijinden şu değişik hızlarla atıldığında yörüngesi ne olur?

- (a) $\vec{v}(0) = (E/B)\hat{j}$
- (b) $\vec{v}(0) = (E/2B)\hat{j}$
- (c) $\vec{v}(0) = (E/B)(\hat{j} + \hat{k})$

5.1.3 Akım



Şekil 5.9

Bir telin kesitinden birim zamanda geçen yük miktarına **akım** diyoruz. Tanım olarak, sol tarafa akan negatif yük sağ tarafa akan pozitif yük olarak sayılır. Bu kabul elektromagnetik olaylarda yük \times hız çarpımına bağlı hiçbir büyüklüğü etkilemez— q ve \vec{v} birlikte işaret değiştirdiğinde sonuç değişmez. (Lorentz kuvvetinde bu böyledir; fakat Problem 5.51'deki Hall olayı bu kurala uymaz.) Gerçekte iletkenler içinde hareket eden negatif yüklü elektronlardır—yani, akıma *zıt yönde* giderler. Buradaki incelemede bazan pozitif yükler hareket ediyormuş gibi anlatacağım; Benjamin Franklin'in bu talihsiz seçimi¹ yüzünden bu karışıklığı yaşıyoruz. Akım birimi Coulomb/saniye, veya **ampere** (A) olur:

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s} \quad (5.12)$$

Bir teldeki λ boyca yük yoğunluğu v hızıyla hareket ediyorsa (Şek. 5.9), bunun oluşturduğu akım

$$I = \lambda v \quad (5.13)$$

¹ Franklin elektronları pozitif, protonları negatif almış olsaydı, şimdi bu sorun olmayacaktı. Franklin kedi postu ve cam çubukla yaptığı deneyde bu seçimi tamamen keyfi olarak yapabildi.

olur; çünkü $v \Delta t$ uzunluğunda bir tel parçası üzerindeki $\lambda(v \Delta t)$ yükü, A noktasını Δt zaman aralığında geçecektir. Gerçekte akım bir vektördür:

$$\vec{I} = \lambda \vec{v} \quad (5.14)$$

Fakat, akım zaten telin doğrultusunu izlediğinden, \vec{I} 'nin vektör yapısı pek belirtilmeden kullanılır. Nötr bir telde pozitif ve negatif yükler eşit sayıdadır; pozitif yükler durgun olduğundan akıma katılmazlar—(5.13) denklemindeki λ sadece negatif yük yoğunluğunu gösterir. (Eğer her iki tür yük de hareket ediyorsa $\vec{I} = \lambda_+ \vec{v}_+ + \lambda_- \vec{v}_-$ olurdu.)

Akım geçen bir telin dl uzunluğuna etkiyen kuvvet, yine Lorentz kuvvetidir:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int (\lambda dl) (\vec{v} \times \vec{B}) = \int (\vec{I} \times \vec{B}) dl \quad (5.15)$$

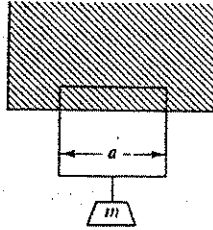
Burada \vec{I} akımı yönünde vektörel bir $d\vec{l}$ uzunluk elemanı tanımlarsak

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int I (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (5.16)$$

yazılır. Akım şiddeti tel boyunca değişmediğinden integral dışına alabiliriz:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = I \int (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (5.17)$$

Örnek 5.3: Dikdörtgen bir tel çerçevesinin bir kenarı düzgün \vec{B} magnetik alanı içinde olup, diğer kenarında bir m kütle asılıdır (Şek. 5.10). Taraf bölgedeki magnetik alan kağıt düzleminin içine doğrudur. Küllenin dengede kalabilmesi için çerçeveden geçen I akımı ne olmalıdır?



Şekil 5.10

Çözüm : Magnetik kuvvetin (veya, $\vec{I} \times \vec{B}$ çarpımının) yukarı yönde olabilmesi için akım saat yönünde olmalıdır. Buna göre

$$F_{\text{mag}} = IBa$$

olup a çerçevesinin genişliğidir. (Düsey kenarlardaki magnetik kuvvetler birbirine zıt yönde olurlar.) F_{mag} kuvveti cismin mg ağırlığını karşılamalıdır:

$$I = \frac{mg}{Ba}$$

Yük akışı bir yüzey üzerinde oluyorsa, \vec{K} ile gösterilen bir yüzey akım yoğunluğu tanımlanır. Genişliği dl_{\perp} olan ve yük akışına paralel seçilmiş bir şerit düşünelim (Şek. 5.11).

5.1. LORENTZ KUVVETİ

Bu şeritteki akım vektörü $d\vec{I}$ ise, yüzey akım yoğunluğu şöyle tanımlanır:

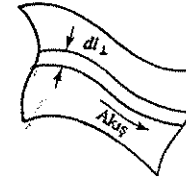
$$\vec{K} = \frac{d\vec{I}}{dl_{\perp}} \quad (5.18)$$

Açık bir deyişle K , yüzeydeki akışa dik birim uzunluktan geçen akımdır. Özel olarak, yüzeydeki σ yük yoğunluğu \vec{v} hızıyla hareket ediyorsa

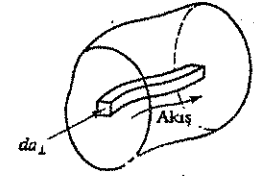
$$\vec{K} = \sigma \vec{v} \quad (5.19)$$

olur. Çünkü dl_{\perp} genişlikteki şerit üzerindeki boyca yük yoğunluğu σdl_{\perp} olur; buradan $d\vec{I} = (\sigma dl_{\perp}) \vec{v}$ bulunur. Genelde \vec{K} , σ yük yoğunluğuna bağlı olarak, yüzeyin her noktasında farklı değerlerde olabilir. Bir yüzey akımı üzerindeki magnetik kuvvet şöyle ifade edilir:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int (\sigma da) (\vec{v} \times \vec{B}) = \int (\vec{K} \times \vec{B}) da \quad (5.20)$$



Şekil 5.11



Şekil 5.12

Yük akışı üç boyutlu bir bölge içinde oluyorsa, \vec{J} ile gösterilen bir hacimsal akım yoğunluğu tanımlanır. Şek. 5.12'de olduğu gibi, yük akışına paralel giden ve küçük da_{\perp} kesitli bir tüp düşünelim. Bu tüp içindeki akım $d\vec{I}$ ise, hacimsal akım yoğunluğu şöyle tanımlanır:

$$\vec{J} = \frac{d\vec{I}}{da_{\perp}} \quad (5.21)$$

Diğer bir deyişle J , akışa dik yöndeki birim kesitten geçen akımdır. Özel olarak, ρ hacimsal yük yoğunluğu \vec{v} hızıyla hareket ediyorsa

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad (5.22)$$

olur. Hacimsal akım yoğunluğu üzerindeki magnetik kuvvet şöyle olur:

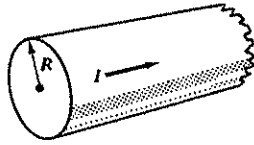
$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int (\rho d\tau) (\vec{v} \times \vec{B}) = \int (\vec{J} \times \vec{B}) d\tau \quad (5.23)$$

Örnek 5.4: (a) Kesiti R yarıçaplı daire şeklinde olan bir teldeki I akımı kesit içinde düzgün dağılmıştır (Şek. 5.13). Hacimsal akım yoğunluğunu bulun.

Çözüm : Akış yönüne dik kesitin yüzey alanı πR^2 olduğundan, (5.21) formülü uygulanır:

$$J = \frac{I}{\pi R^2}$$

(b) Bu kez telin kesitindeki akım yoğunluğu eksen den uzaklıkla orantılıdır: $J = kr$ (k bir sabit). Teldeki toplam akımı bulun.



Şekil 5.13

Çözüm : J yoğunluğu r ile değiştiğinden, (5.21) denkleminin integralini almamız gerekir. Şek. 5.14'deki tüpün taralı kesiti $da_{\perp} = r dr d\theta$ olup, bu taralı tüp içindeki akım $J da_{\perp}$ olur. Buna göre hesap yapılır:

$$I = \int (kr) (r dr d\theta) = 2\pi k \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi k R^3}{3}$$

(5.21) formülüne göre, bir S yüzeyini geçen akım şöyle yazılabilir:

$$I = \int_S J da_{\perp} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (5.24)$$

Buradaki skaler çarpım $d\vec{a}$ yüzey elemanı vektörünün kesite dik bileşenini verir. Benzer şekilde, bir V hacmini geçen akım

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) d\tau$$

(Burada diverjans teoremini kullandım.) $\mathbf{Yük korunumlu olduğundan}$, yüzeyi geçen $\mathbf{yük}$ hacim içindeki yükte bir azalmaya neden olacaktır:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) d\tau = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = -\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau$$

(Buradaki eksi işareti, dışa doğru bir akışın, içerdeki yükte *azalmaya* karşılık gelmesini sağlar.) Bu eşitlik her V hacmi için doğru olduğundan,

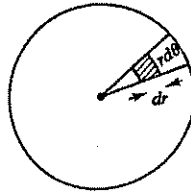
$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.25)$$

Süreklilik denklemi denilen bu bağıntı, yerel yük korunumunun matematiksel ifadesidir.

Daha sonraki uygulamalar için noktasal, boyca, yüzeysel ve hacimsal akım yoğunlukları için yazılan denklemleri nasıl dönüştüreceğimizi burada bir kez daha tekrar edeyim:

$$\sum_{i=1}^n ()_{q_i} \vec{v}_i \longleftrightarrow \int_{\text{eğri}} () \vec{I} dl \longleftrightarrow \int_{\text{yüzey}} () \vec{K} da \longleftrightarrow \int_{\text{hacım}} () \vec{J} d\tau \quad (5.26)$$

Bu, yükler için uyguladığımız $q \leftrightarrow \lambda dl \leftrightarrow \sigma da \leftrightarrow \rho dr$ kuralının karşılığıdır. Bu kural hatırlanırsa, (5.1) Lorentz kuvveti ifadesine karşılık gelen (5.15), (5.20) ve (5.23) formülleri bu şekilde çıkarılabilir.



Şekil 5.14

Problem 5.3 Bir bölgedeki magnetik alan

$$\vec{B} = kz\hat{i} \quad (k \text{ bir sabit})$$

olarak veriliyor. yz -düzleminde, merkezi orijinde ve kenar uzunluğu s olan bir kare çerçeveden I akımı geçmektedir. Çerçeve üzerindeki toplam kuvveti bulun.

Problem 5.4 R yarıçaplı bir telden I akımı geçmektedir.

(a) Akım tel yüzeyinde düzgün dağılmışsa, K yüzey akım yoğunluğu ne olur?

(b) Hacımsal akım yoğunluğu merkezden uzaklıkla ters orantılı olarak dağılmışsa, J ne olur?

Problem 5.5 (a) Bir disk yüzeyinde düzgün σ yük yoğunluğu vardır. Disk ω açısal hızıyla döndüğünde, merkezden r uzaklıkta K yüzeyel akım yoğunluğu ne olur?

(b) Merkezi orijinde olan R yarıçaplı küre hacmi içinde toplam Q yükü düzgün dağılmıştır. Küre z -ekseni etrafında ω açısal hızıyla dönüyor. Küre içinde (r, θ, ϕ) koordinatlı bir noktadaki \vec{J} akım yoğunluğunu bulun.

Problem 5.6. Örnek 5.3'te akım mg/Ba değerinden büyük olur ve bu değerde sabit tutulursa ne olur? (Bu problemin tam bir incelemesi sürprizlerle doludur. Dikkatli bir şekil çizip çerçevenin üst kenarındaki bir yükün gerçek hareketini ve buna etkiyen kuvvetin yönünü gösterin. Bu durumda akımı sabit tutabilmek için yatay (ve magnetik olmayan) bir kuvvet daha gerektiğine dikkat edin. Bu ek kuvvet nereden gelebilir? Tel y kadar yükseldiğinde, bu ek kuvvetin yaptığı işin ($I\mathcal{B}ay$) olduğunu, ve bunun çerçevenin enerjisindeki artışa eşit olduğunu gösterin. Magnetik kuvvetin yaptığı iş ne kadardır?

Problem 5.7 Bir V hacmı içindeki yük ve akım dağılımları için $\int_V \vec{J} d\tau = d\vec{p}/dt$ olacağını gösterin; burada \vec{p} toplam dipol momentidir. (Yol gösterme: $\int_V \vec{\nabla} \cdot (x\vec{J}) d\tau$ integralini hesaplayın.)

5.2 BIOT-SAVART YASASI

5.2.1 Kararlı Akımlar

Durgun yüklerin elektrik alanı zamanla değişmez; **elektrostatik** terimi de buradan kaynaklanır. Benzer şekilde, *kararlı* akımların magnetik alanı zaman içinde sabit kahr. Kararlı akımların incelemesine de **magnetostatik** diyoruz.

$$\begin{cases} \text{durgun yükler} & \Rightarrow & \text{sabit elektrik alan; elektrostatik} \\ \text{kararlı akımlar} & \Rightarrow & \text{sabit magnetik alan; magnetostatik} \end{cases}$$

Kararlı akım deyince hiç değişmeden süregelen bir yük akımı anlıyoruz. Uzayın herhangi bir bölgesinde birim zamanda geçen yük miktarı şimdi ne kadarsa, 10 saniye önce veya 10 yıl sonra aynı değerdedir. Elbette, günlük yaşamda gerçekten kararlı bir akım yoktur (tıpkı gerçekten durgun bir yük olmadığı gibi). Bu anlamda elektrostatik ve magnetostatik, sadece ders kitaplarında karşılaşılan papay birer dünyayı temsil ederler. Fakat, yük ve akım dağılımlarındaki değişimler küçük ise, gerçek duruma iyi birer *yaklaşıklık* olurlar. Örneğin, saniyede 50 kez yön değiştiren şehir akımı bile, bazı durumlarda magnetostatik sayılabilir!

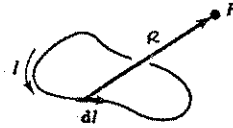
Dikkat ederseniz, hareketli noktasal bir yük kararlı akım sayılamaz; şimdi buradaydı, sonra orada. Bu nokta *siz*e küçük bir ayrıntı gibi gelebilir, ama *benim* uykularımı kaçırıyor. Neden mi? Elektrostatığın her konusunda noktasal bir yükle başlamış ve, toplanabilirlik ilkesini kullanarak, diğer yük dağılımlarına genellemiştik. Bunu magnetostatikte yapamıyorum, çünkü noktasal yükün hareketi kararlı akım anlamına gelmiyor. Bu nedenle,

daha işin başında tüm uzaya yayılmış akımlardan başlamak zorundayız; bu yüzden ispatlar biraz karmaşık gelebilir.

Kararlı akım geçen bir telde I akımı telin her yerinde I değerinde olmalıdır; aksi takdirde bir yerde yük birikecek ve akımı sürdürmek mümkün olmayacaktır. Bu nedenle, magnetostatikte $\partial \rho / \partial t = 0$ olur ve (5.25) süreklilik denklemi şu duruma gelir:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (5.27)$$

5.2.2 Kararlı Bir Akımın Magnetik Alanı



Şekil 5.15

Kararlı bir akım geçen telin magnetik alanı Biot-Savart yasası ile verilir:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times \hat{R}}{R^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \hat{R}}{R^2} \quad (5.28)$$

İntegral tel boyunca ve akım yönünde gidilerek alınır; dl küçük bir tel uzunluğudur. Her zaman olduğu gibi \hat{R} , akım parçasından P noktasına çizilen vektördür (Şek. 5.15). μ_0 'ın birimi boşluğun magnetik geçirgenliği (permeabilite) adını alır ve MKS sisteminde değeri²

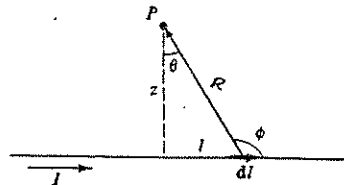
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad (5.29)$$

olur. Bu seçim sonucu \vec{B} magnetik alanı newton/amper-metre, veya tesla (T) biriminde çıkar:

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ N/(A.m)} \quad (5.30)$$

(Magnetik alan için cgs birimi olan gauss pratikte daha uygun olmaktadır: 1 tesla = 10^4 gauss. Dünyanın magnetik alanı yarım gauss kadar, laboratuvarlarda üretilen şiddetli bir magnetik alan 10.000 gauss kadardır.) Magnetostatik'in temel denklemi olan Biot-Savart yasası, elektrostatikteki Coulomb yasasının işlevini yapar; $1/R^2$ bağımlı bunu anımsatıyor.

Örnek 5.5: Kararlı I akımı taşıyan sonsuz doğrusal telden z uzaklıkta magnetik alanı bulun (Şek. 5.16).



Şekil 5.16

Çözüm: Şekildeki küçük dl tel parçası için $d\vec{l} \times \hat{R}$ çarpımı sayfanın dışına doğru olup, büyüklüğü

$$dl \sin \phi = dl \cos \theta$$

²Bu değer deneysel bir sabit değil, keyfi seçilmiş bir sayıdır. μ_0 sabiti, birazdan göreceğimiz (5.33) denklemi ile, amper birimini tanımlayacak şekilde seçilir.

5.2. BIOT-SAVART YASASI

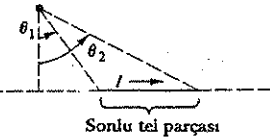
olur. Ayrıca, $l = z \tan \theta$ olarak ifade edilebilir. Buradan θ bağımsız değişkenine geçilirse

$$dl = \frac{z}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad \text{ve} \quad \frac{z}{R} = \cos \theta, \quad \text{olduğundan} \quad \frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2 \theta}{z^2}$$

yazılabilir. Buna göre, (5.28) integralini önce sonlu bir tel uzunluğu için alalım. Şek. 5.17'de görülen sonlu parçanın başlangıç ve bitiş açıları θ_1 ve θ_2 ise,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{z^2} \right) \left(\frac{z}{\cos^2 \theta} \right) \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (5.31)$$



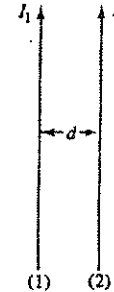
Şekil 5.17

Elbette sonlu bir tel parçasında kararlı akım olmaz (yük bir uca geldiğinde nereye gidebilir?); buradaki sonlu parça, örneğin kapalı bir devrenin doğrusal bir kısmı olabilir. Bu durumlarda, toplam magnetik alana sadece doğrusal parçanın katkısı hesaplanabilir.

Sonsuz doğrusal tel için $\theta_1 = -\pi/2$ ve $\theta_2 = \pi/2$ olacağından

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi z} \quad (5.32)$$

olup, magnetik alan yönü sayfa düzlemi dışına doğrudur. Magnetik alanın —tıpkı doğrusal telin elektrik alanı gibi—uzaklıkla ters orantılı olduğuna dikkat edelim. P noktasını telin altında seçmiş olsaydık, \vec{B} vektörü sayfa içine doğru olurdu. Magnetik alan, telin çevresinde "dolanım" yönünde olur.



Şekil 5.18

Bir uygulama olarak, birbirine paralel ve aralarında d uzaklığı olan, sırasıyla I_1 ve I_2 akımı taşıyan sonsuz iki tel arasındaki çekim kuvvetini hesaplayalım (Şek. 5.18). (5.32) formülüne göre, 1. telin 2.nin bulunduğu yerde oluşturduğu magnetik alan

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

olup sayfa düzlemi içine doğrudur. (5.16) formülüne göre, 2. telin dl uzunluğuna etkiyen kuvvet

$$F = I_2 \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \right) dl$$

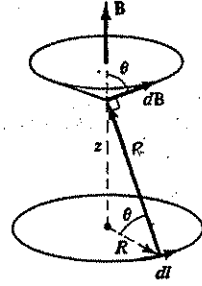
olur. Telin birim uzunluğuna etkiyen kuvvet ise

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{I_1 I_2}{d} \right) \quad (5.33)$$

olur. Antiparalel akımlar için kuvvet itici yönde olur.

Örnek 5.6 : Üzerinden I akımı geçen R yarıçaplı çemberin merkezinden z yükseklikte bir noktada magnetik alanı bulun (Şek. 5.19)

Şekil 5.19



Çözüm : Çember üzerinde akım yönünde seçilen küçük $d\vec{l}$ parçasının magnetik alana katkısı olan $d\vec{B}$ vektörü şekilde gösterilmiştir. Çember çevresinde $d\vec{l}$ integrali alınırken $d\vec{B}$ vektörü bir koni yüzeyini süpürür. Bu katkıların yatay bileşenleri birbirini sıfırlayacağından, sadece dikey bileşenlerin integrali magnetik alanı verir:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl}{R^2} \cos \theta$$

($d\vec{l}$ ve \hat{R} birbirine diktir; $\cos \theta$ çarpanı dikey bileşeni verir.) Burada $\cos \theta$ ve R^2 sabit olduğundan integral dışına alınabilir; dl parçalarının integrali çemberin çevresine eşittir:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{\cos \theta}{R^2} \right) 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.34)$$

Yüzey ve hacim akımları için Biot-Savart yasası ifadeleri şöyle olur:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K} \times \hat{R}}{R^2} da \quad \text{ve} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \hat{R}}{R^2} d\tau \quad (5.35)$$

Bu iki ifadeye bakıp, hareketli noktasal yükün magneti alanı için

$$\vec{B} \stackrel{?}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{R^2} \quad (5.36)$$

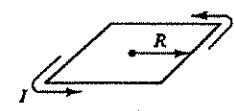
yazmaya kalkmayın; yanlış olur. Daha önce söyledim: noktasal yükün hareketi kararlı akım olmaz; Biot-Savart yasası sadece kararlı akımlar içindir.³

Problem 5.8 (a) I akımı geçen kare çerçevenin merkezindeki magnetik alanı bulun. Merkezden bir kenara olan uzaklık R dir. (Şek. 5.20).

³Fakat, (5.36) denklemi göreliliğin (v < c) hızlarda yaklaşık doğru olur. Bu konuyu Bölüm 9'da konuşacağız.

5.2. BIOT-SAVART YASASI

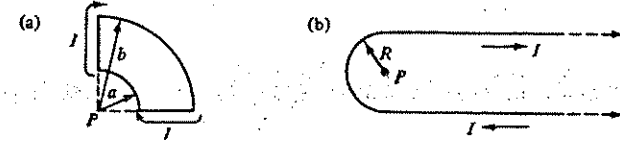
Şekil 5.20



(b) I akımı taşıyan n -kenarlı düzgün çokgenin merkezindeki magnetik alanı bulun. Yine R , merkezden bir kenara olan uzaklıktır.

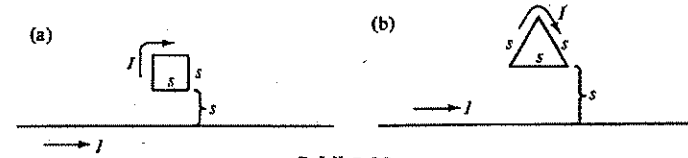
(c) Bulduğunuz ifadenin $n \rightarrow \infty$ limitinde, çember merkezindeki magnetik alanı verdiğini gösterin.

Problem 5.9 Şek. 5.21'deki akımların gösterilen P noktasında magnetik alanını bulun.



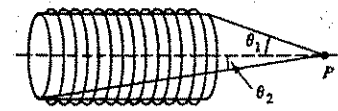
Şekil 5.21

Problem 5.10 (a) Şek. 5.22'de, I akımı geçen sonsuz doğrusal telin yakınındaki kare çerçeveden de I akımı geçiyor. Kare çerçeveye etkiyen toplam kuvveti hesaplayın. (b) Üçgen çerçeveye etkiyen toplam kuvveti bulun.

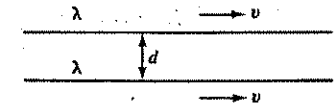


Şekil 5.22

Problem 5.11 Solenoid. Birim uzunlukta N sarımdan oluşan bir solenoidin eksenindeki P noktasında magnetik alanı bulun (Şek. 5.23). Solenoidin kesiti R yarıçaplı çember olup I akımı geçmektedir. Yanıtınızı en kolay θ_1 ve θ_2 açıları cinsinden ifade edebilirsiniz. Herbir sarımı çember varsayın ve Örnek 5.6 sonucunu kullanın. Sonsuz solenoidin merkezinde magnetik alan ne olur?



Şekil 5.23



Şekil 5.24

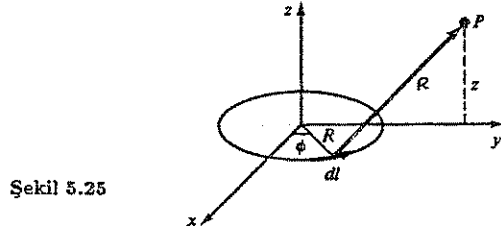
Problem 5.12 Birbirine d uzaklıkta paralel iki sonsuz doğrusal tel üzerinde eşit λ boyca yük yoğunlukları vardır (Şek. 5.24). Teller eşit v hızıyla hareket ediyorlar. v hızı ne olmalıdır ki magnetik çekim kuvveti elektrik itme kuvvetini tam dengeleyebilsin? Hızın sayısal değeri mantıklı mıdır?⁴

Problem 5.13 Problem 5.5'teki dönen disk ve dönen kürenin ekseninde $z > R$ olan bir noktada magnetik alanı bulun.

Problem 5.14 Örnek 5.6'daki akım geçen çemberin magnetik alanını, eksen üzerinde olmayan bir P noktasında hesaplamak istiyoruz (Şek. 5.25). P noktasını yz -düzleminde

⁴Görelilik teorisi okumuş olanlar bu problemde sorun aramalarıdır. λ ve v laboratuvar sisteminde ölçülmüş olduğundan, elektrostatik gibi hesap yapılabilir.

alırsak konumu $(0, y, z)$ olur. Telin dl parçasının konumu $(R \cos \phi, R \sin \phi)$ olup, ϕ açısı $[0, 2\pi]$ aralığında değişir. B_x, B_y, B_z bileşenlerini veren integralleri kurun ve B_x için hesabı tamamlayın.

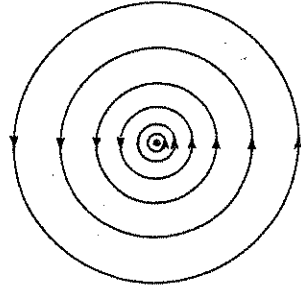


Şekil 5.25

5.3 MAGNETİK ALANIN DİVERJANS VE ROTASYONELİ

5.3.1 Doğrusal Akımlar

Sonsuz doğrusal bir akımın manyetik alan çizgileri Şek. 5.26'da gösterildiği gibidir. Yine, çizgilerin sıklığı alan şiddetini temsil eder. Burada \vec{B} alanı uzaklıkla ters orantılı olduğundan, merkezden uzaklaştıkça çizgiler seyrekleşir. Bu şekle baktığınızda, bu alanın diverjansının sıfır olacağını, ama rotasyonelin sıfırdan farklı olacağını tahmin edebilirsiniz. Tabii burada özel bir durumdan söz ediyoruz, ama nereye kadar sürdürebileceğimizi bir görelim.



Şekil 5.26

\vec{B} nin R yarıçaplı bir çember üzerindeki eğrisel integralini hesaplayalım. Manyetik alan (5.32) formülünden alırsak

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \right) dl = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \right) \oint dl = \mu_0 I$$

Sonuç R uzaklığından bağımsızdır, çünkü B alanı $1/r$ gibi azalırken, çemberin çevresi r gibi artıyor. Aslında, eğriyi çember seçmek gerekmez: Teli çevreleyen her kapalı eğri aynı sonucu verir. Nitekim, (r, ϕ, z) silindirik koordinatlarını seçer ve akımı z -yönünde alırsak

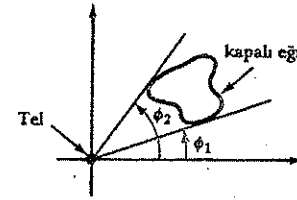
$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) \hat{\phi} \quad \text{ve} \quad d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

olur. Buna göre, kapalı herhangi bir eğri üzerinde

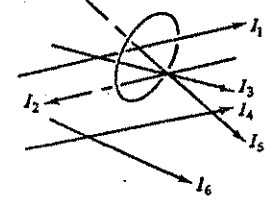
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right) \oint \left(\frac{1}{r} \right) r d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I$$

5.3. MAGNETİK ALANIN DİVERJANS VE ROTASYONELİ

bulunur. Burada eğrinin tel çevresinde bir kez dolandığı varsayıldı; iki kez dolansaydı ϕ açısı 0 dan 4π 'ye değişirdi; keza, eğri telin çevresinde dolanmıyorsa, ϕ açısı $[\phi_1, \phi_2]$ aralığında gidiş-geliş yaptığından, $\oint d\phi = 0$ olurdu (Şek. 5.27).



Şekil 5.27



Şekil 5.28

Şimdi bir doğrusal akımlar demeti gözönüne alalım. Seçtiğimiz kapalı eğri içinde kalan akımlar integrale $\mu_0 I$ kadar katkıda bulunurken; eğri dışında kalan akımlar bir katkıda bulunmazlar (Şek. 5.28). Buna göre, eğrisel integral sonucu şöyle olur:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{ic}} \quad (5.37)$$

Burada I_{ic} eğri içinde kalan net akımdır. Yük akışı hacimsal bir \vec{J} akım yoğunluğuyla verilmişse, eğri içinde kalan akım miktarı

$$I_{\text{ic}} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (5.38)$$

olur; integral eğrinin sınırladığı yüzey üzerinde alınır. Stokes teoremini (5.37) denkleminde uygularsak

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

olur ve buradan integrandların eşitliği çıkar:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.39)$$

Fazla yorulmadan \vec{B} 'nin rotasyoneli için en genel ifadeyi çıkarmış olduk (diverjansın sıfır olduğu açıktır). Fakat ispatımızda sonsuz doğrusal akımlar kullanılmış olması bir eksikliktir. Doğrusal tel yaklaşığına uymayan bir çok akım dağılımı vardır ve (5.39) formülünün bunlara da uyduğunu söyleyemeyiz. O halde, \vec{B} 'nin diverjans ve rotasyonelinin en genel matematik ispatına girelim.

5.3.2 \vec{B} 'nin Diverjans ve Rotasyoneli

Genel bir hacimsal akım yoğunluğu için Biot-Savart yasasından başlayalım:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \hat{R}}{R^2} d\tau \quad (5.40)$$

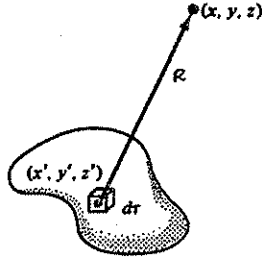
Bu formül $P = (x, y, z)$ noktasındaki manyetik alanı, $\vec{J}(x', y', z')$ akım yoğunluğunun integrali olarak verir (Şek. 5.29). Yola çıkmadan önce herşeyi açıkça belirtelim:

\vec{B} alanı (x, y, z) nin fonksiyonu,

\vec{J} akım yoğunluğu (x', y', z') nin fonksiyonu,

$\hat{R} = (x - x')\hat{i} + (y - y')\hat{j} + (z - z')\hat{k}$

$d\tau = dx' dy' dz'$



Şekil 5.29

İntegral (x', y', z') koordinatlarına göre alınmaktadır; diverjans ve rotasyonel (x, y, z) koordinatlarına göre hesaplanacaktır.

(5.40) denklemine diverjans teoremini uygularsak

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right) d\tau \quad (5.41)$$

Vektör operatör çarpımlarındaki 6. kuralı hatırlayalım:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right) = \frac{\hat{R}}{R^2} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}) - \vec{J} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right) \quad (5.42)$$

\vec{J} vektörü (x, y, z) değişkenlerine bağlı olmadığından $\vec{\nabla} \times \vec{J} = 0$ olur; ayrıca $\vec{\nabla} \times (\hat{R}/R^2) = 0$ dır (bkz. Problem 1.57). Buradan diverjans bulunur:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.43)$$

Bu kez (5.40) denkleminin rotasyonelini alalım:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right) d\tau \quad (5.44)$$

İntegrandı açmak için 8. çarpım kuralı kullanılır:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right) = \vec{J} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{R}}{R^2} \right) - (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{R}}{R^2} \quad (5.45)$$

(Bu denklemde \vec{J} 'nin türevi olan terimleri yazmadım, çünkü \vec{J} vektörü (x, y, z) koordinatlarına bağlı değildir.) Sağdaki ikinci terimin integralinin sıfır olduğunu birazdan göstereceğim. Birinci terim, Bölüm 1'de özellikle vurguladığımız bir diverjans idi; sonucu burada hatırlatalım:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{R}}{R^2} = 4\pi \delta^3(\vec{R}) \quad (5.46)$$

Bu bağıntı kullanılırsa

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d\tau = \mu_0 \vec{J}$$

olur. Bu sonuç, (5.39) formülünün sadece doğrusal akımlarla sınırlı olmadığını, magnetostatik'in temel bir denklemi olduğunu gösterir.

İspatı tamamlamak için (5.45) denklemindeki ikinci terimin integralinin sıfır olduğunu göstermemiz gerekiyor. Türev işlemi sadece sağdaki \hat{R}/R^2 terimine etkindir. Buradaki bağımlılık $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ şeklinde olduğundan, $\vec{\nabla}$ türevi yerine $\vec{\nabla}'$ türevine geçerek, bir eksi işaret gelir:

$$-(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{R}}{R^2} = (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}') \frac{\hat{R}}{R^2} \quad (5.47)$$

Bu ifadeyi indirgemek üzere, sadece x' bileşenine bakalım:

$$(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}') \left(\frac{x - x'}{R^3} \right) = \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{(x - x')}{R^3} \vec{J} \right] - \left(\frac{x - x'}{R^3} \right) (\vec{\nabla}' \cdot \vec{J})$$

(Burada 5. çarpım kuralını uyguladım.) Şimdi, *kararlı* akımlar için \vec{J} 'nin diverjansının sıfır olduğunu [(5.27) denklemi] hatırlayalım: $\vec{\nabla}' \cdot \vec{J} = 0$. Buna göre

$$\left[-(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{R}}{R^2} \right]_x = \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{(x - x')}{R^3} \vec{J} \right]$$

Bu bileşenin (5.44) integraline katkısına bakalım ve diverjans teoremini kullanalım:

$$\int_{\text{hacim}} \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{(x - x')}{R^3} \vec{J} \right] d\tau = \oint_{\text{yüzey}} \frac{(x - x')}{R^3} \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (5.48)$$

($\vec{\nabla}$ türevinden $\vec{\nabla}'$ türevine geçmemin nedeni, burada diverjans teoremini uygulayabilmek içindi. Yaptığımız iş bir çeşit kısmi integrasyondur: \hat{R}/R^2 üzerindeki türevi \vec{J} üzerine atmış olduk.) Bu integrali hangi yüzey üzerinde alıyoruz? (5.40) Biot-Savart yasasındaki *tüm* akım yoğunluklarını içine alan yüzey üzerinde. İsterseniz daha da büyük bir yüzey alabilirsiniz, nasılsa daha dışarda $\vec{J} = 0$ olacağından, integrale katkıda bulunmaz. Önemli nokta, tüm akımları çevreleyen yüzey üzerinde akımın sıfır olduğudur: $\vec{J} = 0$. Buna göre, (5.47) yüzey integrali sıfır olur.⁵

5.3.3 Ampere Yasası ve Uygulamaları

\vec{B} 'nin rotasyoneli için bulduğumuz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.49)$$

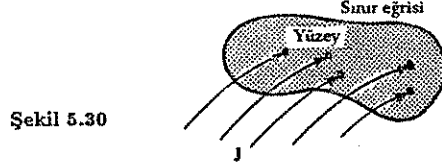
denklemini Ampere yasasının diferansiyel ifadesi olur. Bunun integral ifadesini elde etmek için Stokes teoremi uygulanır:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

Burada $\int \vec{J} \cdot d\vec{a}$ yüzeyden geçen toplam akım (Şek. 5.30) olup I_{g} ile göstermiştik. Buna göre

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{g}} \quad (5.50)$$

⁵ Sonsuz doğrusal telde olduğu gibi, \vec{J} sonsuza kadar uzanmıyorsa, yüzey integrali yine sıfır olur; ancak, ispat biraz daha dikkat ister.

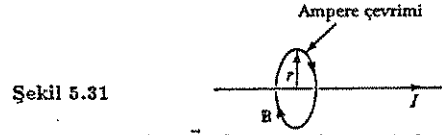


Şekil 5.30

Ampere yasasının integral ifadesi olur ve (5.36) denklemini tüm magnetostatığe genelleştirir. Bölüm 1'de Stokes teoreminde gördüğümüz gibi, Ampere yasasında da işaret sorunu olabilir: Eğri üzerinde *hangi yönde* gidilmelidir? Yüzeyi geçen akımların hangisi pozitif alınmalıdır? Çözüm, her zaman olduğu gibi, sağ el kuralıdır: Dört parmağınızı eğrisel integral yönünde kıvrırsanız, başparmağınız pozitif akımın yönünü gösterir.

Elektrostatikte Gauss yasasının oynadığı rolü, magnetostatikte Ampere yasası üstlenir. Özellikle, akım dağılımı simetrik ise, magnetik alanı bulmakta en kestirme yoldur.

Örnek 5.7: Sabit I akımı geçen sonsuz doğrusal telden r uzaklıkta magnetik alanı bulun. (Bu problemi Örnek 5.5'te Biot-Savart yasasıyla çözmüştük.)



Şekil 5.31

Çözüm: Şek. 5.31'de gösterilen \vec{B} alanının tel çevresinde "dolanımlı" yönde olduğunu biliyoruz. Tel çevresinde r yarıçaplı bir "Ampere çevrimi" alırsak, simetriye göre bu eğri üzerinde B alanı sabit büyüklükte olacaktır. Ampere yasasına göre

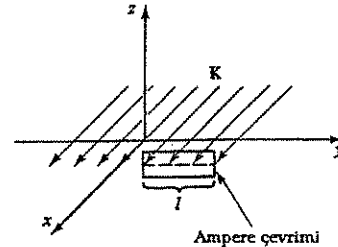
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{ç}} = \mu_0 I$$

veya,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Bu yanıt daha önce (5.32) denklemini kullanarak bulunmuştu; Ampere yasası daha kolay sonuç verir.

Örnek 5.8: xy -düzlemini tümüyle kaplayan düzgün bir yüzey akım yoğunluğu $\vec{K} = K\hat{z}$ olarak veriliyor (Şek. 5.32). Magnetik alanı bulun.



Şekil 5.32

Çözüm: Önce " \vec{B} magnetik alanı hangi yönde olur?" diye bir düşünelim. x -bileşeni olabilir mi? *Hayır.* Biot-Savart yasasının (5.35) ifadesine bakarsak, magnetik alanın \vec{K} vektörüne dik olması gerekir. Peki z -bileşeni olabilir mi? *Yine hayır.* Çünkü $+y$ tarafındaki her

ince şeritin magnetik alana düşey yöndeki katkısı, buna $-y$ tarafında karşılık gelen şeritin katkısıyla sıfırlanacaktır. Ama daha güzel bir gerekçe var: Magnetik alanın düzlemden *dışarı* yönde olduğunu varsayalım. Akım yönünü tersine çevirdiğimizde, magnetik alanı düzlemin içine doğru çevirmiş olurum (Biot-Savart yasasında akımın işareti değişirse magnetik alan da işaret değiştirir). Fakat, \vec{B} 'nin z -bileşeni xy -düzlemindeki bir akımın yönüne bağlı olamaz. (Bunu biraz düşünün bakalım!) O halde, \vec{B} ancak y -yönünde olabilir. Sağ el kuralını uygularsak, düzlemin üstünde *sağa*, düzlemin altında ise *sağa* doğru olduğu görülebilir.

Bunu açığa kavuşturduktan sonra, şekilde gösterildiği gibi, dikdörtgen şeklinde bir Ampere çevrimi alalım. Dikdörtgen yz -düzlemi içinde ve $z = 0$ düzleminin iki yanında eşit genişlikte olsun. Ampere yasasına göre

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2BI = \mu_0 I_{\text{ç}} = \mu_0(Kl)$$

olup $B = (\mu_0/2)K$ bulunur. Daha açık ifadeyle

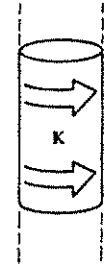
$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} K \hat{y} & (z < 0) \\ -\frac{\mu_0}{2} K \hat{y} & (z > 0) \end{cases} \quad (5.51)$$

olur. Tıpkı düzlem levhanın elektrik alanı gibi, düzgün yüzey akımının magnetik alanı uzaklıktan bağımsızdır.

Örnek 5.9: I akımı geçen ve R yarıçaplı siindir üzerine sıkıca sarılmış sonsuz solenoidin birim uzunluğunda N sarım vardır. Solenoidin içinde ve dışında magnetik alanı bulun (Şek. 5.33). (Not: Sarımın sıkı olmasındaki amaç her bir sarımı çember gibi düşünebilmek içindir. Buna eşdeğer olarak, Şek. 5.34'de gösterilen $K = NI$ kadar düzgün yüzey akımı alınabilir.)



Şekil 5.33

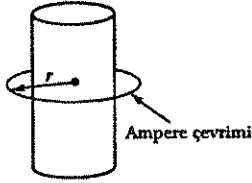


Şekil 5.34

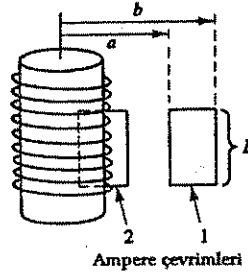
Çözüm: Yine, \vec{B} alanı hangi yönde olabilir? sorusuyla başlayalım. Radyal bileşeni olabilir mi? *Hayır.* Eğer pozitif bir B_r bileşeni olsaydı, akım yönünü tersine çevirdiğimizde B_r negatif olurdu. Fakat I akımını tersine çevirmek, solenoidi fiziksel olarak tersine çevirmeye eşdeğerdir ve bu, radyal magnetik alanı değiştiremez. Peki "dolanımlı" bir bileşeni olabilir mi? *Hayır.* Çünkü, bu takdirde B_ϕ bileşeni, Şek. 5.35'teki Ampere çevrimi üzerinde sabit olurdu; Ampere yasasına göre

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\phi(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{ç}} = 0$$

olurdu, çünkü bu çevrim içinde kalan net akım sıfırdır.



Şekil 5.35



Şekil 5.36

O halde, sonsuz solenoidin magnetik alanı *eksenine paralel* olur. Öte yandan, sağ el kuralına göre, solenoid içindeki magnetik alan yukarı yönde, dışında ise aşağı yönde olmalıdır. Buna göre, Şek. 5.36'daki gibi seçilen iki Ampere çevrimi üzerinde Ampere yasasını uygulayalım. 1.çevrim tümüyle solenoid dışında olup, kenarları ekseniden a ve b uzaklıktadır:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = [B(a) - B(b)] L = \mu_0 I_{iç} = 0 \quad \Rightarrow \quad B(a) = B(b)$$

Solenoid dışındaki alan ekseniden uzaklığa bağımlı değildir. Fakat, $r \rightarrow \infty$ olduğunda magnetik alanın sıfır olması gerekir. O halde, *dışarda magnetik alan her yerde sıfırdır*. 2.çevrime gelince, bu çevrimin yarısı içerde, yarısı dışardadır. Ampere yasasına göre

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B L = \mu_0 I_{iç} = \mu_0 N I L$$

(Dışarda $B = 0$ olduğundan çevrimin sağ kenarı katkıda bulunmaz.) Sonuç olarak

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 N I \hat{z} & (\text{solenoid içinde}) \\ 0 & (\text{solenoid dışında}) \end{cases} \quad (5.52)$$

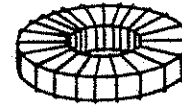
Solenoid içinde magnetik alanın *düzgün* oluşu, elektrostatikte düzlem kapasitörle benzerlik gösterir.

Gauss yasası gibi, Ampere yasası da kararlı akımlar için her zaman doğrudur; fakat her zaman kullanışlı olmayabilir. Eğer problemin simetrisi $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ integralinden \vec{B} 'yi dışarı almanıza olanak veriyorsa, o zaman magnetik alanı Ampere yasasıyla hesaplayabilirsiniz. Diğer durumlarda Biot-Savart yasasını kullanmanız gerekiyor. Ampere yasasının kullanılabileceği standart akım dağılımları şöyle özetlenebilir:

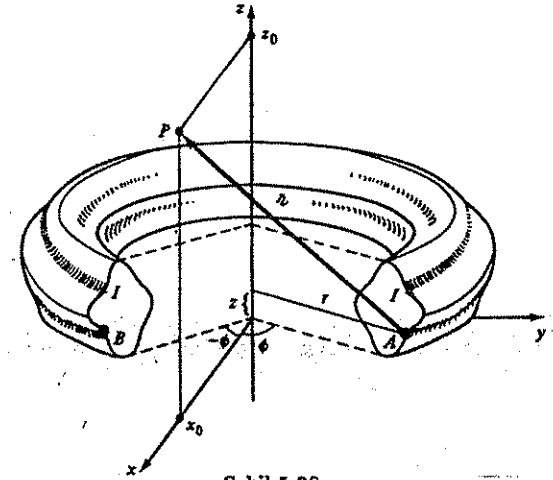
1. Sonsuz doğrusal akımlar (Örnek 5.7);
2. Sonsuz düzlem akımları (Örnek 5.8);
3. Sonsuz solenoid (Örnek 5.9);
4. Toroit.

Toroit, Ampere yasasının uygulanabildiği ilginç bir durumdur. Şimdi buna bakalım.

Örnek 5.10 : Toroit. Bir toroit bobini "simit" şeklinde bir halka üzerine sıkıca sarılmış toplam n sayıda telden oluşur (Şek. 5.37). Kesitin şekli önemli değildir, Şek. 5.38'deki gibi asimetrik olabilir. Toroit içinde ve dışında magnetik alanın "dolanımlı" yönde olduğunu gösterin.



Şekil 5.37



Şekil 5.38

İspat : A noktasındaki küçük akım elemanının P noktasındaki magnetik alana katkısı Biot-Savart yasasına göre

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{I} \times \vec{R}}{R^3} dl$$

olur. P noktasının kartezyen koordinatları, Şek. 5.38'de görüldüğü gibi, $(x_0, 0, z_0)$ ve A noktasının koordinatları $(r \cos \phi, r \sin \phi, z)$ alınırsa

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x_0 - r \cos \phi, -r \sin \phi, z_0 - z)$$

olur. Akımın ϕ -bileşeni olmadığından,

$$\vec{I} = I_r \hat{r} + I_z \hat{z} = (I_r \cos \phi, I_r \sin \phi, I_z)$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned} \vec{I} \times \vec{R} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ I_r \cos \phi & I_r \sin \phi & I_z \\ (x_0 - r \cos \phi) & (-r \sin \phi) & (z_0 - z) \end{vmatrix} \\ &= [I_r(z_0 - z) \sin \phi + I_z r] \hat{i} + [I_z(x_0 - r \cos \phi) - I_r(z_0 - z) \cos \phi] \hat{j} + [-I_r x_0 \sin \phi] \hat{k} \end{aligned}$$

olur. Sarım düzgün ve sıkı olduğundan, A daki akım elemanına simetrik olan, aynı r , aynı R , aynı dl , aynı I_r, I_z 'ye sahip, fakat *negatif* ϕ açılı bir B elemanı daima vardır. $\sin \phi$ işaret değiştirdiği için, A ve B noktalarının bu vektörel çarpımdaki \hat{i} ve \hat{k} bileşenleri birbirini sıfırlar, geriye sadece \hat{j} bileşeni kalır. O halde, P noktasındaki magnetik alan \hat{j} yönünde olacaktır. Buradan, herhangi bir noktadaki alanın "dolanımlı" yönde olduğu anlaşılır.

Alan yönü bilindikten sonra, büyüklüğü Ampere yasasıyla kolayca bulunur. Merkezi toroid ekseninde olan r yarıçaplı bir Ampere çevrimi seçilirse

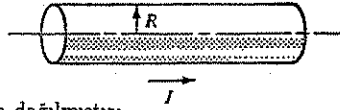
$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{iç} = \begin{cases} \mu_0 n I & (\text{içerde}) \\ 0 & (\text{dışarda}) \end{cases}$$

olur. Burada n toplam sarım sayısıdır. Sonuç şöyle olur:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 n I}{2\pi r} \hat{\phi} & (\text{toroit içinde}) \\ 0 & (\text{toroit dışında}) \end{cases} \quad (5.53)$$

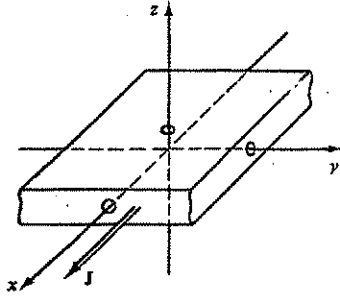
Problem 5.15 R yarıçaplı sonsuz silindirden I akımı geçiyor (Şek. 5.39). Şu akım dağılımlarına göre, silindirin içinde ve dışında magnetik alanı bulun:

Şekil 5.39

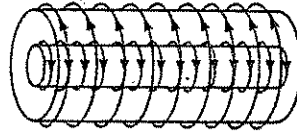


- (a) Akım telin dış yüzünde düzgün dağılmıştır;
(b) Akım telin hacminde, eksenden r uzaklığına orantılı olarak dağılmıştır.

Problem 5.16 Kalınlığı $2a$ olan bir düzlem tabakanın $z = -a$ ile $z = +a$ arasındaki bölgesinde düzgün bir $\vec{J} = J\hat{i}$ akım yoğunluğu bulunmaktadır (Şek. 5.40). Düzlem içinde ve dışında magnetik alanı bulun.



Şekil 5.40

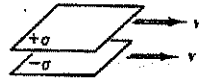


Şekil 5.41

Problem 5.17 Koaksiyal iki sonsuz solenoid eşit ve zıt yönde I akımları taşımaktadır (Şek. 5.41). Yarıçapı a olan iç solenoidte N_1 sarım, b yarıçaplı dış solenoidte N_2 sarım bulunmaktadır. Her üç bölgede magnetik alanı bulun.

Problem 5.18 Üstteki levhasında düzgün σ , alttaki levhasında düzgün $-\sigma$ yüzey yükü bulunan bir düzlem kapasitör, Şek. 5.42'de gösterilen yönde sabit v hızıyla gitmektedir.

Şekil 5.42



- (a) Her üç bölgede magnetik alanı bulun.
(b) Üstteki levhada birim yüzeye etkiyen magnetik kuvveti ve yönünü bulun.
(c) Hangi v hızında elektrik ve magnetik kuvvetler birbirini dengeler?

! Problem 5.19 Bir solenoidin, kesiti ne olursa olsun (eksen boyunca kesitin aynı olması koşuluyla), magnetik alanının eksene paralel olacağını gösterin. Böyle bir bobinin içinde ve dışında magnetik alan ne olur? Örnek 5.10'daki toroidin r yarıçapı sonsuza gittiğinde, magnetik alanının solenoid alanına indirgeneceğini gösterin.

5.3. MAGNETİK ALANIN DİVERJANS VE ROTASYONELİ

Problem 5.20 Ampere yasasında, içerdeki akımı hesaplamak

$$I_{\text{ç}} = \int_{\text{yüzey}} \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

yüzey integralini almak gerekiyor. Fakat, kapalı eğriyle sınırlı olan sonsuz sayıda yüzey vardır. Sizce hangi yüzey kullanılmalıdır?

5.3.4 Magnetostatik ve Elektrostatik Karşılaştırması

Elektrostatik alanın diverjans ve rotasyoneli şöyleydi:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & (\text{Gauss yasası}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 & (\text{Adı yok}) \end{aligned}$$

Bu iki bağıntı elektrostatik Maxwell denklemleridir. ρ yük yoğunluğu verilmişse, yüklerden çok uzakta $\vec{E} \rightarrow 0$ koşulunu da kullanarak, iki denklemden elektrik alan bulunabilir. Bu iki denklem, Coulomb yasası ve toplanabilirlik ilkesine eşdeğer olurlar.

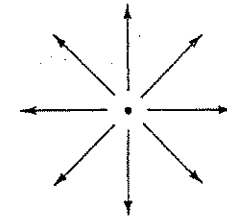
Magnetostatik alanın diverjans ve rotasyoneli şöyleydi:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (\text{Adı yok}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} & (\text{Ampere yasası}) \end{aligned}$$

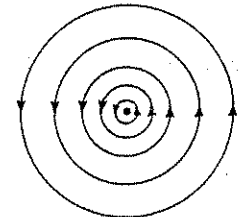
Bunlar da magnetostatik Maxwell denklemleri olurlar. Yine, akımlardan çok uzakta $\vec{B} \rightarrow 0$ koşuluyla birlikte, iki denklem magnetik alanı bulmaya yeterlidir. Biot-Savart yasası da bu bilgiye eşdeğerdir. Maxwell denklemleri

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

olan Lorentz kuvvetiyle birlikte elektrostatik ve magnetostatik temel yasalarını en güzel şekilde ifade ederler.



(a) Noktasal yükün elektrik alanı



(b) Sonsuz telin magnetik alanı

Şekil 5.43

Elektrik alan çizgileri pozitif yükten *ıraksar*; magnetik alan çizgileri akım çevresinde *dolanır* (Şek. 5.43). Elektrik alan çizgileri pozitif yükten başlar, negatif yükte biter; magnetik alan çizgileri hiçbir yerden başlamaz veya bitmez; ya kapalı bir eğri oluşturur, ya da sonsuza giderler. Başka bir deyişle, \vec{E} alanının tersine, \vec{B} alanı için *noktasal bir kaynak yoktur*—elektrik yükün magnetik karşılığı yoktur. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ifadesinin fiziksel anlamı budur. Coulomb ve diğer öncüler magnetik *monopol* denilen “magnetik yük”ün varlığına inanıyorlardı; hatta bazı eski kitaplarda magnetik kuvvet için Coulomb yasası

benzeri ifadeler bulabilirsiniz. Tüm magnetik etkilerin elektrik yüklerin hareketinden kaynaklandığı fikrini ilk ortaya atan Ampere oldu. Günümüzdeki anlayışa göre Ampere hala haklı görünüyor. Ancak, doğada magnetik monopollerin var olup olmadığı deneysel bir araştırma konusudur. Eğer magnetik monopol var ise, henüz bulunamadığına göre sayıca az olmalıdır; aslında yeni parçacık fiziği teorilerine göre *var olması gerekir*. Klasik elektromagnetik teorige $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, yani magnetik monopol yoktur.

O halde, hareket eden bir yük magnetik alan oluşturabilir ve bundan etkilenen diğer yük de hareketli olmalıdır. Kaynak yük hareketsiz ise ($\vec{B} = 0$) veya test yükü hareketsiz ise ($\vec{v} = 0$), Lorentz kuvveti $\vec{F} = Q\vec{E}$ şeklinde basitleşir.

Tipik olarak elektriksel kuvvetler magnetik kuvvetlerden daha büyük mertebede olurlar. Bunu teoriye bakarak göremezsiniz, evrensel ϵ_0 ve μ_0 sabitlerinin büyüklükleri bundan sorumludur. Ancak yüklerin hızı ışık hızına yaklaştığında magnetik kuvvetler elektrik kuvvetlerle aynı mertebede olurlar (bkz. Problem 5.12 ve 5.19). Buna rağmen, nasıl oluyor da magnetik etkileri gözleyebiliyoruz? Çünkü hem Biot-Savart yasasında ve hem de Lorentz kuvvetinde esas olan *akımdır*. Hızlar küçük olsa da, telden geçen yük miktarı o kadar büyüktür ki hızın küçük oluşunu karşılar. Yükün fazla oluşu büyük bir elektrik alan oluşturabilirdi, ama telde eşit ve zıt miktarda pozitif yük bulundurarak telin *nötr* olmasını sağlarsak, elektrik alan oluşmaz ve magnetik alan tek başına gözlenir. Bu fazla karmaşık gibi gelebilir, ama günlük yaşamda akım geçen tellerde olan biten budur.

Problem 5.21 (a) Bir bakır malzeme içinde her atomun serbest iki elektron elektron verdiğini varsayarak, ρ serbest yük yoğunluğunu bulun.

(b) Kesitinin çapı 1 mm olan ve 1 A akım taşıyan bakır teldeki ortalama elektron hızını hesaplayın. (Not: Bu hızın çok küçük oluşu şaşırtıcıdır. Bu durumda, şehirlerarası telefon konuşması nasıl gerçekleşebiliyor?)

(c) Aralarında 1 cm uzaklık bulunan böyle iki tel arasındaki çekim kuvveti ne kadardır?

(d) Tellerdeki durgun pozitif iyonları kaldırmış olsaydık, elektrik itme kuvveti magnetik kuvvetin kaç katı olurdu?

Problem 5.22 Rotasyonelin diverjansının özdes olarak sıfır oluşu kuralına Ampere yasası uyar mı? Ampere yasasının magnetostatik dışında geçerli *olamayacağı* gösterin. Diğer üç Maxwell denkleminde bu tür bir kusur var mıdır?

Problem 5.23 Diyelim ki magnetik monopoller var olsun. Bu durumda, elektromagnetostatik için verdiğimiz Maxwell denklemleri ve Lorentz kuvveti ifadesi nasıl değişmelidir? Birden çok farklı seçenek varsa, bunları sıralayın ve hangisinin doğru olabileceğini ayırt eden bir deney önerin.

5.4 MAGNETİK VEKTÖR POTANSİYEL

5.4.1 Vektör Potansiyel

Elektrostatikte $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ oluşu, $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ şeklinde skaler bir V potansiyelini tanımlama olanağı vermişti. Benzer şekilde, magnetostatikte $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ oluşu,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5.54)$$

şeklinde bir \vec{A} vektör potansiyeli tanımlama olanağı verir, çünkü rotasyonelin diverjansı özdes olarak sıfır olduğundan, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ eşitliğini otomatik olarak sağlar. Ampere yasasına

5.4. MAGNETİK VEKTÖR POTANSİYEL

gelince

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.55)$$

denklemini sağlayan bir \vec{A} bulunabilir mi? (Burada 1.38 özdeşliği kullanıldı.) Elektrostatik potansiyelde bir keyfîlik olduğundan sözetmiştik: Gradyanı sıfır olan herhangi bir fonksiyonu (yani bir sabiti) V potansiyeline eklersek, fiziksel \vec{E} büyüklüğü değişmiyordu. Benzer şekilde, rotasyoneli sıfır olan herhangi bir fonksiyonu (yani, skaler bir fonksiyonun gradyanını) \vec{A} potansiyeline eklersek, fiziksel \vec{B} büyüklüğü değişmez. Bu serbestliği diverjans terimini elemek için kullanabiliriz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.56)$$

Gerçekten de, elimizdeki bir \vec{A}' potansiyeline, bir λ fonksiyonunun gradyanını ekleyerek yeni bir $\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}\lambda$ vektörü kuralım. Bunun diverjansı

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \nabla^2 \lambda$$

olur. Şimdi, (5.56) koşulunu sağlaması için λ fonksiyonu şöyle seçilmelidir:

$$\nabla^2 \lambda = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}')$$

Oysa bu, (2.21) Poisson denklemi yapısındadır:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Burada ρ/ϵ_0 yerine $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'$ gelmiştir. Yerel bir ρ yük dağılımı için Poisson denkleminin çözümünü biliyoruz. ρ sonsuzda sıfıra gidiyorsa,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} d\tau$$

olur. Benzer şekilde, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'$ sonsuzda sıfıra gidiyorsa

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'}{R} d\tau$$

olur, yani ilke olarak vektör potansiyelin diverjansını sıfır kılacak şekilde bir λ fonksiyonu bulunur. Daha açık bir deyişle, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ tanımı \vec{A} 'nın rotasyonelini belirtir, ama diverjansı için birşey söylemez—biz de bu serbestliği diverjansı sıfır yapacak şekilde kullanırız.

Bu seçim sonucu (5.54) denklemindeki Ampere yasası şöyle olur:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (5.57)$$

Bu da, Poisson denkleminin başka bir şey değildir; daha doğrusu her bileşeni düşünürsek, üç tane Poisson denklemi olur. \vec{J} akım yoğunluğu sonsuzda sıfıra gidiyorsa, bunun çözümü doğrudan yazılabilir:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{R} d\tau \quad (5.58)$$

Boyca ve yüzeyel akım yoğunlukları için bu formülü şöyle değiştirmek gerekir:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I}}{R} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl}{R} \quad \text{ve} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}}{R} da \quad (5.59)$$

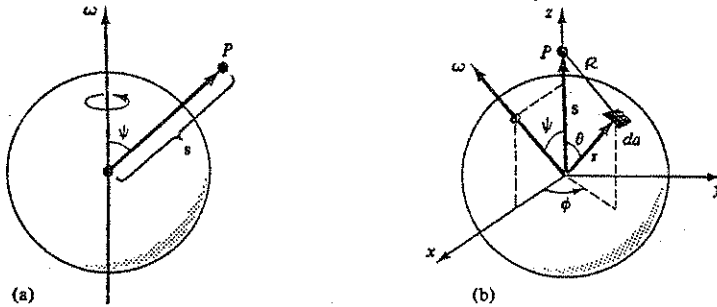
Eğer akımlar sonsuzda sıfıra gitmiyorsa, bu formüller geçersizdir ve \vec{A} potansiyelini bulmak için başka yollar düşünülür (Örnek 5.12 ve kısım sonundaki problemlere bakın).

Doğrusu \vec{A} potansiyeli V kadar kullanışlı değildir, çünkü hala bir vektör ile çalışmayı gerektirir. Ancak, (5.57) denklemi yine de Biot-Savart yasasına göre daha basittir. Mümkün olsaydı

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}U \quad (5.60)$$

şeklinde skaler bir potansiyel bulabilseydik, daha iyi olurdu. Fakat bu, Ampere yasasıyla çelişir, çünkü gradyanın rotasyoneli daima sıfır olur. (Bununla birlikte, akımların bulunduğu bölgelerde çalışacaksanız, skaler bir magnetik potansiyel tanımlanabilir, fakat teorik bir araç olarak kullanışsızdır. bkz. Problem 5.30) Öte yandan, magnetik kuvvetler iş yapmadığından \vec{A} için, V potansiyelinin birim yükün yaptığı iş şeklindeki tanımına benzer basit bir fiziksel yorum getiremiyoruz. Yine de, vektör potansiyelin ne kadar önemli bir kavram olduğunu Bölüm 9'da göreceğiz.

Örnek 5.11: Yüzeyinde düzgün σ yük yoğunluğu bulunan R yarıçaplı küresel kabuk ω açısı hızıyla dönmektedir (Şek. 5.44a). P noktasında vektör potansiyeli bulun.



Şekil 5.44

Çözüm: Dönme eksenini z -eksenini olarak almanın kullanışlı olduğu sanılabilir, fakat bu problemde P noktası z -ekseni üzerinde seçilirse integral almak daha kolay olur. Bu durumda dönme eksenini ψ açısı kadar eğimli olur; Bu açıyı xz -düzleminde olacak şekilde almakla birşey kaybetmiş olmayız (Şek. 5.44b). Bu durumda, (5.58) denklemi

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}}{R} da$$

Burada $\vec{K} = \sigma \vec{v}$ olup, $R = \sqrt{R^2 + s^2 - 2Rs \cos \theta}$ ve $da = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ olur. Dönen bir rijit cisim üzerindeki bir noktanın çizgisel hızı $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ olur. Burada dönen küre yüzeyindeki bir nokta için hesap yapalım:

$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega \sin \psi & 0 & \omega \cos \psi \\ R \sin \theta \cos \phi & R \sin \theta \sin \phi & R \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= R\omega [-(\cos \psi \sin \theta \sin \phi)\hat{i} + (\cos \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \psi \cos \theta)\hat{j} + (\sin \psi \sin \theta \sin \phi)\hat{k}] \end{aligned}$$

Buradaki terimlerden biri dışında, diğerlerinde ya $\sin \phi$ veya $\cos \phi$ çarpanı bulunmaktadır. ϕ açısı üzerinden integral alınırken

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$$

olacağından, tüm bu terimler sıfır verecektir. Geriye kalan tek terimin integrali alınır

$$\vec{A}(P) = -\left(\frac{\mu_0 R^3 \sigma \omega \sin \psi}{2}\right) \left(\int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + s^2 - 2Rs \cos \theta}}\right) \hat{j}$$

olur. $u = \cos \theta$ dönüşümü yapılır:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{u du}{\sqrt{R^2 + s^2 - 2Rs u}} &= \frac{(R^2 + s^2 + Rsu)\sqrt{R^2 + s^2 - 2Rs u}}{3R^2 s^2} \Big|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{(R^2 + s^2 + Rs)|R-s| - (R^2 + s^2 - Rs)(R+s)}{3R^2 s^2} \end{aligned}$$

Eğer P noktası küre içindeyse ($s < R$), $|R-s| = R-s$ ve bu ifade $(2s/3R^2)$ olur. P noktası küre dışındaysa ($s > R$), sonuç $(2R/3s^2)$ bulunur. Ayrıca, $-\omega s \sin \psi \hat{j} = (\vec{\omega} \times \vec{s})$ olduğunu gözönüne alırsak, sonuç şöyle özetlenebilir:

$$\vec{A}(P) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} (\vec{\omega} \times \vec{s}) & (\text{küre içinde}) \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3s^3} (\vec{\omega} \times \vec{s}) & (\text{küre dışında}) \end{cases} \quad (5.61)$$

İntegrali aldıktan sonra, şimdi tekrar eksenleri değiştirip Şek. 5.44a'daki ilk koordinatlara dönebiliriz. $\vec{\omega}$ vektörü z -ekseni doğrultusunda ve P noktasının koordinatları $r = s$, $\theta = \psi$ ve ϕ alınırsa

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} r \sin \theta \hat{\phi} & (r < R) \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3s^3} \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\phi} & (r > R) \end{cases} \quad (5.62)$$

bulunur. Sonuçta ilginç bir nokta şudur: Küresel kabuk içinde magnetik alan *düzgün* olur:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{2\mu_0 R \omega \sigma}{3} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \hat{z} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \vec{\omega} \quad (5.63)$$

Örnek 5.12: Birim uzunlukta N sarımdan oluşan, R yarıçaplı ve I akımı taşıyan sonsuz solenoidin vektör potansiyelini bulun.

Çözüm: Bu kez (5.58) formülünü kullanamayız, çünkü akım sonsuza kadar uzanmaktadır. Fakat, sonucu değişik bir yoldan bulabiliriz: Kapalı bir C eğrisi üzerinde vektör potansiyelin eğrisel integraline bakalım. Stokes teoremini kullanırsak

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \Phi \quad (5.64)$$

olur; burada Φ kapalı eğriyle sınırlı S yüzeyinden geçen \vec{B} akısıdır. Bu ifade, Ampere yasasının integral ifadesine benziyor:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{ç}}$$

O halde, $\vec{B} \rightarrow \vec{A}$ ve $\mu_0 I_{\text{ç}} \rightarrow \Phi$ değişikliklerini yaparsak, \vec{A} için bir tür "Ampere yasası" yazabiliriz.

Elimizdeki problem (solenoit dışında sıfır, içinde düzgün $\mu_0 NI$ magnetik alanı) yerine, (kesitinde düzgün dağılmış akım geçen tel) probleminin çözümünü uyarlayalım. Tel probleminin magnetik alanı dolanım yönünde olduğundan, elimizdeki problemin vektör potansiyeli de dolanım yönünde olur. O halde, solenoid içinde r yarıçaplı çember şeklinde bir "Ampere çevrimi" alırsak

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = A(2\pi r) = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 NI(\pi r^2)$$

veya,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 NI}{2} r \hat{\phi} \quad (r < R) \quad (5.65)$$

bulunur. Solenoid dışında seçilen çevrim içindeki akı

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 NI(\pi R^2)$$

olur, çünkü magnetik alan R yarıçapına kadar vardır. Buna göre

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{r} \hat{\phi} \quad (r > R) \quad (5.66)$$

bulunur. Bu sonuçtan kuşku duyuyorsanız, *sağlamasını yapın*: $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ oluyor mu? $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ oluyor mu? Yanıtınız olumluysa, mesele yok demektir.

Problem 5.24 I akımı taşıyan sonlu uzunlukta doğrusal bir tel parçasının vektör potansiyelini bulun. Yanıtınızın (5.31) denklemini sağladığını gösterin.

Problem 5.25 Silindirik koordinatlarda $\vec{A} = k\hat{\phi}$ (k sabit) şeklinde, dolanımlı ve sabit vektör potansiyel veren akım yoğunluğu nasıl olmalıdır?

Problem 5.26 Eğer \vec{B} düzgün ise, $\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B})$ olduğunu gösterin. Burada \vec{r} , hesaplanan noktanın konum vektörüdür. Bu potansiyel için $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ve $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ olduğunu gösterin.

Problem 5.27 (a) Düşünebildiğiniz herhangi bir yöntemi kullanarak, I akımı taşıyan sonsuz doğrusal telden r uzaklıkta vektör potansiyeli bulun. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ve $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ olduğunu gösterin.

(b) Telin yarıçapı R ise ve kesiti içinde akım düzgün dağılmışsa, tel içinde vektör potansiyeli bulun.

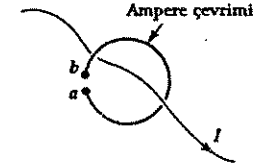
Problem 5.28 Örnek 5.8'deki düzlem yüzey akımının üst ve alt tarafında vektör potansiyeli bulun.

Problem 5.29 (a) (5.57) denkleminin *diverjansını* alarak (5.55) denkleminle tutarlı olduğunu gösterin.

(b) (5.57) denkleminin *rotasyonelini* alarak (5.40) denkleminle tutarlı olduğunu gösterin.

(c) (5.57) denkleminin *Laplasyenini* alarak (5.56) denkleminle tutarlı olduğunu gösterin.

Problem 5.30 Akım geçen bir telin yakınında $\vec{B} = -\vec{\nabla}U$ şeklinde skaler bir magnetik potansiyel tanımlamak istiyoruz. Bir kere telden uzak durmak gerekir, yoksa $\vec{\nabla} \times \vec{B} \neq 0$ olur. Fakat bu da yeterli değildir. Şek. 5.45'te gösterilen eğri üzerinde a 'dan b 'ye teli dolanarak gidildiğinde, skaler potansiyelin tek değerli olmadığı görülür, yani $a = b$ olduğunda



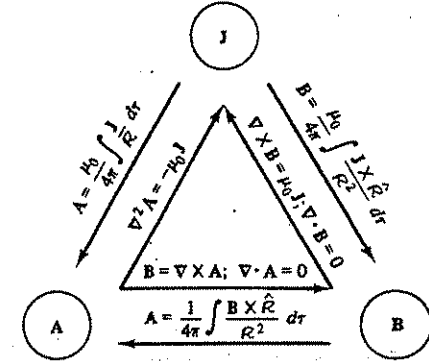
Şekil 5.45

$U(a) \neq U(b)$ olmaz. Bunları bildikten sonra, sonsuz doğrusal tel için skaler bir potansiyel bulun. (Telin sadece bir tarafında kalıp çevresinde dolanmamak gerekir.)

Problem 5.31 Örnek 5.11 sonucunu kullanarak, hacmi içinde toplam Q yükü dağılmış R yarıçaplı ve ω açısal hızıyla dönen küre içinde magnetik alanı bulun.

5.4.2 Özet; Magnetostatik Sınır Koşulları

Bölüm 2 de elektrostatiğin temel üç büyüklüğü (ρ , \vec{E} ve V) arasındaki ilişkileri gösteren bir üçgen diyagram çizmiştik. Magnetostatikte \vec{J} akım yoğunluğu, \vec{B} alanı ve \vec{A} potansiyeli arasındaki ilişkileri de benzer bir diyagramla özetlemek mümkündür. (Şek. 5.46). Bu diagramdaki bir bağıntıyı, yani \vec{A} vektörünün \vec{B} cinsinden veren formülü konumuzu işlerken çıkartmamıştık. Böyle bir formüle hiç gerek duyacağınızı sanmıyorum, ama konuyu tamamlamak için bunu da çıkaralım.



Şekil 5.46

\vec{A} ile \vec{B} nin sağladıkları denklemleri alt alta yazarsak bir paralellik görülür:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

Yani, \vec{B} nasıl \vec{J} 'ye bağlı ise, \vec{A} da \vec{B} 'ye aynı şekilde bağlı olacaktır. \vec{J} cinsinden \vec{B} 'yi veren ifade Biot-Savart yasasıydı:

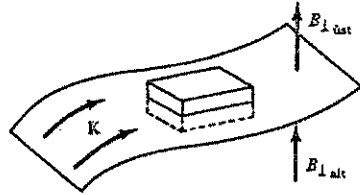
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \hat{R}}{R^2} d\tau$$

O halde, gerekli değişikliği yaparsak

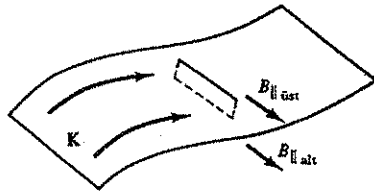
$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B} \times \hat{R}}{R^2} d\tau \quad (5.67)$$

bulunur.

Elektrostatikte, yüzey yükünü geçerken elektrik alanın *dik* bileşeninin sonlu bir sıçrama yaptığını görmüştük. Benzer şekilde, bir yüzey akımı olduğunda magnetik alanın *teğetsel* bileşeni sürekli olur.



Şekil 5.47



Şekil 5.48

Şek. 5.47'deki yüzeyi iki taraftan saran ince bir tablet şeklindeki yüzeye $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ formülünün integral şeklini uygularsak

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

olur. Yan yüzeylerde katkı olmayacağından, alt ve üst yüzeyler için

$$B_{\perp \text{ üst}} = B_{\perp \text{ alt}} \quad (5.68)$$

bulunur. Teğetsel bileşen için Şek. 5.48'deki gibi, yüzey akımına dik yönde dikdörtgen bir Amper çevrimi seçilirse

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B_{\parallel \text{ üst}} - B_{\parallel \text{ alt}})l = \mu_0 I_{\text{g}} = \mu_0 K l \quad (5.69)$$

$$B_{\parallel \text{ üst}} - B_{\parallel \text{ alt}} = \mu_0 K$$

Buna göre, magnetik alanın yüzeye teğetsel fakat akıma dik bileşeni $\mu_0 K$ kadar sonlu bir sıçrama yapar. Yüzek akımına *paralel* bir çevrimde hesap yapılırsa, yüzeydeki paralel bileşenin *sürekli* olduğu görülür.

Bu sonuçlar tek bir formülde şöyle toplanabilir:

$$\vec{B}_{\text{üst}} - \vec{B}_{\text{alt}} = \mu_0 (\vec{K} \times \hat{n}) \quad (5.70)$$

Burada \hat{n} yüzeyin "üst" tarafına doğru olan normal vektörüdür.

Elektrostatik potansiyelde olduğu gibi, magnetik vektör potansiyel her sınırdaki sürekli:

$$\vec{A}_{\text{üst}} = \vec{A}_{\text{alt}} \quad (5.71)$$

Çünkü, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ oluşu dik bileşenin sürekli olacağını garanti eder. $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ eşitliğini de şöyle yazalım

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \Phi$$

Buna göre, genişliği sonsuz küçük bir Ampere çevriminden geçen akı magnetik sıfır olacağından, \vec{A} 'nın teğetsel bileşeni de sıfır olur. Fakat, \vec{B} deki süreksizlik \vec{A} 'nın türevine miras kalır:

$$\frac{\partial \vec{A}_{\text{üst}}}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_{\text{alt}}}{\partial n} = -\mu_0 \vec{K} \quad (5.72)$$

Problem 5.32 (a) Örnek 5.9'daki sistemin (5.69) sınır koşulunu sağladığını gösterin.

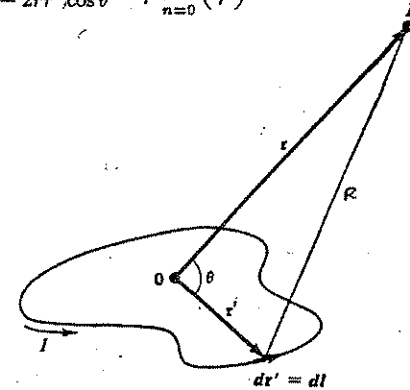
(b) Örnek 5.11'deki sistemin (5.70) ve (5.71) koşullarını sağladığını gösterin.

Problem 5.33 (5.69) ve (5.70) koşullarından yola çıkarak (5.71) koşulunu çıkarın. (Yol gösterme: Ben olsam, z-eksenini yüzeye dik, y-eksenini de akıma paralel seçerdim.)

5.4.3 Magnetik Dipol Momenti

Yerel bir akım dağılımının magnetik alanını (veya, vektör potansiyelini) uzak mesafelerde yaklaşık olarak bilmek istiyorsanız, multipol açılımı bire birdir. Hatırlayın: multipol açılımının ana fikri potansiyeli $1/r$ 'nin kuvvet serisi olarak yazabilmektir. Burada r orijinden o noktaya çizilen konum vektörüdür (Şek. 5.49). r yeterince büyük ise, seri açılımındaki ilk terim diğerlerinden daha baskın olur. Kısım 3.41'deki (3.89) denklemini tekrar alalım:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad (5.73)$$



Şekil 5.49

Buna göre, bir teldeki akımın vektör potansiyelini veren (5.58) denklemini şöyle yazılabilir:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos\theta) d\vec{l} \quad (5.74)$$

İlk birkaç terimi açık yazalım:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\vec{l} + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos\theta d\vec{l} + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right) d\vec{l} + \dots \right] \quad (5.75)$$

Daha önce olduğu gibi, birinci ($1/r$ li) terime **monopol**, ikinci ($1/r^2$ li) terime **dipol**, üçüncüye **kuadrupol**, ... vb. adı verilir.

Magnetik monopol terimi, beklendiği gibi, daima sıfır olur, çünkü birinci integral kapalı bir eğri üzerindeki vektörel yerdeğiştirmelerin toplamıdır:

$$\oint d\vec{l} = 0 \quad (5.76)$$

Bu, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ denkleminin gerektirdiği gibi, doğada magnetik monopol olmayışının bir yansımasıdır.

Monopol yokluğunda en baskın terim magnetik dipoldür:

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint \vec{r}' \cos \theta d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\vec{r}' \cdot \hat{r}) d\vec{l} \quad (5.77)$$

Bu integrali daha bilinen bir şekle sokmak için sevimsiz bir takım işlemler gerekir. Önce şuna dikkat edelim (\hat{r} sabit):

$$d[(\vec{r}' \cdot \hat{r}) \vec{r}'] = (d\vec{r}' \cdot \hat{r}) \vec{r}' + (\vec{r}' \cdot \hat{r}) d\vec{r}'$$

Buna göre

$$\oint [(d\vec{r}' \cdot \hat{r}) \vec{r}' + (\vec{r}' \cdot \hat{r}) d\vec{r}'] = \oint d[(\vec{r}' \cdot \hat{r}) \vec{r}'] = 0$$

olur (kapalı bir eğri üzerinde tam diferansiyeldeki değişme sıfırdır). Buradan

$$\oint (d\vec{r}' \cdot \hat{r}) \vec{r}' = - \oint (\vec{r}' \cdot \hat{r}) d\vec{r}'$$

olur. Üçlü vektörel çarpımın indirgeme formülünü şu ifadeye uygulayalım:

$$\hat{r} \times \oint (\vec{r}' \times d\vec{r}') = \oint [(d\vec{r}' \cdot \hat{r}) \vec{r}' - (\vec{r}' \cdot \hat{r}) d\vec{r}'] = -2 \oint (\vec{r}' \cdot \hat{r}) d\vec{r}'$$

Şimdi toparlayalım: \vec{r}' koordinatındaki değişme kapalı eğri üzerinde olduğundan, burada $d\vec{r}' = d\vec{l}$ dir (Şek. 5.49). Buna göre

$$\oint (\vec{r}' \cdot \hat{r}) d\vec{l} = -\frac{1}{2} \hat{r} \times \oint (\vec{r}' \times d\vec{l}) \quad (5.78)$$

olur. O halde, (5.76) denklemindeki dipol potansiyeli şöyle yazılabilir:

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} \quad (5.79)$$

Burada \vec{m} , kapalı akım çevriminin magnetik dipol momentini olur:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint (\vec{r}' \times d\vec{l}) \quad (5.80)$$



Şekil 5.50

Eğer, akım çevrimi düzlemde ise, (5.80) denklemindeki integralin geometrik bir yorumu vardır: Şek. 5.50'deki eğri için $\frac{1}{2} |\vec{r}' \times d\vec{l}|$, taralı üçgenin alanıdır. O halde, integralin büyüklüğü tüm kapalı eğri içinde kalan yüzey alanı olur. Bunu vektörel olarak yazarsak

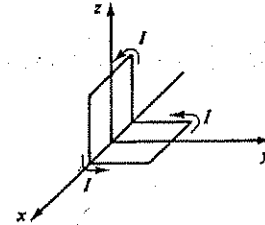
$$\frac{1}{2} \oint (\vec{r}' \times d\vec{l}) = \vec{a} \quad (5.81)$$

Burada yüzey alanı vektörü, sağ el kuralına göre seçilen düzlem normali yönündedir. O halde, düzlem akım çevrimleri için dipol momentini (akım x yüzey alanı) olur:

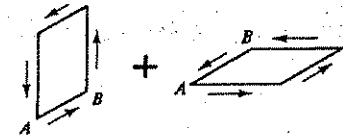
$$\vec{m} = I \vec{a} \quad (5.82)$$

Pratikte en sık karşılaşılan düzlem çevrimler olduğundan, bazıları (5.82) formülünü magnetik dipol momentinin tanımı zannederler. Diğer karmaşık akımlar da sonsuz küçük düzlem eğrilerin toplamı olarak düşünülürse, bu formül kullanışlı olur.

Örnek 5.13 : Şek. 5.51'de gösterilen çerçevenin magnetik dipol momentini hesaplayın. Çerçeveden I akımı geçmekte olup kenar uzunlukları s dir.



Şekil 5.51



Şekil 5.52

Çözüm : Bu çerçeve Şek. 5.52'deki iki çerçevenin toplamı gibi düşünülebilir. Fazladan gelen AB kenarındaki akımlar zıt yönde olduğundan, birbirini götürür. Buna göre, toplam dipol momentini

$$\vec{m} = Is^2 \hat{j} + Is^2 \hat{k}$$

olup, büyüklüğü $\sqrt{2}Is^2$ ve yönü $z = y$ köşegenidir.

(5.82) denkleminde göre, düzlem çerçevenin magnetik dipol momentinin orijin seçiminden bağımsız olduğu açıktır. Bu özellik (5.80) genel formülü için de ispatlanabilir. Hatırlarsanız, sadece toplam elektrik yükü sıfır olduğunda, elektrik dipol momentini orijinden bağımsız oluyordu. Burada monopol terimi daima sıfır olduğundan, magnetik dipol momentini her zaman orijinden bağımsız olur.

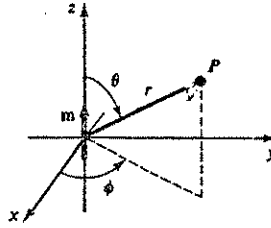
Multipol açılımında dipol terimi en baskın olmasına rağmen, yine de diğer yüksek mertebeden kuadrupol, oktupl, ... terimleri de olabilir. Pekî, "ideal" bir magnetik dipol veren akım çevrimi yapılabilir mi? Hem evet, hem hayır; elektrostatikte olduğu gibi, bunu bir limit şeklinde düşünebiliriz: Orijinde sonsuz küçük yarıçaplı bir çember alırsak, fakat dipol momentinin sonlu olması için akımı sonsuza götürürüz, böylece $m = Ia$ çarpımı sonlu kalır. Pratikte r uzaklığı çevrimin boyutlarından çok büyük olduğunda, dipol yaklaşıklığı iyi sonuç verir.

"İdeal" dipolün magnetik alanı nasıldır? Bunu kolay hesaplayabilmek için, dipolü orijinde ve z -ekseni yönünde alalım (Şek. 5.53). (5.79) formülüne göre, (r, θ, ϕ) koordinatlı bir noktada vektör potansiyel şöyle olur:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi} \quad (5.83)$$

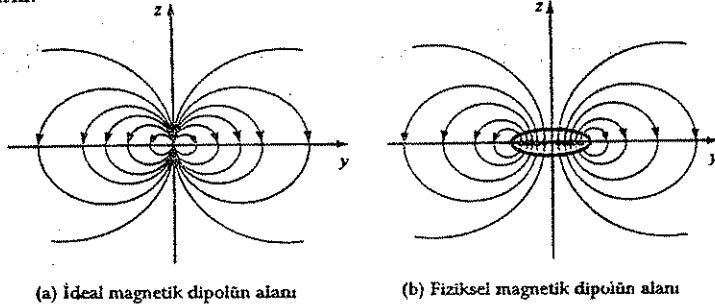
Buradan magnetik alan küresel koordinatlarda rotasyonel alınarak hesaplanır:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (5.84)$$



Şekil 5.53

Ne tuhaf: bu, (3.98) formülündeki *elektrik* dipolün alanıyla aynı ifadedir! Fakat, *fiziksel* dipollerin alanlarına bakıldığında, yakın bölgede farklı oldukları görülebilir. Şek. 5.54'de ideal ve fiziksel dipollerin magnetik alanı gösterilmiştir. Bu grafikleri Şek. 3.34 ile karşılaştırın.



Şekil 5.54

Problem 5.34 Magnetik dipolün alanı ifadesinin şu şekilde yazılabileceğini gösterin:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3} \quad (5.85)$$

Problem 5.35 Merkezi orijinde olan ve xy -düzleminde bulunan R yarıçaplı çemberden geçen I akımı, $+z$ yönünden bakıldığında saat yönünün tersinedir.

- Magnetik dipol momenti ne olur?
- Orijinden çok uzakta yaklaşık magnetik alan ne olur?
- z -ekseni üzerinde bir noktadaki yanıtınızın, Örnek 5.6'daki *tam* sonuçla uyumlu olduğunu gösterin.

Problem 5.36 R yarıçaplı ve yüzeyinde düzgün σ yük yoğunluğu bulunan bir disk ω açısal hızıyla dönüyor. Magnetik dipol momentini bulun.

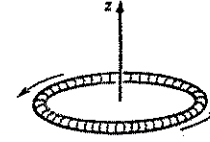
Problem 5.37 Örnek 5.11'deki dönen küresel kabuğun magnetik dipol momentini bulun. $r > R$ olan dış bölgedeki vektör potansiyelin, ideal dipol potansiyeli olduğunu gösterin.

Problem 5.38 Bir kenarı s uzunlukta ve I akımı taşıyan kare çerçevenin merkezinden z yükseklikteki magnetik alanın *tam* ifadesini bulun. $z \gg s$ olduğunda, yanıtınızın dipol magnetik alanına indirgendığını gösterin.

Problem 5.39 Herhangi bir yerel akım dağılımının (5.80) denklemiyle tanımlanan dipol momentinin orijinden bağımsız olduğunu gösterin.

Problem 5.40 Kütle M ve toplam yükü Q olan ince bir halka, eksenine çevresinde dönmektedir (Şek. 5.55)

Şekil 5.55



(a) Magnetik dipol momentinin eylemsizlik momentine oranını bulun. Buna *jiromagnetik oran* denir.

(b) Düzgün yüklü dönen küresel kabuğun jiromagnetik oranı ne olur? (Burada derin hesap gerekmez; küresel kabuğu ince halkalara ayırın ve (a) şıkkındaki sonucu kullanın.)

(c) Kuantum mekanikine göre, elektronun spin açısal momentumu $\frac{1}{2}\hbar$ olup \hbar Planck sabitidir. Buna göre, elektronun magnetik dipol momenti $A \cdot m^2$ biriminde ne kadar olur? (Bu yarı-klasik hesap gerçek değerin iki katı çıkar. Elektronun magnetik dipol momentinin doğru hesaplanması, görelî kuantum elektrodinamiğinin en büyük zaferi olmuştur. ($e\hbar/2m$) oranına Bohr magnetonu denir.)

BÖLÜM 5 ÜZERİNE EK PROBLEMLER

Problem 5.41 Paralel akımlar birbirini ittiğine göre, tek bir telden akım geçtiğinde, akımın eksen üzerinde toplanması gerektiği düşünülebilir. Oysa, gerçek bir telde akım kesit içinde düzgün dağılır. Bunu nasıl açıklarsınız? Yük ve akım dağılımları arasındaki hangi integral ilişkiyi kullanırsınız? Akım yoğunluğu düzgün ise, tel nötr olabilir mi?

! Problem 5.42 Biot-Savart yasasının yüzey akımları için (5.35) ifadesini kullanarak, R yarıçaplı ve birim uzunluğunda N sarımdan I akımı geçen sonsuz solenoidin içinde ve dışında magnetik alanı bulun.

Problem 5.43 Orijindeki $\vec{m} = -m_0 \hat{k}$ magnetik dipolü, $\vec{B} = B_0 \hat{k}$ düzgün dış magnetik alanı içinde bulunuyor. Merkezi orijinde olan öyle bir küre yüzeyi vardır ki, magnetik alan çizgileri bu yüzeyi kesmez. Bu kürenin yarıçapını bulun, içinde ve dışında alan çizgilerini gösterin.

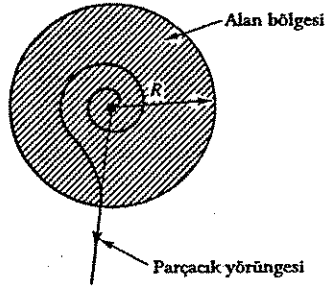
Problem 5.44 Küresel simetrik (yani, sadece r uzaklığına bağlı) bir magnetik alan sadece Şek. 5.56'daki taralı bölgede olup kağıt düzlemine diktir. $\int \vec{B} \cdot d\vec{a}$ toplam akısı sıfır ise, merkezden ilk hızla başlayan yüklü bir parçacığın, sonunda magnetik alanı *radial* doğrultuda terkedeceğini gösterin. (Eğer ilk hızı çok büyükse, parçacık dışarı çıkarmıyabilir.) Benzer şekilde, dışardan merkeze nişanlanan yüklü bir parçacık, içerde acıip bir yörünge izleyebilir, ama sonunda hedefini bulur. (Yol gösterme: Lorentz kuvvetini kullanarak, parçacığın kazandığı toplam açısal momentumu hesaplayın.)

Problem 5.45 Magnetostatikte, etkileşen iki çerçeve simetrik olarak gözönüne alınmaz; bunlardan biri magnetik alanın "kaynak akımı", diğeri ise kuvvetin uygulandığı "hedef akımı" olur. Bu nedenle, iki çevrim arasındaki magnetik kuvvetin Newton'un üçüncü (etki-tepki) yasasına uyduğu şüpheli görünebilir. (5.28) Biot-Savart yasası ve (5.16) Lorentz kuvvetinden yola çıkarak, Şek. 5.57'deki 1.çevrimin 2.çevrime uyguladığı kuvvetin

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{\hat{R}}{R^2} d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 \quad (5.86)$$

şeklinde yazılabileceğini gösterin. Bu ifadeyle $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ olacağı açıktır, çünkü $1 \leftrightarrow 2$ değiştiğinde \hat{R} vektörü yön değiştirecektir. (Hesap sırasında fazladan bir terim buluyorsanız, $d\vec{l}_2 \cdot \hat{R} = d\vec{l}_1 \cdot \hat{R}$ olduğuna dikkat edin.)

• Problem 5.46 (a) Hacmi içinde düzgün akım yoğunluğu olan R yarıçaplı bir küre



Şekil 5.56

yüzeyindeki ortalama magnetik alanın

$$\vec{B}_{\text{ort}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi \vec{m}}{R^3} \quad (5.87)$$

olduğunu gösterin. Bu sonucu elektrostatikteki (3.100) denklemiyle karşılaştırın. (Bu problem zor olduğundan, size yardım edeyim: Önce ortalama yazın:

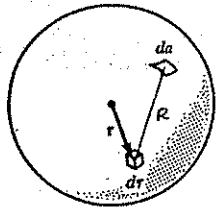
$$\vec{B}_{\text{ort}} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \vec{B} d\tau$$

Sonra, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ yazıp Problem 1.56b sonucunu kullanın. Daha sonra, (5.57) formülünde yerine koyun ve önce yüzey integralini alıp (Şek. 5.58)

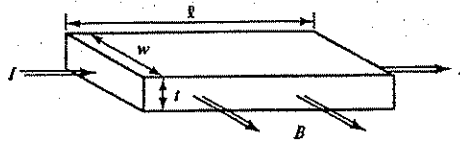
$$\frac{d\vec{a}}{R} = \frac{4\pi}{3} \vec{r}$$

olduğunu gösterin.

(b) Küre dışındaki akımların yüzeydeki ortalama magnetik alanının, küre merkezindeki alana eşit olduğunu gösterin.



Şekil 5.58



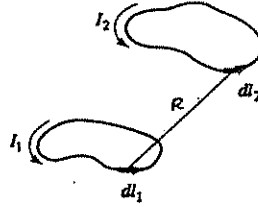
Şekil 5.59

Problem 5.47 Vektör potansiyelin multipol açılımını teldeki akım için göstermiştim, çünkü daha sık karşılaşılır ve daha kolaydır. \vec{J} hacimsal akım yoğunluğu için:

- (5.73) denklemine benzer multipol açılımını yazın.
- Monopol potansiyelini bulun ve sıfır olduğunu gösterin.
- (5.80) denklemini uygun şekilde değiştirerek dipol momentini bulun.

Problem 5.48 Hacmi içinde düzgün dağılmış toplam Q yükü bulunan R yarıçaplı küre z -ekseni çevresinde ω açısal hızıyla dönüyor.

5. MAGNETOSTATİK



Şekil 5.57

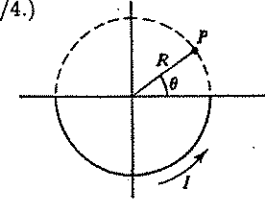
PROBLEMLER

- Kürenin magnetik dipol momentini bulun.
- Küre içinde ortalama magnetik alanı bulun (bkz. Problem 5.47).
- $r \gg R$ olduğunda, (r, θ) koordinatlı bir noktada yaklaşık vektör potansiyeli bulun.
- Küre dışında (r, θ) koordinatlı noktada tam potansiyeli bulun ve (c) sonucuyla tutarlı olduğunu gösterin. (Yol gösterme: Örnek 5.11'e bakın.)
- Küre içinde (r, θ) koordinatlı noktada magnetik alanı bulun ve (b) şıkıyla tutarlı olduğunu gösterin.

Problem 5.49 Hall olayı. Dikdörtgen kesitli iletken bir çubuk içinde sağa doğru I akımı vardır. İletken, sayfa düzleminin dışına yönelik düzgün \vec{B} magnetik alanı içinde bulunmaktadır (Şek. 5.59).

- Hareket eden yükler pozitif ise, magnetik alanda hangi yöne saparlar? (Bu sapma alt ve üst yüzlerde yük birikmesine, dolayısıyla magnetik alanı dengeleyen bir elektrik alan oluşmasına yol açar. Dengede iki kuvvet birbirini sıfırlar.)
- Üst ve alt yüzeyler arasında oluşan potansiyel farkını (buna "Hall voltajı" denir), B alanı, yüklerin v hızı ve çubuğun boyutları cinsinden bulun.
- Hareketli yükler negatif olsaydı, çözümünüz nasıl değişirdi? (Hall olayı, yük taşıyıcılarının işaretini belirlemenin klasik yöntemidir.)

Problem 5.50 Örnek 5.11'deki dönen küresel kabuğun "kuzey" ve "güney" yarımküreleri arasındaki çekim kuvvetini bulun. (Yanıt: $\pi\mu_0\sigma^2\omega^2 R^4/4$.)



Şekil 5.60

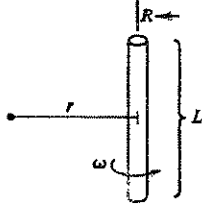
Problem 5.51 Şek. 5.60'da R yarıçaplı yarı çember üzerinde I akımı vardır. (Telin devreyi tamamlayan diğer kısımlarını gözönüne almıyoruz.) Karşı taraftaki yarı çember üzerindeki bir P noktasında magnetik alanı bulun.

$$\left(\text{Yanıt: } \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \ln \left[\frac{\tan(\theta + \pi/4)}{\tan(\theta/4)} \right] \right)$$

Problem 5.52 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ olduğu için, \vec{B} alanını $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ şeklinde vektör potansiyelin rotasyoneli olarak yazabiliyorsak, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ olduğuna göre, \vec{A} vektörünü de $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{W}$ şeklinde, daha "yüksek" mertebeden bir potansiyelin rotasyoneli olarak yazabiliriz.

- \vec{W} fonksiyonunun genel ifadesini \vec{B} 'nin integrali olarak ve sonsuzda $\vec{B} \rightarrow 0$ olacak şekilde yazın.
- Düzgün \vec{B} magnetik alanı için \vec{W} "yüksek" potansiyelini bulun. (Yol gösterme: Problem 5.27'ye bakın.)
- Sonsuz bir solenoidin içinde ve dışında \vec{W} potansiyelini bulun. (Yol gösterme: Örnek 5.12'ye bakın.)

Problem 5.53 (5.84) formülünü kullanarak, bir dipolün magnetik alanının, merkezi orijine olan R yarıçaplı küre yüzeyindeki ortalama değerini bulun. Önce açısal integralleri alın. Yanıtınızı Problem 5.48'deki genel teoremle karşılaştırın. Aradaki farkı açıklayın ve $r = 0$ daki tutarsızlığı gidermek için (5.84) denkleminin nasıl değiştirmek gerektiğini söyleyin. (Takılırsanız, Problem 3.42'ye bakın.) [Yanıt: $(2\mu_0/3)\vec{m} \delta^3(\vec{r})$.]



Şekil 5.61

Problem 5.54 Yüzeyinde düzgün σ yük yoğunluğu bulunan, R yarıçaplı ve L uzunlukta bir silindir, eksenî etrafında ω açısal hızıyla dönüyor (Şek. 5.61). Silindir orta dikmesinden $r \gg R$ uzaklıkta bir noktada magnetik alanı bulun. (Yol gösterme: Silindiri üst üste konmuş dipoller gibi düşünün.)

$$\left(\text{Yanıt: } \frac{\mu_0 \omega \sigma L R^3}{4[r^2 + (L/2)^2]^{3/2}} \right).$$

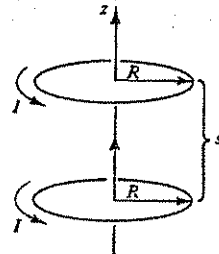
Problem 5.55 Şu tek-çözüm teoremini ispat edin: Bir V hacmi içinde \vec{J} yük dağılımı belirtilmişse ve hacmi saran S yüzeyi üzerinde ise ya \vec{A} potansiyeli yahut da \vec{B} magnetik alanı belirtilmişse, hacim içinde her yerde vektör potansiyel tek değerle belirlenmiş olur. (Elbette potansiyele skaler bir fonksiyonun gradyanı eklenirse, tek değerli oluşunu değiştirmez.) Burada $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ olduğunu varsayamayız. (Yol gösterme: Önce, diverjans teoremini kullanarak, \vec{U} ve \vec{V} gibi herhangi iki vektör fonksiyonu için

$$\int \{ (\vec{\nabla} \times \vec{U}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \vec{U} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})] \} d\tau = \oint [\vec{U} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})] \cdot d\vec{a}$$

olduğunu gösterin.)

Problem 5.56 Gelişigüzel şekilde kıvrılmış düzlem bir çerçevenin bir bölümü, tel düzlemine dik ve düzgün \vec{B} magnetik alanı içindedir (Şek. 5.62). I akımı geçen çerçeve üzerindeki bileşke kuvvetin $F = IBs$ olduğunu gösterin (s uzunluğu şekilde gösterilmiştir). Kuvvet hangi yöndedir?

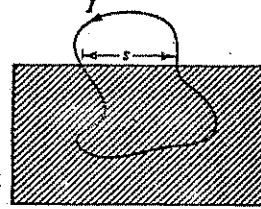
Problem 5.57 Helmholtz bobini. Akım geçen çember eksenî üzerinde magnetik alan [(5.34) formülü] düzgün olmayıp, z arttıkça azalır. Aralarında s uzaklığı bulunan iki çember kullanarak, eksen üzerindeki alan daha düzgün hale getirilebilir (Şek. 5.63).



Şekil 5.63

(a) Eksen üzerinde B magnetik alanını z -nin fonksiyonu olarak bulun. Çemberlerin ortasındaki noktada ($z = 0$) $\partial B / \partial z = 0$ olduğunu gösterin. Eğer s uygun seçilirse, orta noktada $\partial^2 B / \partial z^2$ türevi de sıfır olur. Bu düzeneğe Helmholtz bobini denir ve düzgün magnetik alan elde etmekte kullanılır.

(b) Orta noktada $\partial^2 B / \partial z^2 = 0$ olacak şekilde s değerini bulun. Bu durumda orta noktadaki magnetik alan ne kadar olur? [Yanıt: $B = 8\mu_0 I / (5^{3/2} R)$]



Şekil 5.62

MAGNETİK ORTAMLAR

6.1 MAGNETİZASYON

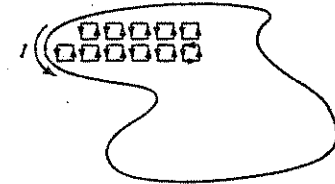
6.1.1 Diamagnetik, Paramagnetik, Ferromagnetik Maddeler

Mıknatıslanma sokaktaki adamın bildiği bir etkidir; atnah mıknatısı, pusula, kuzey kutbu,... Ancak tüm bu etkilerin hareketli yükler veya akım taşıyan tellerle ilgisi pek açık değildir. Magnetik alanın hareketli elektrik yüklerinden kaynaklandığını biliyoruz; aslında magnetik bir cisim atomik ölçekte gözleyebilseydik, çok küçük akımlar göürdük: çekirdek çevresinde veya kendi eksenleri çevresinde dönen elektronlar. Makroskopik ölçekte bu akım çevrimleri çok küçük olduğundan, birer magnetik dipol gibi ele alınabilirler. Genel olarak, atomların rastgele yönlerde oluşu nedeniyle, bu dipoller birbirini sıfırlar. Fakat bir dış magnetik alan uygulandığında, magnetik dipollerin düzenli sıralandığı gözlenir. Bu olaya magnetizasyon (mıknatıslanma) diyoruz.

Elektrik polarizasyonun daima \vec{E} alanı yönünde olmasına karşın, ancak bazı tür maddelerin magnetizasyonu \vec{B} 'ye paralel olur; bunlara paramagnetik maddeler denir. Diğer bir grup \vec{B} 'ye zıt yönde magnetizasyon kazanır; bunlar diamagnetik olurlar. Az sayıda diğer bir grup madde, dış magnetik alan kaldırıldıktan sonra dahi kalıcı magnetizasyon kazanırlar; bunlara ferromagnetik maddeler diyoruz. En bilinen mıknatıslar ferromagnetikler olmasına karşın, teorik açıdan en karmaşık yapıda olan da bunlardır. Ferromagnetizmayı bölüm sonuna bırakıp, paramagnetizma ve diamagnetizmanın kalitatif modelleriyle başlayalım.

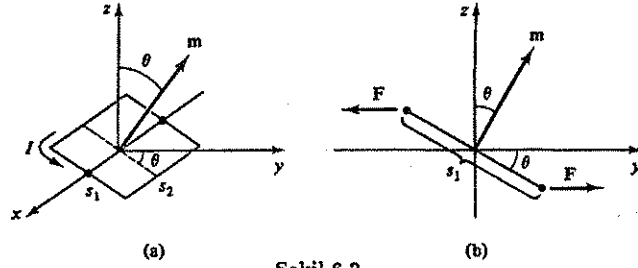
6.1.2 Magnetik Dipol Üzerindeki Kuvvet ve Tork

Dış elektrik alanda elektrik dipole bir tork uygulandığı gibi, bir dış magnetik alandaki magnetik dipole de bir tork uygulanır. Önce, düzgün \vec{B} magnetik alanındaki dikdörtgen bir çerçeve üzerindeki torku bulalım. (Niçin bu özel durumla başlıyorum? Şek. 6.1'de görüldüğü gibi, rastgele bir çerçeve sonsuz küçük dikdörtgen çerçevelerden oluşmuş gibi düşünülebilir, çünkü iç kenarlardaki akımlar birbirini sıfırlar. O halde, dikdörtgen çerçeveyi halledersek, daha genel durumdaki torku da bulabiliriz. Eğer, doğrudan rastgele çerçeveyle başlamak istiyorsanız, Problem 6.2'ye bakın.)



Şekil 6.1

Merkezi orijinde olan ve z -ekseni çevresinde dönebilen dikdörtgen çerçeve, z -yönündeki düzgün \vec{B} alanı içinde olsun (Şek. 6.2). Çerçevenin yz -düzleminde olan yüzey normal vektörü z -ekseniyle θ açısı yapıyor olsun. Eğik iki kenara etkiyen kuvvetler birbirini sıfırlar ve dönme eksenine göre tork oluşturmazlar. Yatay iki kenara etkiyen kuvvetler de eşit ve zıt olurlar,



Şekil 6.2

ancak bunlar bir tork oluştururlar:

$$\vec{N} = s_1 F \sin \theta \hat{i}$$

Bu iki kenara uygulanan kuvvetin büyüklüğü

$$F = Is_2 B$$

olduğundan

$$\vec{N} = (Is_1 s_2) B \sin \theta \hat{i} = m B \sin \theta \hat{i}$$

veya,

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (6.1)$$

Burada $m = Is_1 s_2$ çerçevenin manyetik dipol momentidir. (6.1) denklemi *düzgün* manyetik alanda *her biçimdeki* çerçeveye uygulanan torku verir. Manyetik alan *düzgün* değilse, bu formül noktasal bir dipol için yine doğrudur.

Tork ifadesinin elektrostatikteki $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$ ile aynı yapıda olduğuna dikkat edelim. Torkun yönü yine dipolü alana *paralel* hale getirecek şekildedir. **Paramagnetizma** olayına yol açan bu torktur. Atomdaki her elektron küçük bir dipol olduğuna göre, paramagnetizmanın tüm maddelerde oluşacağını düşünebilirsiniz. Fakat, kuantum mekaniğine göre, atomdaki iki elektron dipolleri antiparalel olacak şekilde çiftler halinde yerleşirler. Bu çiftler üzerindeki net tork sıfır olduğundan, paramagnetizma normalde tek sayıda elektronu olan atom veya moleküllerde gözlenir; manyetik tork bu tek kalan son elektronu etkiler. Fakat, ısısal çalkantı nedeniyle, bu düzen tam oluşmaz.

Düzgün manyetik alanda akım çerçevesi üzerindeki net kuvvet sıfırdır:

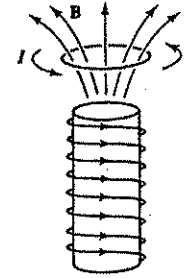
$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B} = I \left(\oint d\vec{l} \right) \times \vec{B} = 0$$

Sabit \vec{B} alanı integral dışına alınır, kapalı eğri üzerindeki vektörel yerdeğiştirmeler toplamı sıfır olur. *Düzgün olmayan* alanda durum farklıdır. Örneğin, Şek. 6.3'te gösterilen R yarıçaplı ve I akımı taşıyan dairesel çerçeve, alttaki sonlu bir solenoidin manyetik alanı etkisiyle aşağı çekilir. Burada \vec{B} alanı tam z -yönünde olmayıp, radyal bir bileşeni daha vardır; bu bileşen çember üzerinde aşağı yönde bir kuvvet uygular (Şek. 6.4):

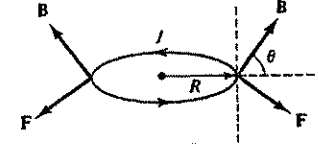
$$F = 2\pi IRB \cos \theta \quad (6.2)$$

Sonsuz küçük bir \vec{m} dipolüne \vec{B} alanında uygulanan kuvvet (bkz. Problem 6.4)

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (6.3)$$



Şekil 6.3



Şekil 6.4

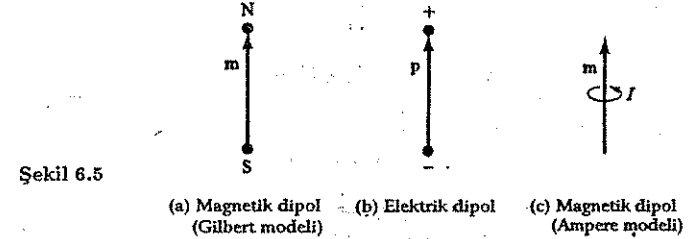
4. çarpım kuralını kullanırsak

$$\vec{F} = \vec{m} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (6.4)$$

olur. Buradaki \vec{B} dış manyetik alandır (dipol kendi üzerine kuvvet uygulamaz). $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ olduğundan, dipolün bulunduğu yerde \vec{J} akım yoğunluğu yoksa

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (6.5)$$

bulunur. Bu formül de, elektrostatikteki $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$ bağıntısının benzeridir.

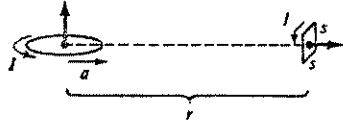


Şekil 6.5

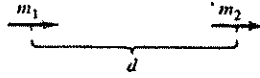
Bu benzerlik nedeniyle fizikçiler ilk zamanlarda manyetik dipollerin de pozitif ve negatif "manyetik yük"lerden oluştuğunu haklı olarak düşündüler. (Bunlara "kuzey" ve "güney" kutupları denilir.) Bu kutuplar arasındaki çekici ve itici kuvvetler için bir tür Coulomb yasası yazdılar ve tüm magnetostatik teorisini elektrostatiğe paralel olarak geliştirdiler. "Gilbert modeli" denilen bu yaklaşım (Şek. 6.5) birçok bakımdan kötü bir model değildir—dipolün alanını, dipole etkileyen torku ve kuvveti doğru olarak verir. Ancak, fiziksel olarak doğru değildir, çünkü tek başına manyetik kuzey veya güney kutbu yoktur; bir mıknatıs çubuğu ikiye bölerseniz, bir elinizde güney ve diğer elinizde kuzey kutbu kalmaz; iki tam mıknatıs elde edersiniz. Magnetizma olayı "manyetik yükler"den kaynaklanmaz, *hareket eden elektrik yüklerinden* kaynaklanır. "Ampere modeli" denilen günümüzdeki yaklaşımda \vec{m} dipolü bir akım çevrimi olarak alınır. Bu nedenle, \vec{m} dipolü için bulunan formüllerin \vec{p} 'li formüllerle benzerlik taşıması gerçekten şaşırtıcıdır.

Problem 6.1 Şek. 6.6'daki dairesel çerçevenin kare çerçeveye uyguladığı torku hesaplayın. (r uzaklığının a veya s 'den çok büyük olduğunu varsayın.) Kare çerçeve serbestçe dönebiliyorsa, denge durumu hangi yönde olur?

Problem 6.2 Yalnız dikdörtgen çerçeve değil, akım geçen herhangi bir çerçeveye *düzgün* manyetik alanda etkileyen torkun ($\vec{m} \times \vec{B}$) olduğunu gösterin.

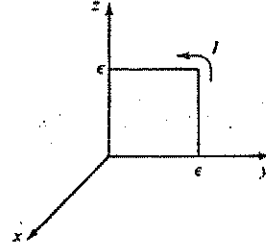


Şekil 6.6



Şekil 6.7

Problem 6.3 Şek. 6.7'deki gibi yönelmiş ve aralarında d uzaklığı bulunan \vec{m}_1 ve \vec{m}_2 gibi iki magnetik dipol arasındaki çekim kuvvetini (a) (6.2) formülüyle, (b) (6.3) formülüyle hesaplayın.



Şekil 6.8

Problem 6.4 (6.3) formülünü çıkarın. İşte size bir yol: Dipolü, bir kenarı sonsuz küçük ϵ uzunlukta kare çerçeve olarak düşünün. Eksenleri Şek. 6.8'deki gibi seçin ve her dört kenar için $\vec{F} = I \int (d\vec{l} \times \vec{B})$ kuvvetini hesaplayın. \vec{B} değerlerini Taylor serisi olarak açın—örneğin sağ kenarda şöyle olur:

$$\vec{B} = \vec{B}(0, \epsilon, z) \cong \vec{B}(0, \epsilon, 0) + z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \Big|_{(0, \epsilon, 0)}$$

Problem 6.5 yz -düzleminin $x = -a$ 'dan $x = +a$ 'ya kadar genişlikteki bölgesinde düzgün $\vec{J} = J_0 \hat{k}$ akım yoğunluğu bulunmaktadır. $\vec{m} = m_0 \hat{i}$ olan bir magnetik dipol orijine konulmuştur.

(a) Dipol üzerindeki kuvveti (i) (6.3) formülüyle, (ii) (6.5) formülüyle hesaplayın. (i) sonucunun "Ampere dipolü" için doğru sonuç verdiğini (kare çerçeve alıp her kenar üzerindeki kuvveti hesaplayarak) gösterin; (ii) sonucunun "Gilbert" dipolü için doğru sonuç verdiğini (her kutuba etkiyen kuvveti hesaplayarak) gösterin.

(b) Aynı hesabı y -yönündeki $\vec{m} = m_0 \hat{j}$ dipolü için tekrarlayın.

6.1.3 Atomik Yörüngeler Üzerinde Magnetik Alanın Etkisi

Elektronlar kendi eksenleri etrafında döndükleri gibi, çekirdek çevresinde de dönerler. Konuyu basit tutmak için, r yarıçaplı dairesel bir yörüngede döndüklerini varsayalım (Şek. 6.9). Bu dönüşün periyodu $T = 2\pi r/v$ o kadar küçüktür ki, noktasal yükün hareketi yerine,

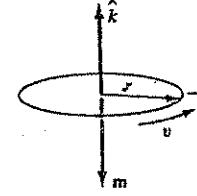
$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

gibi hareketli bir elektrik yükünün olduğunu varsayabiliriz. Bunun dipol momenti

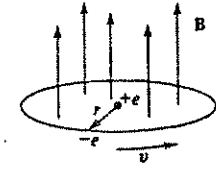
$$\vec{m} = -\frac{1}{2} e v r \hat{k} \quad (6.6)$$

olur. (Eksi işareti negatif elektron yükünden gelir.) Atom bir dış magnetik alan içine konulduğunda, her dipol gibi, buna da $(\vec{m} \times \vec{B})$ kadar bir tork etkir ve döndürmeye çalışır.

6.1. MAGNETİZASYON



Şekil 6.9



Şekil 6.10

Tüm yörüngeyi döndürmek spini döndürmekten daha zordur; bu nedenle paramagnetizmaya yörünge hareketinin katkısı çok küçüktür. Fakat, yörünge hareketinde çok daha değişik bir etki olur: \vec{B} 'nin yönüne bağlı olarak elektron hızlanır veya yavaşlar. Gerçekten de, yörünge hareketinde merkezci ivmeyi sağlayan elektriksel kuvvet şöyle olur:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}$$

(Burada m_e elektron kütlesidir.) Magnetik alanda şimdi $-e(\vec{v} \times \vec{B})$ kadar ek bir katkı daha olur. \vec{B} alanı yörünge düzlemine dik olsun (Şek. 6.10); buna göre

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + e v' B = m_e \frac{v'^2}{r}$$

Bu durumda yeni v' hızı v hızından daha büyük olur:

$$e v' B = \frac{m_e}{r} (v'^2 - v^2) = \frac{m_e}{r} (v' + v)(v' - v)$$

veya, $\Delta v = v' - v$ artışı küçük ise

$$\Delta v = \frac{e r B}{2 m_e} \quad (6.7)$$

bulunur. O halde, \vec{B} alanında elektronun hızı artar.

Yörünge hızındaki değişme (6.4) formülündeki dipol momentinde değişme demektir:

$$\Delta \vec{m} = -\frac{1}{2} e (\Delta v) r \hat{k} = -\frac{e^2 r^2}{4 m_e} \vec{B} \quad (6.8)$$

\vec{m} 'deki değişimin \vec{B} yönüne zıt olduğuna dikkat edelim. Ters yönde dönen bir elektronun dipol momenti yukarı yönde olurdu ve bu elektron magnetik alanda yavaşlardı, yani değişme yine \vec{B} 'ye zıt olur. Normal madde içinde elektron yörüngeleri rastgele yönlerde olduğundan, yörünge dipol momentleri birbirini sıfırlar. Fakat, magnetik alan olduğunda, her atomun dipol momentinde bir artış olur ve bu artışlar magnetik alana antiparalel olurlar. Diamagnetizma olayı bu süreçten kaynaklanır. Tüm atomlarda gözlenen evrensel bir etkidir. Fakat, paramagnetizmaya kıyasla daha küçük mertebede olduğundan, ancak paramagnetizmanın varolmadığı çift elektronlu atomlarda gözlenir.

(6.8) formülünü çıkarırken elektron yörüngesinin aynı r yarıçapında dairesel kaldığını varsaydım. Bu varsayımı şimdilik yorumlayamıyorum. Eğer atom durgunken magnetik alan başlatılıyorsa, varsayımın doğruluğu ispatlanabilir. Ancak bu magnetostatik olmaktan çıkar ve Bölüm 7'de göreceğimiz yöntemlerle çözülür. Burada diamagnetizmanın kalitatif bir açıklamasını yaptığımızdan, ayrıntılar üzerinde fazla durmayalım. İsterseniz yarıçap

değişirken, hızın sabit kaldığını varsayın; sonuç iki katı çıkar; fakat yorum aynıdır. (Gerçeği söylemek gerekirse, bu klasik açıklama yeterli değildir, çünkü diamagnetizme bir *kuantum* olaydır; bu nedenle ayrıntıları düzeltmeye çalışmak yararsızdır.) Önemli olan deneysel olgu şudur: Diamagnetik maddelerde dipol momenti magnetik alana *zıt yönde* oluşur.

6.1.4 Magnetizasyon

Magnetik alan içinde madde magnetizasyon kazanır (mıknatıslanır); yani, mikroskopik ölçekte küçük dipollerin belli bir yön kazandığı görülür. Magnetizasyonun oluşmasını sağlayan iki mekanizmadan yukarıda söz ettik: (1) paramagnetizma: tek kalmış atomik elektron spinine etkiyen tork onu alan yönünde dönmeye zorlar, (2) diamagnetizma: elektronun yörünge hızındaki değişme, dipol momentinde magnetik alana zıt yönde değişmeye neden olur. Kaynağı ne olursa olsun, maddenin mıknatıslanma durumunu karakterize eden bir **magnetizasyon vektörü** şöyle tanımlanır:

$$\vec{M} \equiv \text{birim hacimdeki magnetik dipol momenti} \quad (6.9)$$

\vec{M} magnetizasyon vektörü, elektrostatikteki \vec{P} polarizasyon vektörüne benzer bir görev yapar. Şimdi yapılacak iş, magnetizasyonun nasıl oluştuğuyla ilgilenmeden (bu paramagnetizma, diamagnetizma ve hatta ferromagnetizma olabilir), \vec{M} vektörünü verilmiş kabul edip, bunun oluşturduğu magnetik alanı hesaplamaktır.

Ferromagnetik üç metal (demir, nikel ve kobalt) dışındaki maddelerin magnetik alandan etkileniyor olmaları size şaşırtıcı gelebilir. Bir tahta veya alüminyum parçasına mıknatıs yaklaştırdığınızda bir çekim kuvveti göremeyiz. Bunun nedeni, paramagnetizma ve diamagnetizmanın çok zayıf etkiler olmasıdır: Ancak çok güçlü mıknatısların kullanıldığı duyarlı bir deneyde gözlenebilirler. Şek. 6.3'teki gibi, bir solenoidin üstüne paramagnetik bir cisim yaklaştırırsanız, oluşan magnetizasyon yukarı yönde, dolayısıyla kuvvet aşağı yönde olur. Buna karşılık, diamagnetik bir cisim yaklaştırdığımızda, magnetizasyon aşağı, kuvvet yukarı yönde olur. Genel olarak, düzgün olmayan bir magnetik alanda paramagnetikler alan içine çekilir, diamagnetikler dışa itilirler. Fakat tüm bu kuvvetler, bir demir parçasına kıyasla $10^4 - 10^5$ kez daha küçük olurlar.

Problem 6.6 Şu maddelerden hangilerinin paramagnetik, hangilerinin diamagnetik olmasını beklersiniz? Alüminyum, bakır, bakır klorür, karbon, kurşun, azot (N_2), tuz ($NaCl$), sodyum, kükürt, su.

6.2 MIKNATISLANMIŞ BİR CİSMİN MAGNETİK ALANI

6.2.1 Bağlı Akımlar

Mıknatıslanmış bir cisim gözönüne alalım; birim hacimdeki magnetik dipol momenti (\vec{M}) verilmiş olsun. Bu cismin kendi oluşturduğu magnetik alan ne olur? Tek bir \vec{m} dipolünün vektör potansiyelini biliyoruz:

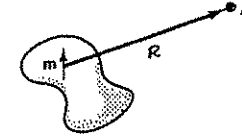
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^2} \quad (6.10)$$

Bu cisim içindeki $d\tau$ hacim elemanı içinde $\vec{M} d\tau$ kadar dipol momenti olacağından (Şek. 6.11), toplam vektör potansiyel

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^2} d\tau \quad (6.11)$$

6.2. MIKNATISLANMIŞ BİR CİSMİN MAGNETİK ALANI

Şekil 6.11



olur. İlke olarak yanıtı bulmuş sayılırız. Fakat bu integrali daha kullanışlı bir şekle dönüştürebiliriz. Şu vektör bağıntıyı hatırlayalım:

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^2} \quad (\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}')$$

(Buradaki türev dipolün bulunduğu \vec{r}' koordinatına göredir.) Buradan

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{M} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r}) d\tau$$

Kısmi integrali 7. çarpım kuralına göre alırsak

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{1}{r} (\vec{\nabla} \times \vec{M}) d\tau - \int \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{r} \vec{M} \right) d\tau \right]$$

olur. İkinci integrali, Problem 1.56b sonucunu kullanarak bir yüzey integraline dönüştürüz:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \times \vec{M}}{r} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{M} \times d\vec{a}}{r} \quad (6.12)$$

Birinci terim şöyle bir hacim akım yoğunluğunun potansiyeli şeklindedir:

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (6.13)$$

İkinci terim ise şöyle bir yüzey akımının potansiyeli gibidir:

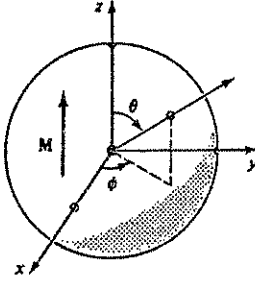
$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} \quad (6.14)$$

Burada \hat{n} yüzey normali vektörüdür. Bu tanımlarla potansiyel ifadesi şöyle yazılabilir:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{hacim}} \frac{\vec{J}_b}{r} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{yüzey}} \frac{\vec{K}_b}{r} da \quad (6.15)$$

Bu sonuca göre, mıknatıslanmış bir cismin potansiyeli (dolayısıyla magnetik alanı), $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ kadar bir hacim akım yoğunluğu ile $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ kadar bir yüzey akım yoğunluğunun birlikte oluşturduğu potansiyele eşdeğerdir. (6.11) denklemindeki gibi madde içindeki mikroskopik dipollerin katkısını hesaplayacağımıza, önce bu **bağlı akımları** buluruz, sonra akımlar için bildiğimiz yolla magnetik alanı hesaplarız. Burada elektrostatikte olan çarpıcı benzerliğe dikkat edelim: Elektrostatikte polarizasyonun alanı $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ bağlı hacim yükü ile $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ bağlı yüzey yüküne eşdeğer oluyordu.

Örnek 6.1: Düzgün magnetize olmuş bir kürenin magnetik alanını bulun.



Şekil 6.12

Çözüm : z-eksenini \vec{M} yönünde alırsak (Şek. 6.12), hacim içinde \vec{M} sabit ve normal vektörü \hat{r} yönünde olduğundan

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0, \quad \text{ve} \quad \vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M \sin \theta \hat{\phi}$$

bulunur. Oysa, Örnek 5.11'de, düzgün σ yüzey yüklü dönen küresel kabuğun yüzey akım yoğunluğu şöyle bulunmuştu:

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma \omega R \sin \theta \hat{\phi}$$

O halde, düzgün magnetizasyonu olan küre, $\sigma R \omega \rightarrow \vec{M}$ değişikliği yapılsa, dönen küresel kabuğa eşdeğer olur. O örnekte bulduğumuz magnetik alan sonucunu kullanırsak, küre içinde

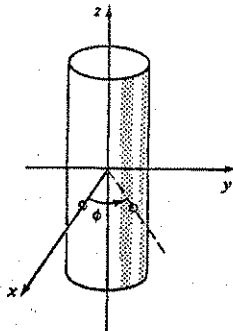
$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \quad (6.16)$$

olup, küre dışında ise ideal dipolün alanı bulunur. Bu dipolün değeri

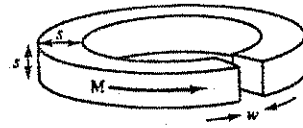
$$\vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M}$$

olmalıdır. Dikkat ederseniz, içerdeki magnetik alanın düzgün oluşu ve dışarda ideal dipol oluşu, elektrostatikteki düzgün polarizasyonlu kürenin elektrik alanına benzer; ancak kat-sayılar farklıdır.

Problem 6.7 Sonsuz uzunlukta bir silindir hacmi içinde, eksene paralel düzgün \vec{M} magnetizasyonu vardır. Silindir içinde ve dışında (\vec{M} 'den kaynaklanan) magnetik alanı bulun.



Şekil 6.13



Şekil 6.14

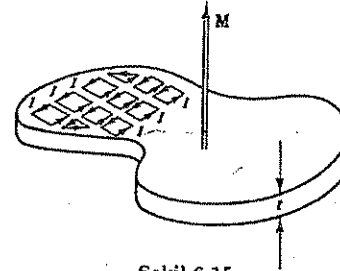
Problem 6.8 Şek. 6.13'te gösterilen R yarıçaplı sonsuz silindir içinde $\vec{M} = k r^2 \hat{\phi}$ magnetizasyonu vardır (k sabit, r ekseniden uzaklık). \vec{M} 'nin silindir içinde ve dışında oluşturduğu magnetik alanı bulun.

Problem 6.9 Yarıçapı R ve uzunluğu L olan bir silindir hacmi içinde, eksene paralel düzgün \vec{M} magnetizasyonu vardır. Bağlı akımları bulun ve silindirin magnetik alanını grafikte gösterin. ($L \gg R$, $L \ll R$ ve $L = r$ olmak üzere üç ayrı grafik çizin.) Bu magnetik çubuğu, Problem 4.11'deki elektret çubukla karşılaştırın.

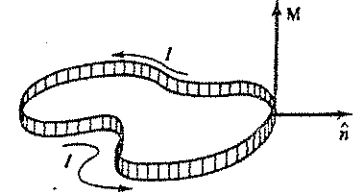
Problem 6.10 Uzunluğu L olan bir telin kesiti kare şeklinde olup, karenin kenarı s uzunluğundadır. Tel içinde düzgün \vec{M} magnetizasyonu oluşturulduktan sonra, tel çember şeklinde kıvrılıyor ve uçlar arasında küçük bir w aralığı bırakılıyor (Şek. 6.14). $w \ll s \ll L$ varsayıp, aralık merkezinde magnetik alanı bulun. (Yol gösterme: Bu sistemi tam bir toroit ile, zıt yönde akım geçen kare çerçevenin toplamı olarak düşünün.)

6.2.2 Bağlı Akımların Fiziksel Yorumu

Bir önceki kısımda, magnetize olmuş bir cismin alanının, "bağlı" akımlar denilen \vec{J}_b ve \vec{K}_b gibi iki akım dağılımının oluşturduğu alana eşdeğer olduğunu bulduk. Şimdi bu bağlı akımların fiziksel olarak nasıl oluşabileceğini göstermek istiyorum. Şek. 6.15'te düzgün magnetize olmuş ince bir tabakada küçük akım çerçeveleri şeklinde dipoller gösterilmiştir. Dikkat edilirse, "içteki" çerçeve kenarlarındaki akımlar birbirini sıfırlar, çünkü komşu iki kenardaki akımlar zıt yönde olurlar. Fakat, cismin dış kenarında bu sıfırlama olmaz; tüm tabakayı gözönüne aldığımızda, en dışta ince bir I akım şeridi oluşur (Şek. 6.16).



Şekil 6.15

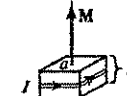


Şekil 6.16

Bu akımın \vec{M} cinsinden değeri nedir? Küçük çerçevelerden herbirinin yüzey alanı a ve kalınlığı t olsun (Şek. 6.17). Bu çerçevenin \vec{M} magnetizasyon cinsinden dipol momentini

$$m = M (at)$$

Şekil 6.17



olur. Diğer yandan, I akımlı küçük çerçevenin dipol momentini

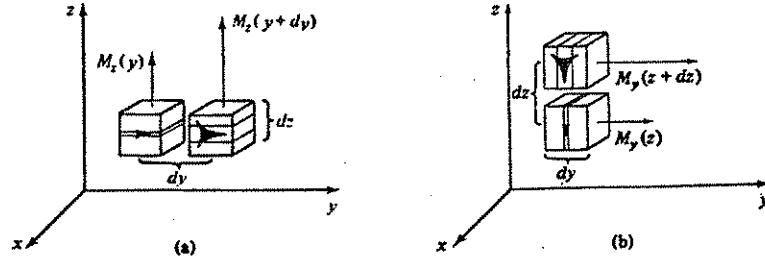
$$m = I a$$

olur. Buradan $I = Mt$ ve yüzey akım yoğunluğu $K_b = I/t = M$ bulunur. \hat{n} yüzey normalini dışa doğru alırsak (Şek. 6.16), \vec{K}_b vektörü şöyle ifade edilebilir:

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$$

Bu yüzey akımı tuhaf bir akımdır; bu akım çevrimini tümüyle dolaşan bir yük yoktur—her yük kendi atomu çevresindeki küçük bir çerçevede döner, ama bunların net etkisi cismin

yüzeyinde makroskopik bir akım oluşturur. "Bağlı akım" terimi yüklerin belirli atomlar çevresinde oluşunu göstermek için kullanılır; fakat bu da gerçek bir akım gibi davranır.



Şekil 6.18

Magnetizasyon düzgün değilse, iç kenarlardaki akımlar birbirini sıfırlamaz. Şek. 6.18a'da komşu iki küçük çerçeve gösterilmiştir. (Sağdaki çerçevedeki büyük ok, akımın burada daha büyük olduğunu gösterir.) Bu iki parçanın arakesitinde x-yönünde net bir akım oluşur:

$$I_x = [M_x(y+dy) - M_x(y)] dz = \frac{\partial M_x}{\partial y} dy dz$$

Buradan $da = dy dz$ kesitindeki hacimsel yük yoğunluğu bulunur:

$$(J_b)_x = \frac{\partial M_x}{\partial y}$$

Benzer şekilde, y-yönünde düzgün olmayan bir magnetizasyon, x-yönündeki akıma $-\partial M_y / \partial z$ kadar katkıda bulunacaktır (Şek. 6.18b). Buna göre, toplam akım yoğunluğu

$$(J_b)_x = \frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

olur. x-bileşeni bu olan akım yoğunluğu daha önce bulduğumuz sonuçla aynıdır:

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Diğer kararlı akımlar gibi, bağlı akımlar da (5.27) korunum yasasına uyarlar:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_b = 0$$

Doğru mu? Evet, çünkü rotasyonelin diverjansı daima sıfırdır.

6.2.3 Madde İçinde Magnetik Alan

Elektrik alanda olduğu gibi, madde içindeki gerçek mikroskopik magnetik alan oldukça karmaşık yapıda olur ve bir noktadan diğerine ani değişiklik gösterir. Madde içindeki magnetik alan deyince makroskopik alanı anlıyoruz; yani, küçük ama çok sayıda atom içeren bir bölgedeki ortalama alanı. (Aynı şekilde, \vec{M} magnetizasyonu da düzgün davranan bir ortalama alanıdır.) Buraya kadarki kısımlarda incelediğimiz yöntemleri magnetik ortamlara uyguladığımızda, bulacağımız alan bu makroskopik alandır (bkz. Problem 6.11).

Problem 6.11 Kısım 6.2.1'de "ideal" bir dipolün (6.10) formülüyle verilen potansiyelini kullanarak sonuçlar çıkardık, oysa madde içinde fiziksel dipoller vardır. Kısım 4.2.3'deki yöntemi kullanarak, yine de doğru makroskopik alanın bulunacağını gösterin.

6.3 H ALANI

6.3.1 Magnetik Ortamlarda Ampere Yasası

Bir önceki kısımda magnetizasyon etkisiyle madde içinde $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ ve madde yüzeyinde $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ bağlı akımları oluşuyordu. Ortamın miknatıslanmasından kaynaklanan magnetik alan bu akımların oluşturduğu alandır. O halde, madde içindeki magnetik alana iki tür katkı olabilir: bağlı akımların alanı ve "serbest akım" dediğimiz diğer tüm akımların alanı. Serbest akımlar örneğin madde içine yerleştirilmiş tellerden geçen akımlar olabilir; veya, madde iletkense doğrudan madde içinden geçebilir. Her neyse, toplam akım şöyle yazılabilir:

$$\vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f \quad (6.17)$$

Bu ifade ve (6.13) formülü gözönüne alınırsa, Ampere yasası şöyle yazılabilir:

$$\frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f = \vec{J}_f + (\vec{\nabla} \times \vec{M})$$

İki rotasyoneli bir araya getirelim:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f$$

Parantez içindeki büyüklük \vec{H} ile gösterilir:

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (6.18)$$

Şimdi Ampere yasası \vec{H} cinsinden yazılırsa

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f \quad (6.19)$$

veya, integral ifadesi

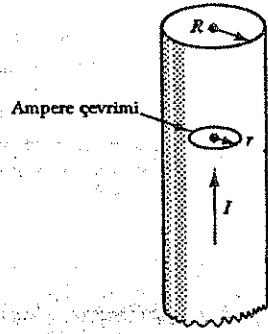
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f^{\text{g}} \quad (6.20)$$

Burada I_f^{g} Ampere çevrimi içinden geçen toplam serbest akımdır.

Elektrostatikte \vec{D} deplasman vektörünün rolünü, magnetostatikte \vec{H} vektörü üstlenir. Nasıl ki \vec{D} vektörünü kullanarak Gauss yasasını sadece serbest yükler cinsinden yazabildiysek, \vec{H} vektörü de Ampere yasasını sadece serbest akımlar cinsinden ifade etmemizi sağlar. Deneyisel olarak kontrol edebildiğimiz şey serbest akımlardır; bağlı akımlar ortamda bildikleri şekilde oluşurlar. (6.20) formülünü kullanırken sadece serbest akımları gözönüne alınız; özellikle, problemin simetrisi varsa Ampere yasası doğrudan \vec{H} vektörünü verir.

Örnek 6.2: R yarıçaplı silindirik şeklindeki tel hacmi içinde serbest I akımı düzgün dağılmıştır (Şek. 6.19). Tel içinde ve dışında \vec{H} alanını bulun.

Çözüm: Bakır diamagnetik bir malzemedir ve oluşan bağlı akımlar, I akımına tel içinde antiparalel ve tel dışında paralel yönde olurlar. Ancak, şimdilik bununla ilgilenmiyoruz; akımların tel doğrultusunda olduğunu bilmemiz yeter. Bu durumda \vec{B} , \vec{M} , ve dolayısıyla



Şekil 6.19

\vec{H} tel çevresinde dolanımlı yönde olurlar (Şek. 6.20). $r < R$ yarıçaplı bir Ampere çevrimi seçer ve (6.20) formülünü uygularsak

$$H(2\pi r) = I_f^{\text{ig}} = I \left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \right)$$

veya, vektörel ifadesi

$$\vec{H} = \frac{Ir}{2\pi R^2} \hat{\phi} \quad (r < R) \quad (6.21)$$

olur. Tel dışında aynı işlem sonucu

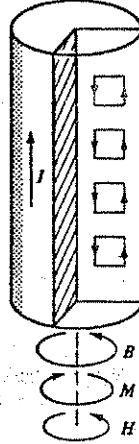
$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (r > R) \quad (6.22)$$

bulunur. Bu dış boşluk bölgesinde $\vec{M} = 0$ olduğundan, hemen \vec{B} alanını da bulabiliriz:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (r > R)$$

Bu, Örnek 5.7 sonucunu doğrular. Bu aşamada tel içindeki \vec{B} alanını bulamayız, çünkü \vec{M} magnetizasyonu verilmemiştir.

Uygulamada \vec{H} vektörü, elektrostatikteki \vec{D} vektöründen daha kullanışlı bir büyüklüktür. Laboratuarlarda veya endüstride çalışanların, \vec{B} den çok \vec{H} alanını kullandıkları görülür. Nedeni şudur: Elektromıknatıs yapmak için bir bobinden (serbest) akım geçirmek gerekir. Ölçü aletinde okuduğunuz büyüklük akımdır ve akım doğrudan \vec{H} 'yı (daha doğrusu, onun eğrisel integralini) belirler. \vec{B} alanı kullandığımız malzemenin cinsine bağlıdır. Öte yandan, elektrik alan oluşturmak istediğinizde düzlem kapasitörün levhaları üzerine serbest yükler yerleştirmeyiz, voltajı bilinen bir bataryanın uçlarına bağlarız. Ölçü aletimiz potansiyel farkını, ve dolayısıyla \vec{E} alanını verir. \vec{D} deplasman vektörü kullandığımız dielektrik cinsine bağlıdır. Eğer potansiyel farkını değil de yükleri ölçmek daha kolay olsaydı, şimdi deneyçiler \vec{E} yerine \vec{D} kullanır olacaktı. Yani, \vec{H} nin çok yaygın



Şekil 6.20

6.3. H ALANI

olarak kullanılıyor olması tümüyle pratik nedenlerden kaynaklanır; teorik açıdan \vec{H} ve \vec{D} aynı önemdedirler.

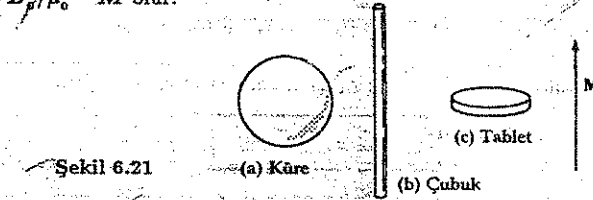
Bazı eski kitaplarda "magnetik alan" terimi \vec{H} için kullanılır. Bu durumda \vec{B} için yeni bir ad bulmak gerekirdi: "akı yoğunluğu" veya "magnetik indüksiyon" terimleri kullanılmıştır, fakat uygun değildir (elektromagnetik teoride "indüksiyon" teriminin başka bir anlamı vardır.) Herneyse, temel büyüklük \vec{B} dir ve günümüzde herkesin "magnetik alan" dediği de budur. \vec{H} için özel bir ad yoktur; siz de sadece " \vec{H} " deyin.¹

Problem 6.12 R yarıçaplı sonsuz silindir içindeki magnetizasyon eksene paralel olup $M = kr$ değerindedir (k bir sabit ve r eksenden uzaklık). Ortamda serbest akım yoktur. Silindir içinde ve dışındaki magnetik alanı iki farklı yoldan bulun:

- Tüm bağlı akımları bulun ve sonra bunların alanlarını hesaplayın.
- Ampere yasasının (6.20) ifadesini kullanarak \vec{H} 'yı bulun, sonra (6.18) formülünden \vec{B} 'yi hesaplayın. (İkinci yolun daha çabuk olduğuna dikkat edin.)

Problem 6.13 Problem 6.9'daki mıknatıs çubuk için $L \approx 2R$ olduğunu varsayıp \vec{M} , \vec{B} ve \vec{H} grafiklerini çizin. Problem 4.16 ile karşılaştırın.

Problem 6.14 Büyüğe bir magnetik cisim içinde belirli \vec{B}_0 magnetik alanı vardır. Buna göre, $\vec{H}_0 = \vec{B}_0/\mu_0 - \vec{M}$ olur.



Şekil 6.21

- Cisim içinde küresel bir kovuk oyuluyor (Şek. 6.21). Kovuk merkezindeki magnetik alanı \vec{B}_0 ve \vec{M} cinsinden bulun. Keza, merkezdeki \vec{H} alanını \vec{H}_0 ve \vec{M} cinsinden bulun.
- Aynı işlemi, \vec{M} 'ye paralel ince çubuk şeklindeki kovuk için yapın.
- Aynı işlemi, \vec{M} 'ye dik ince tablet şeklindeki kovuk için yapın.

(Kovukların boyutları \vec{M} , \vec{B}_0 ve \vec{H}_0 sabit olacak şekilde küçüktür.) Sonuçları Problem 4.17 ile karşılaştırın. (Yol gösterme: Bir kovuk açmak, bununla aynı geometrik biçimde fakat zıt magnetizasyonlu bir cisim koymaya eşdeğerdir.)

6.3.2 Yanıltıcı Bir Paralellik

(6.19) denklemi, Ampere yasasının orijinal şekli olan (5.48) denklemine çok benzer, sadece toplam akım yerine serbest akım ve \vec{B} yerine de $\mu_0 \vec{H}$ alınmıştır. Daha önce, \vec{D} için yaptığım uyarıyı burada \vec{H} için tekrarlamak isterim: bu bağıntıya bakıp da $\mu_0 \vec{H}$ vektörü "tıpkı \vec{B} gibi" düşünmeyin. Bir vektörün rotasyonelini bilmekle onu tam belirlemiş olmayız, diverjansı da verilmiş olmalıdır. Nitekim, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ olduğu halde, \vec{H} 'nin diverjansı sıfır olamayabilir:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (6.23)$$

¹ Eğer aynı fikirde değilseniz, A. Sommerfeld'in *Elektrodinamik* kitabından şu alıntıyı okumanızı öneririm (s.45): " \vec{H} için "magnetik alan" terimini kullanmak bir talihsizliktir ve elden geldiğince kullanmaktan kaçınılmalıdır. Bu terim, başta Maxwell olmak üzere, çok kişiyi yanıltmıştır..."

Ancak \vec{M} 'nin diverjansı sıfır olduğunda, \vec{B} ile $\mu_0 \vec{H}$ arasındaki paralellik doğru olur.

Biraz titiz olduğumu düşünüyorsanız, mıknatıs çubuk örneğine bir göz atın: Eksen doğrultusunda \vec{M} magnetizasyonu olan sonlu bir demir silindir olsun (bkz. Problem 6.9 ve 6.13). Çubukta hiçbir serbest akım yoktur ve (6.20) formülünü fazla düşünmeden uygularsanız, mıknatıs içinde $\vec{H} = 0$, ve dolayısıyla $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$ olduğu, dışarda ise $\vec{B} = 0$ olduğu sonucuna varırsınız. Oysa bu yanlıştır. Elbette $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ her yerde sıfırdır, ama diverjans sıfırdan farklıdır. (Nerede $\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \neq 0$ olduğunu söyleyebilir misiniz?) O halde, magnetik cisimlerde \vec{B} veya \vec{H} bulmanız gerektiğinde şunu yapın: Önce simetri arayın. Simetri varsa (6.20) formülünden \vec{H} doğrudan bulunur. Simetri yoksa, başka bir yol bulmalısınız; ama, ortada serbest akım yok diye $\vec{H} = 0$ olduğunu sanmayın.

6.4 LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ORTAMLAR

6.4.1 Magnetik Duygunluk ve Geçirgenlik

Paramagnetik ve diamagnetik maddelerde magnetizasyon dış magnetik alanla sağlanır; \vec{B} kalktığında \vec{M} yok olur. Eğer magnetik alan fazla şiddetli değilse, birçok maddenin magnetizasyonu uygulanan alanla orantılıdır. Bu orantıyı elektrik alandakine paralel olarak yazmamız gerekseydi, şöyle ifade edilirdi:

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B} \quad (\text{yanlış}) \quad (6.24)$$

Fakat, tarihsel alışkanlık nedeniyle, \vec{B} yerine \vec{H} ile orantı kabul edilmiştir:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (6.25)$$

Orantı katsayısı χ_m magnetik duygunluk adını alır; boyutsuz bu sabit paramagnetikler için pozitif, diamagnetikler için negatif olur. Tipik değerler 10^{-5} civarındadır (Tablo 6.1).

(6.25) bağıntısına uyan maddelere lineer ortam denir. (6.18) formülüne göre, lineer ortamda

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (6.26)$$

veya, \vec{B} de \vec{H} ile orantılı olur:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (6.27)$$

Burada ortamın magnetik geçirgenliği (permeabilite) denilen parametre

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (6.28)$$

ile tanımlanır. Boşlukta magnetizasyon olmadığı için χ_m duygunluğu sıfır ve geçirgenlik μ_0 olur. Bu nedenle μ_0 sabitine boşluğun magnetik geçirgenliği denilmiştir.

Örnek 6.3: Sonsuz solenoit (birim uzunlukta N sarım ve I akımı) içindeki bölge duygunluğu χ_m olan lineer bir maddeyle doldurulmuştur. Solenoit içinde magnetik alanı bulun.

Çözüm: Bağlı akımlar henüz bilinmediği için, \vec{B} alanını doğrudan bulamayız. Fakat bu problemde simetri olduğundan, Ampere yasasının (6.20) ifadesinde serbest akımları kullanarak doğrudan \vec{H} vektörünü bulabiliriz (Şek. 6.22):

$$\vec{H} = NI \hat{k}$$



Şekil 6.22

(\hat{k} eksen yönünde birim vektördür.) Buradan (6.26) formülüyle \vec{B} alanı bulunur:

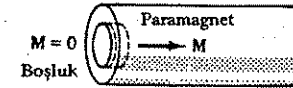
$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) NI \hat{k}$$

Ortam paramagnetik ise, magnetik alan boşluğa göre artmış, diamagnetik ise azalmış olur. Bunu görmek için, bağlı yüzey akımını hesaplayalım:

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = (\chi_m \vec{H}) \times \hat{n} = \chi_m NI \hat{\phi}$$

Gerçekten de, bağlı yüzey akımı paramagnetik ortamda ($\chi_m > 0$) I ile aynı yönde, diamagnetik ortamda ($\chi_m < 0$) ise ters yönde olur.

Ortam lineer olduğunda \vec{B} ile \vec{H} arasındaki paralellik artık doğru olacağını düşünebilirsiniz. Öyle ya, şimdi \vec{M} ve \vec{H} , \vec{B} ile orantılı olduğuna göre, bunların diverjansı da sıfır olmaz mı? Maalesef, hayır. İki magnetik ortamın arakesitinde \vec{M} 'nin diverjansı sonsuz olur. Örneğin, lineer paramagnetik çubuğun taban yüzeyinin dışında \vec{M} sıfır, içinde ise \vec{M} sıfırdan farklıdır. Şek. 6.23'de gösterilen küçük tablet yüzeyinde $\oint \vec{M} \cdot d\vec{a} \neq 0$ olup, diverjans teoremine göre, içerde $\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ sıfırdan farklı olur.



Şekil 6.23

Öte yandan, homojen lineer ortamda, bağlı akım yoğunluğu serbest akımla orantılı olur:

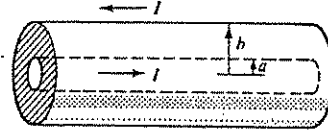
$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times (\chi_m \vec{H}) = \chi_m \vec{J}_f \quad (6.29)$$

Özel olarak, madde içinde serbest akım yoksa, tüm bağlı akımlar yüzeyde oluşurlar.

Tablo 6.1 MAGNETİK DUYGUNLUK SABİTLERİ
(1 atm ve oda sıcaklığında).

Diamagnetikler	Magnetik duygunluk	Paramagnetikler	Magnetik duygunluk
Bizmut	-16.5×10^{-5}	Oksijen	190×10^{-8}
Altın	-3.0×10^{-5}	Sodyum	0.85×10^{-5}
Gümüş	-2.4×10^{-5}	Alüminyum	2.1×10^{-5}
Bakır	-0.96×10^{-5}	Tungsten	7.8×10^{-5}
Karbon dioksit	-1.2×10^{-5}	Gadolinium	$48\,000 \times 10^{-5}$
Hidrojen	-0.22×10^{-5}		

Problem 6.15 Koaksiyal bir kablo, aralarındaki bölgede χ_m duygunlukta yalıtıcı bir madde olan, eş eksenli iki uzun silindirik tüpten oluşmuştur (Şek. 6.24). İçteki iletken-den bir yönde giden I akımı dış iletken-den geri döner; her iki yüzeyde akım düzgün dağılmıştır. Silindirler arasındaki bölgede magnetik alanı bulun. Sağlama olarak, magnetizasyonu ve bağlı akımları hesaplayıp, serbest akımlarla birlikte magnetik alanı doğru verdiklerini gösterin.



Şekil 6.24

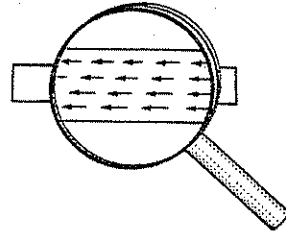
Problem 6.16 R yarıçaplı sonsuz telden I akımı geçiyor. Tel duygunluğu χ_m olan lineer bir maddeden yapılmıştır ve akım tel içinde düzgün dağılmıştır. Eksenden r uzaklıkta magnetik alan ne olur? Bağlı akımları bulun. Telden geçen toplam bağlı akım ne olur?

! Problem 6.17 Lineer magnetik maddeden yapılmış bir küre \vec{B}_0 dış magnetik alanı içine konuluyor. Küre içinde yeni magnetik alanı bulun.

Problem 6.18 Kısım 6.1.3'te incelenen ilkel diamagnetizma modelinde, bakır gibi diamagnetik bir maddenin duygunluğunu yaklaşık olarak hesaplayın. Yanıtınızı Tablo 6.1'deki değerle karşılaştırın, aradaki farkı yorumlayın.

6.4.2 Ferromagnetizma

Lineer bir ortamda atomik dipoller dışardan bir magnetik alanla yönlendirilirler. Lineer olmayan ferromagnetiklerde magnetizasyonu sürdürmek için bir dış magnetik alan gerek yoktur;² Dipollerin dizilişi kalıcıdır. Ferromagnetizma (paramagnetizma gibi) tek kalmış elektronun spin magnetik dipolünden kaynaklanır. Ferromagnetizmayı paramagnetizmadan ayıran özellik komşu dipoller arasındaki etkileşimdir: ferromagnetizmada her dipol komşusuyla "aynı yönde" olmaya meyledir. Bu tercihin açıklaması ancak kuantum mekaniğiyle yapılabilir; bu açıklamaya girmeyeceğim; bilinmesi gereken şudur: komşular arası etkileşim o kadar kuvvetlidir ki tek elektron spinlerini % 100 oranında aynı yöne çevirir. Bir demir parçasındaki dipolleri mikroskop altında "görebilme" olanağı olsaydı, tüm spinler Şek. 6.25'teki gibi gözlenirdi.



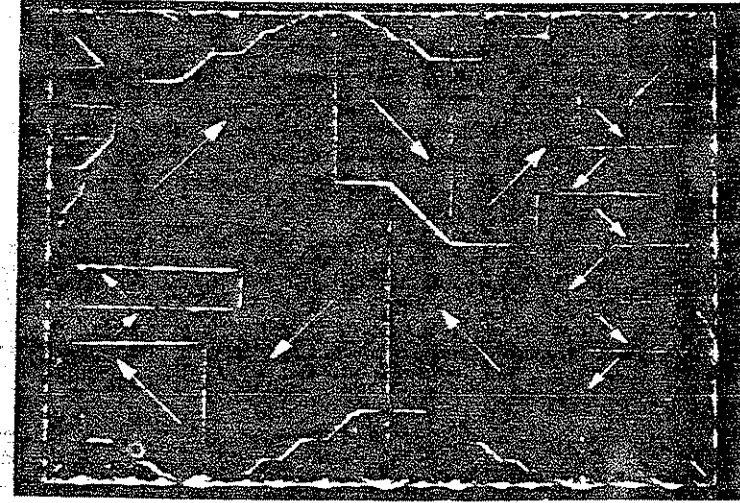
Şekil 6.25

Fakat bu doğruysa, neden her demir parçası (örneğin bir çivi veya kapı demiri) mıknatış değildir? Bunun yanıtı, spin yönelişinin domen denilen küçük bölgelerde gruplaşmasıdır. Her domende aynı yönde milyarlarca dipol bulunur (bu domenler mikroskopta özel

²Bu açıdan bakıldığında, ferromagnetiklerin duygunluğundan söz etmek belki anlamsızdır. Bu tür maddeler için bu terimler, \vec{H} vektöründeki diferansiyel artışlar için kullanılır; ayrıca sabit değil, H 'nin fonksiyonu olurlar.

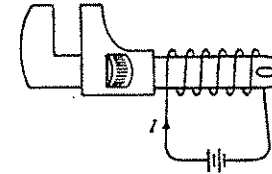
6.4. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ORTAMLAR

tekniklerle gözlenebilir—bkz. Şek. 6.26). Domenlerin kendileri ise rastgele yönlerde olurlar. Demir çivide çok sayıda domen vardır, fakat herbirinin magnetik alanı rastgele yönde olduğundan, birbirini sıfırlar.



Şekil 6.26 Ferromagnetik domenler.

Peki kalıcı bir mıknatıs nasıl yapılır? Bir İngiliz anahtarı veya çivi gibi bir demir parçasını kuvvetli bir dış magnetik alan içine koyduğumuzda, $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$ torku etkisiyle dipoller magnetik alan yönünde dönmeye zorlanırlar. Her dipol komşusuna paralel kalmak isteyeceğinden, bu torka karşı direnirler. Fakat, iki domen sınırındaki farklı yönde iki komşudan magnetik alana daha paralel olan kazanır ve çevresindekilerin yönünü değiştirir. O halde, magnetik alanın etkisi domen duvarlarını hareket ettirir. Magnetik alana paralel olan domenler büyür, diğerleri küçülür. Alan şiddeti çok büyükse tüm cisimde tek bir domen kalır ve mıknatışlığın "doyma-eriştiği" (satürasyon) söylenir. Bu süreç tümüyle tersinir olmaz, yani magnetik alan kaldırıldığında, bazı domenler tekrar rastgele yönlerde dönebilirler, fakat yine de ilk alan yönünde net bir magnetizasyon kalır. Bu artık kalıcı bir mıknatıstır.



Şekil 6.27

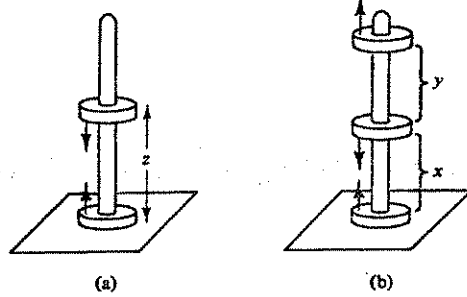
Bunu pratikte yapmanın yolu Şek. 6.27'deki gibi mıknatıslanmak istenen cismin çevresine bir bobin sarmaktır. Bobine I akımı verildiğinde (şekilde sola doğru) bir dış magnetik alan oluşur. Akım artırıldığında, magnetik alan da artar, domen duvarları harekete geçer ve magnetizasyon büyür. Sonunda doyum noktasına gelindiğinde tüm dipoller alan yönünde dönmüş olurlar (Şek. 6.28'de b noktası) ve akımın daha da artması M 'yi etkilemez.

Şimdi akımı azaltalım. M azalır, fakat $M = 0$ olan aynı noktaya dönüleceği yerde, domenlerin sadece bir kısmı rastgele yönlerde geri döndüğünden, kalıcı magnetizasyon olan c

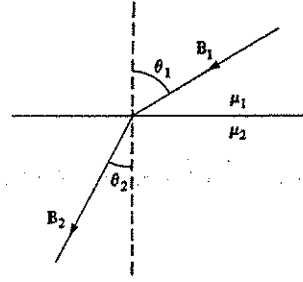
(a) Çubuk üzerine iki halka sırt-sırt (dipolleri zıt yönde) koyuluyor. Üstteki halkayı iten magnetik kuvvet, yerçekimini dengelediği için üst halka havada asılı durur. Halka hangi z yüksekliğinde dengede olur? (Yol gösterme: (6.31) formülünü kullanın.)

(b) Şimdi, alttakine paralel yönde üçüncü bir halka en üste konuluyor. Dengedeki iki halkanın yükseklikleri oranı ne olur? (Hesabı üç anlamlı rakama kadar götürün.)

(Yanıt: (a) $z = [3\mu_0 m^2 / 2\pi M g]^{1/4}$, (b) $x/y = 0.8501$)



Şekil 6.31



Şekil 6.32

Problem 6.23 İki lineer magnetik ortamın arakesitinde (Şek. 6.32), magnetik alan çizgileri farklı yönlerde olurlar. Yüzeyde serbest akım olmadığını varsayıp $\tan \theta_2 / \tan \theta_1 = \mu_1 / \mu_2$ olduğunu gösterin.

Problem 6.24 Geçirgenliği μ olan lineer dielektrik maddeden yapılmış R yarıçaplı bir kürenin merkezine \vec{m} magnetik dipolü konuluyor. Küre içinde ($r < R$) magnetik alanın

$$\frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3} + \frac{\vec{m}}{R^3(1 - 3\mu/2\mu_0)} \right\}$$

olduğunu gösterin. Küre dışında magnetik alan ne olur?

7 ELEKTRODİNAMİK

7.1 ELEKTROMOTOR KUVVETİ

7.1.1 Ohm Yasası

Elektrostatik başladığımızda yüklerin *durgun* olması gerektiğini söylemiştim. Gerçekte olay daha geneldir: *elektrostatik ve magnetostatik*, ρ ve \vec{J} zamandan bağımsız olduğunda geçerli olurlar. Örneğin, sabit açısal hızla dönen düzgün yüklü kürenin elektrik alanı, küre durgunken oluşturduğu elektrik alanla aynıdır. Sadece yükler durgunken geçerli olan tek bir elektrostatik "yasası" vardır: İletken içinde $\vec{E} = 0$ oluşu. Hatırlayalım: Eğer elektrik alan sıfır olmasaydı, iletkendeki serbest yükler harekete geçerdi; yükler durgun olduğuna göre, \vec{E} sıfır olmalıydı. Kararlı akım olduğunda, bu düşünce yöntemi geçerli olmaz; iletken içinde \vec{E} 'nin sıfır olması gerekmez.

İletken içinde yükleri hareket ettirmek için onları *itmek* gerekir. Belli bir itmeyle ne kadar ısı gidecekleri o maddenin cinsine bağlıdır. Birçok madde içinde \vec{J} akım yoğunluğu, birim yüke etkiyen \vec{f} kuvvetiyle orantılı olmaktadır:

$$\vec{J} = \sigma \vec{f} \quad (7.1)$$

Buradaki orantı sabitine o maddenin **öziletkenlik katsayısı** denir. (Elkitaplarında bu sabitin tersi olan $\rho = 1/\sigma$ **özdirenç** gösterilir. Tipik özdirenç değerleri Tablo 7.1'de verilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi, *yalıtkanlar* dahi biraz iletken olurlar, ama iletkenlerin öziletkenliği 10^{22} kat daha büyük olur. Birçok bakımdan metallere ideal iletken denir ve $\sigma = \infty$ alınabilir.)

Tablo 7.1 ÖZDİRENÇLER
(oda sıcaklığında).

İletkenler	Özdirenç (ohm-metre)	Yalıtkanlar	Özdirenç (ohm-metre)
Gümüş	1.6×10^{-8}	Saf su	2.5×10^5
Bakır	1.7×10^{-8}	Tahta	$10^8 - 10^{11}$
Altın	2.3×10^{-8}	Cam	$10^{10} - 10^{14}$
Alüminyum	2.8×10^{-8}	Kuartz	10^{13}
Nikrom	100×10^{-8}	Kükürt	2×10^{15}
Yarıiletkenler		Lastik	$10^{13} - 10^{16}$
Silisyum	0.03 - 0.04		
Doymuş tuzlu su	0.044		
Germanyum	0.46		

İlke olarak, akımı oluşturmak üzere yükleri iten kuvvet değişik kaynaklı olabilir—kimyasal veya yerçekimsel kuvvet, veya eğilmiş karıncalar. Burada elektromagnetik türden

bir kuvvet olduğunu varsayacağız. Buna göre, (7.1) denklemi şöyle olur:

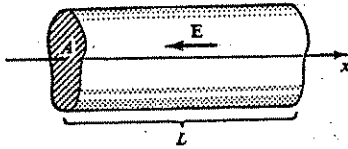
$$\vec{J} = \sigma \frac{\vec{F}}{q} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.2)$$

Genel olarak, iletken içinde yüklerin hızı küçük olduğundan, ikinci terim yok sayılabilir:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (7.3)$$

(Bazı durumlarda, örneğin plazma içinde \vec{J} kuvvetinin magnetik bileşeni önemli olabilir.) Bu denklem Ohm yasası adını alır.

Örnek 7.1: Kesiti A ve uzunluğu L olan silindirik bir tel (kesitin dairesel olması gerekmez), iletkenliği σ olan bir maddeden yapılmıştır (Şek. 7.1). Telin uçları arasına V potansiyel farkı uygulandığında geçen akımı bulun.

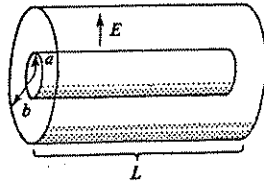


Şekil 7.1

Çözüm : Tel içinde elektrik alanın düzgün olduğunu varsayın (birazdan bunu ispat edeceğim). (7.3) formülüne göre, akım yoğunluğu da düzgün olacaktır. Buna göre, akım hesaplanır:

$$I = JA = \sigma EA = \sigma A \frac{V}{L}$$

Örnek 7.2: Yarıçapları a ve b olan eş eksenli iki uzun silindir arası iletkenliği σ olan bir maddeyle doludur (Şek. 7.2). Silindirler arasında V potansiyel farkı olduğunda, L uzunlukta bir bölgede birinden diğerine geçen akım ne kadardır?



Şekil 7.2

Çözüm : Silindirler arasındaki bölgede elektrik alan

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

olup λ iç silindirdeki boyca yük yoğunluğudur. Buradan akım hesaplanır:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{a} = \sigma \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \sigma \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Buradaki integral içteki silindiri örten herhangi bir kapalı yüzey üzerinde olur ve son eşitlikte Gauss yasası kullanılmıştır. Öte yandan, silindirler arasındaki potansiyel farkı hesaplanırsa

$$V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

olur. Bu iki bağıntı arasından λ elenerek akım bulunur:

$$I = \frac{2\pi\sigma L}{\ln(b/a)} V$$

Bu örneklerden görüldüğü gibi, bir elektrottan diğerine geçen akım aralarındaki potansiyel farkıyla orantılı olmaktadır. Pratikte bu ilişki şöyle yazılır:

$$V = RI \quad (7.4)$$

Bu, Ohm yasasının en bilinen versiyonudur. Orantı katsayısına **direnç** denir; direnç hem maddenin cinsine, hem de elektrotları birleştiren ortamın geometrik biçimine bağlıdır. (1. örnekte $R = (L/\sigma A)$ ve 2. örnekte $R = \ln(b/a)/2\pi\sigma L$.) Direnç birimi volt/ampere veya ohm (Ω) olur.

Öziletkenliği her yerde sabit olan bir madde içinde

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

olur (kararlı akımlar için $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ olduğunu hatırlayın). Gauss yasasına göre $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, yani madde içinde yük yoğunluğu sıfırdır. Nötrlenmemiş yükler ancak **yüzeyde** olabilir. (Bu sonucu haftalar önce elektrostatikte ispat etmiştik; yükler hareket ettiğinde bu sonuç yine geçerli olmaktadır, ama başka nedenlerden dolayı.) Özel olarak, iletken içinde Laplace denklemi hala geçerli olup, Bölüm 3'te öğrendiğimiz potansiyel hesaplama teknikleri burada da kullanılabilir.

Örnek 7.3: Örnek 7.1'de tel içinde elektrik alanın düzgün olduğu varsayılmıştı. Bunu ispat edin.

Çözüm : Silindir içinde V potansiyeli Laplace denklemini sağlıyordu. Peki sınır koşulları nelerdir? İki uç arasındaki potansiyel farkı bellidir; sol uçtakini sıfır ve sağdakini V_0 alalım. Silindir yüzeyinden dışa doğru yük kaçımadığına göre, yanal yüzeyde $\vec{J} \cdot \hat{n} = 0$ olmalıdır; buna göre, yanal yüzeyde $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ ve dolayısıyla $\partial V / \partial n = 0$ olur. Tüm yüzeylerde potansiyel veya normal türevi belirtilmiş olduğuna göre, içerdeki potansiyel için tek çözüm vardır (Problem 3.4). Laplace denklemini ve bu koşulları sağlayan bir potansiyeli tahmin etmek kolaydır:

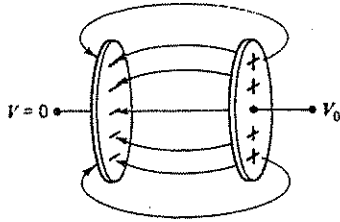
$$V(x) = V_0 \frac{z}{L}$$

Burada z silindir eksenli yönündedir. Tek çözüm teoremi bu ifadenin aranan çözüm olduğunu garanti eder. Buna karşılık gelen elektrik alan

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{V_0}{L} \hat{k}$$

olup, silindir içinde düzgündür.

Dikkat ederseniz, aradaki iletken kaldırıldığında (yani, iki uçta birer metal levha olduğunda), elektrik alan çok daha karmaşık yapıda olur ve problemin çözümü çok daha zordur (Şek. 7.3). Bizim örneğimizde yükler, ara bölgede düzgün elektrik alan olacak şekilde, levhalar üzerinde yeni bir dağılım oluştururlar.



Şekil 7.3

Fizikte Ohm yasasından daha meşhur bir yasa var mıdır bilmem; ama bu, Gauss yasası veya Ampere yasası gibi, gerçek bir yasa değildir. Bu, birçok maddenin uyduğu deneysel bir gözlem, veya makroskopik bir kuraldır. Aslında biraz düşünürseniz, maddelerin Ohm yasasına uyuyor olması şaşılacak bir şeydir. Düşünsenize, bir \vec{E} alanı q yükü üzerine $q\vec{E}$ kuvveti uyguladığında, Newton hareket yasasına göre yük ivmelenmelidir. Yükler ivmeleniyorsa, akım giderek daha da artmaz mı? Ohm yasasına göre, sabit elektrik alanda sabit akım, dolayısıyla sabit hız oluşmaktadır. Bu durum Newton yasasıyla çelişmiyor mu?

Hayır, çünkü unuttuğumuz bir şey daha var: elektronlar tel içinde giderken çarpışmalar olur. Düz bir yolda arabayla giderken her kavşakta kırmızı ışığa rastladığınızı düşünün; her defasında yeniden ivmelenmek zorunda kalırsınız. İki ışık arasında devamlı ivmelandiğiniz halde, ortalama hızınız sabit kalır. İki ışık arasındaki uzaklık λ ve ivmeniz a ise, bu yolu gidiş süresi

$$t = \sqrt{\frac{2\lambda}{a}}$$

ve ortalama hız şöyle olur:

$$v_{\text{ort}} = \frac{1}{2}at = \sqrt{\frac{\lambda a}{2}}$$

Maalesef, bu sonuç da bir işe yaramaz. Hız ivmenin kareköküyle orantılı olursa, iletken içindeki elektronların hızı (yani, akım) elektrik alanın kareköküyle orantılı olur! Fakat öykü daha bitmedi: Elektrik alan olmadığı zaman bile, ısısal enerjilerinden dolayı, yüklerin hızları çok büyüktür. Isısal hızlar rastgele yönlerde olduğundan, ortalamaları sıfır olur ve akıma katkıda bulunmazlar. Burada ilgilendiğimiz “sürüklenme” hızı çok daha küçük bir hızdır. Buna göre, iki çarpışma arasındaki süre çok daha kısa olur:

$$t = \frac{\lambda}{v_{\text{isi}}}$$

Buna göre,

$$v_{\text{ort}} = \frac{1}{2}at = \frac{a\lambda}{2v_{\text{isi}}}$$

olur. Birim hacimde N molekül ve her molekülde f sayıda serbest elektron varsa (yükü q ve kütlesi m), akım yoğunluğu şöyle olmalıdır:

$$\vec{J} = Nfq\vec{v}_{\text{ort}} = \frac{fNq\lambda}{2v_{\text{isi}}} \frac{\vec{F}}{m} = \left(\frac{fN\lambda q^2}{2mv_{\text{isi}}} \right) \vec{E} \quad (7.5)$$

Parantez içindeki iletkenlik ifadesinin pek doğru bir model olduğunu iddia edemem, ama iletkenliğin yük yoğunluğuyla doğru ve sıcaklıkla ters orantılı olduğunu verebilmektedir. (İletkenliğin tam açıklaması kuantum mekanikliğiyle yapılabilir.)

Metallerin iletkenliği, diğer maddelere kıyasla, o kadar büyüktür ki birçok yerde sonsuz alabiliriz. Bu yaklaşıklıkta metal içinde $\vec{E} = 0$ ve metal yüzeyi eşpotansiyel yüzey

olur. Örneğin, devre analizlerinde değişik elemanları bağlayan tellerdeki küçük potansiyel düşüşünü yok sayarız; eğer devrede bir direnç gerekiyorsa, az iletken maddeden yapılmış dirençler bağlanır.

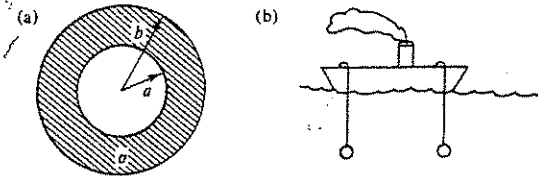
İletken içindeki çarpışmalar sonucu, elektriksel kuvvetin yaptığı iş sonunda ısıya dönüşür. Birim yük üzerinde yapılan iş V ve birim zamanda geçen yük I olduğuna göre, harcanan güç

$$P = VI = RI^2 \quad (7.6)$$

olur ve Joule ısısı adını alır. I birimi ampere, R birimi ohm alındığına, P birimi watt (joule/saniye) olarak çıkar. İletken içinde elektrik alanın sıfırdan farklı olduğu genel durumda (7.3) formülü kullanılır. Güç=kuvvet×hız olduğundan:

$$P = \int (\rho \vec{E}) \cdot \vec{v} d\tau = \int \vec{E} \cdot \vec{J} d\tau = \sigma \int E^2 d\tau \quad (7.7)$$

Problem 7.1 Yarıçapları a ve b olan eş merkezli iki küre arasındaki bölge, iletkenliği σ olan az iletken bir maddeyle doludur (Şek. 7.4a).

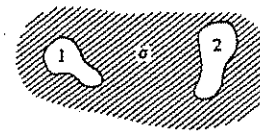


Şekil 7.4

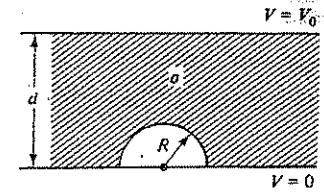
(a) Küreler arasındaki potansiyel farkı V ise, küreler arasındaki akım ne olur?

(a) Küreler arasındaki direnç ne kadardır?

(c) $b \gg a$ olduğunda, b yarıçapının önemsiz olduğuna dikkat edin. Buna göre, herbirinin yarıçapı a olan ve birbirinden çok uzakta deniz suyuna batırılmış iki küre (Şek. 7.4b) arasındaki potansiyel farkı V ise, geçen akım ne olur? (Bu düzenek deniz suyunun iletkenliğini ölçmekte kullanılabilir.)



Şekil 7.5



Şekil 7.6

Problem 7.2 (a) İki metal cisim iletkenliği σ olan zayıf iletken bir ortama konulmuşlardır (Şek. 7.5). Bu sistemin direnci ile sığası arasındaki ilişkinin

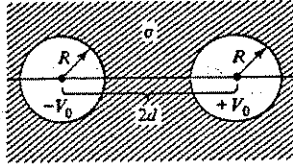
$$R = \frac{\epsilon_0}{\sigma C}$$

olduğunu gösterin.

(b) 1. ve 2. iletken arasına bir batarya bağlanıp V_0 potansiyel farkı sağlanıyor. Daha sonra batarya kaldırıldığında, yükler dereceli olarak azalacaktır. $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ olduğunu gösterin ve τ “zaman sabiti”ni ϵ_0 ve σ cinsinden bulun.

Problem 7.3 Geniş yüzeyli iki metal levha, biri sıfır diğeri V_0 potansiyelde olmak üzere, birbirinden d uzaklıkta paralel olarak tutuluyor (Şek. 7.6). R yarıçaplı metal bir yarımküre ($R \ll d$) topraklı levhaya yapıştırılıyor (yani, bunun da potansiyeli sıfırdır). Levhalar arasındaki bölge iletkenliği σ olan zayıf iletken bir maddeyle doldurulduğunda, yarımküreden içeri giren akım ne kadar olur? (Yol gösterme: Örnek 3.8'e bir göz atın.) (Yanıt: $I = (3\pi R^2 \sigma / d) V_0$)

Problem 7.4 Herbirinin yarıçapı R olan iki uzun silindirik boru birbirinden $2d$ uzaklıkta paralel olarak tutuluyor (Şek. 7.7). Borulardan biri V_0 , diğeri $-V_0$ potansiyelde tutuluyor. Boruların çevresi iletkenliği σ olan zayıf iletken bir maddeyle çevrilidir. Boruların birinden diğerine, birim uzunluk başına geçen akımı hesaplayın. (Yol gösterme: Problem 3.10'a bakın.),



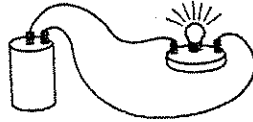
Şekil 7.7

7.1.2 Elektromotor Kuvveti

İletken bir ortam içinden yük geçirmek için bir kuvvet gerektiğini gördük. Ohm yasasının genel ifadesi şöyleydi:

$$\vec{J} = \sigma \vec{f}$$

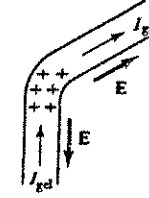
Burada \vec{f} birim yüke etkiyen kuvvettir. Şek. 7.8'deki gibi tipik bir devre. Örneğin bataryaya bağlı bir ampul gözönüne aldığımızda, tuhaf bir sorunla karşılaşırız: Bir t anında devrenin her yerinde akım aynıdır—yani, bataryadan çıkışta 2.3 A iken ampulde 0.7 A değildir. Yükleri iten kuvvet batarya içinde (bir tür kimyasal süreç bataryadan dışarı yükleri iter) olduğuna göre, neden akım her yerde aynı olsun? İlk bakışta, batarya çıkışında büyük bir akım olması, ampulde ise hiç akım olmaması daha makul görünmektedir. Devrenin geri kalan kısımlarında itici kuvvet nereden kaynaklanır, ve bu itme her kesitte nasıl aynı akımı sağlayabiliyor? Öte yandan, bir telde yüklerin kaplumbağa hızıyla ilerlediğini biliyoruz (Problem 5.22); düğmeyi çevirdikten sonra ampulün aydınlanması nasıl bu kadar çabuk olabiliyor?



Şekil 7.8

Yanıt: Akım her yerde aynı olmasaydı, bir yerlerde yük birikmesi gerekirdi ve—burası önemli—biriken yükün elektrik alanı akımı düzenleyici yönde olurdu. Örneğin, Şek. 7.9'daki dönemeçte giren akım çıkan akımdan büyük gösterilmiştir. Bu durumda "dirsek" bölgesinde yükler birikiyor demektir. Bu yüklerin elektrik alanı dirsekten dışa doğru olur. Bu alan giren akıma karşı koyar ve çıkan akımı hızlandırır. Sonunda iki akım eşit olduğunda, dirsekte birikmiş yük kalmaz ve denge sağlanır. Bu, kendi kendini düzenleyen şahane bir sistemdir ve tüm bu süreç o kadar kısa zamanda olur ki, pratik olarak, devrenin her yerinde akım aynı olur.

Bu incelemeye göre, gerçekte bir devrede akımı sürdüren iki kuvvet vardır: devrenin bir bölgesinde (yani, bataryada) yerleşmiş \vec{f}_s kaynak kuvveti; diğeri de akışı düzenleyen ve



Şekil 7.9

kaynağın etkisini devrenin uzak yerlerine ileten elektrostatik kuvvet:

$$\vec{f} = \vec{f}_s + \vec{E} \quad (7.8)$$

\vec{f}_s kuvvetinin değişik birçok kaynağı olabilir. Bataryada bu kimyasal kuvvettir; piezoelektrik kristalde mekanik basıncı; termokupl aygıtında sıcaklık gradyanıdır; fotoselde ışıktır; Van de Graaff jeneratöründe elektronlar resmen yürüyen bir merdivene bindirilip taşınır. Mekanizma ne olursa olsun, bunun net etkisi \vec{f} 'nin kapalı devredeki integraliyle verilir:

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_s \cdot d\vec{l} \equiv \mathcal{E} \quad (7.9)$$

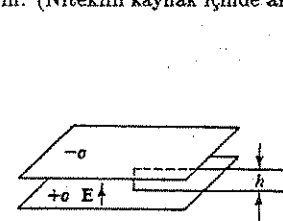
\mathcal{E} bir devrede elektromotor kuvveti veya emk adını alır. (Bu terim pek doğru sayılmaz; çünkü bu bir kuvvet değil, birim yük üzerindeki kuvvetin integralidir.) Elektrostatik alan için $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ olduğundan, \mathcal{E} 'yi hesaplamak \vec{E} alanını katıp katmamak bir şey değiştirmez.

Bu elektromotor kuvveti, bir devreden geçen akımı belirleyen başlıca büyüklüktür:

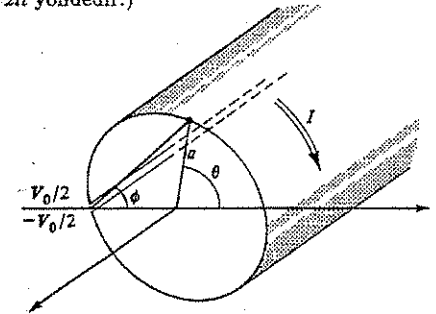
$$\mathcal{E} = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{(I/a)}{\sigma} dl = I \oint \frac{dl}{a\sigma} = IR \quad (7.10)$$

Burada R devrenin toplam direnci ve a telin kesitidir. Bu şekilde bakıldığında \mathcal{E} , kaynak tarafından birim yük başına yapılan iş olur.

Problem 7.5 (a) Sadece elektrostatik kuvvetlerle bir devrede akım sürdürülemediğini gösterin. (Nitekim kaynak içinde akım \vec{E} 'ye zıt yöndedir.)



Şekil 7.10



Şekil 7.11

(b) Dikdörtgen bir tel çerçevesinin bir kenarı düzlem kapasitörün levhaları arasına ve $E = \sigma\epsilon_0$ elektrik alanına paralel konulmuştur (Şek. 7.10). Çerçevesinin diğer kenarları (elektrik alanın sıfır alındığı) dış bölgededir. İçerde kalan tel uzunluğu h ve direnci R ise, geçen akım ne olur? Açıklayın.

Problem 7.6 Bir devrede elektrostatik \vec{E} alanının hesaplanabileceği şöyle bir düzenek vardır: Sonsuz uzunlukta, a yarıçaplı ve öz direnci düzgün olan sonsuz silindirik boru düşünün (Şek. 7.11). $\theta = \pm\pi$ olan yerde, silindir boyunca ince bir yarık açılmış ve iki uca $\pm V_0$ potansiyelleri uygulanmıştır (bu, bataryaya karşılık gelir). Ohm yasasına göre şöyle yazılabilir:

$$V(a, \theta) = \frac{V_0}{2\pi} \quad (-\pi < \theta < +\pi)$$

(a) Silindirik koordinatlarda değişken ayırımı yöntemini kullanarak, silindir içinde ve dışında $V(r, \theta)$ potansiyelini bulun. (Yanıt: $r < a$ için $V_0 \phi / \pi$; $r > a$ için $(V_0 / \pi) \arctan[a \sin \theta / (a + a \cos \theta)]$)

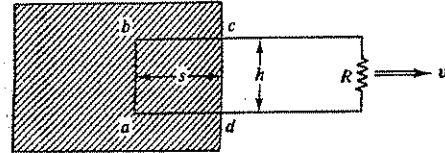
(b) Silindir yüzeyindeki yük yoğunluğunu bulun. (Yanıt: $(\epsilon_0 V_0 / \pi a) \tan \phi$)

7.1.3 Hareket Kaynaklı Emk

Bir devrede olabilecek elektromotor kuvveti kaynaklarının neler olabileceğini (örneğin, batarya) yukarıda sıralamıştım. Şimdi çok kullanılan diğer bir emk kaynağından sözedeceğim: *jeneratör*. Jeneratörler *hareket kaynaklı emk* oluştururlar, yani magnetik alanda bir telin hareketiyle meydana gelir. Şek. 7.12'de ilkel bir jeneratör şeması görülmektedir. Taralı bölgede kağıt içine doğru düzgün \vec{B} alanı olup, R içinden akım geçmesini istediğimiz bir direnç (örneğin, lamba) olur. Çerçeve sağa doğru v hızıyla çekildiğinde telin ab kısmındaki yükler üzerinde aşağı yönde qvB kuvveti ve dc iayısıyla devrede saat yönünde bir akım oluşur. Emk değeri şöyle hesaplanabilir:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{f}_{\text{mag}} \cdot d\vec{l} = vBh \quad (7.11)$$

Burada h çerçevenin yüksekliğidir. (Yatay bc ve ad kenarlarındaki kuvvetler tele dik olduğundan katkıda bulunmazlar.)



Şekil 7.12

Emk oluşumu magnetik alandan kaynaklanan bu basit düzende bir çelişki var gibidir: çünkü magnetik kuvvetler iş yapmazlar. Peki işi kim yapıyor? Yanıt: Teli çeken kişi! Akım geçerken ab kenarındaki yüklerin, yatay \vec{v} hızına ek olarak, düşey yönde de bir hızları vardır (buna \vec{u} diyelim). Buna göre, magnetik kuvvetin yatay yönde sola doğru bir qvB bileşeni olacaktır. Teli çeken kişi bu kuvveti yenebilmek için, birim yük başına şu kadar bir kuvveti sağa doğru uygulamalıdır (Şek. 7.13a):

$$f_{\text{çek}} = uB$$

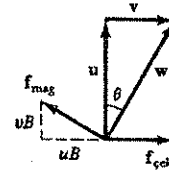
Bu kuvvet tel tarafından yüke iletilir. Böylece yükün bileşke \vec{w} hızı yönünde aldığı yol ($h / \cos \theta$) olur. Birim yük başına yapılan iş

$$\int \vec{f}_{\text{çek}} \cdot d\vec{l} = (uB) \left(\frac{h}{\cos \theta} \right) \sin \theta = Bvh$$

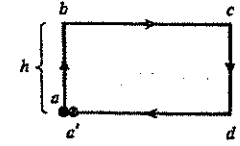
olur ($\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ skaler çarpımından gelir). Görüldüğü gibi, integraller farklı yollarda alındığı halde (Şek. 7.13b ve c), yapılan iş emk 'ye tam eşittir: $\vec{f}_{\text{çek}}$ tele dik olduğundan

7.1. ELEKTROMOTOR KUVVETİ

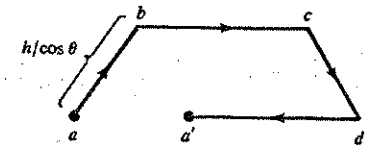
emk'ye katkıda bulunmaz; \vec{f}_{mag} ise yükün hareketine dik olduğundan yapılan işe katkıda bulunmaz.



(a) Teldeki bir yük üzerindeki kuvvetler



(b) \mathcal{E} nin hesaplandığı integral yolu. Sadece ab kenarı katkıda bulunur.



(c) İşin hesaplandığı integral yolu. Sadece ab kenarı katkıda bulunur.

Şekil 7.13

Hareketli çerçevede oluşan emk ifadesini daha güzel yazmanın bir yolu vardır: Çerçeve içinden geçen magnetik akıyı Φ ile gösterebiliriz:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (7.12)$$

Şek. 7.12'deki dikdörtgen çerçeve için

$$\Phi = Bhs$$

olur. Çerçeve hareket ederken akı azalır:

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bh \frac{ds}{dt} = -Bhv$$

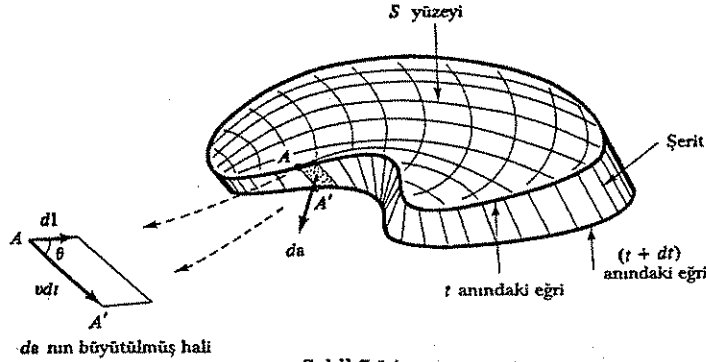
(Eksi işaret ds/dt nin negatif oluşundan gelir.) Bu ise (7.11) denklemindeki emk ifadesidir. Tabii oluşan emk, çerçeveden geçen akıdaki değişim hızının tersi olacaktır:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.13)$$

Hareket kaynaklı emk için **akı kuralı** denilen bu ifadenin güzelliği, basit oluşu yansın, düzgün *olmayan* magnetik alanlarda hareket eden dikdörtgen *olmayan* çerçevelere de uygulanabilir olmasıdır.

Akı kuralının statik magnetik alanda hareketli çerçeve için genel ispatı. Şek. 7.14'de rastgele bir çerçevenin t anındaki ve dt kadar sonraki konumu gösterilmiştir. t zamanındaki akıyı S yüzeyi üzerinde hesaplayalım. $t + dt$ zamanındaki akı, bu S yüzeyine ek olarak, ince bir şerit üzerinde daha hesaplanmalıdır. Buna göre, akıdaki *değişim*

$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) = \Phi_{\text{şerit}} = \int_{\text{şerit}} \vec{B} \cdot d\vec{a}$$



Şekil 7.14

olur. Çerçeve üzerindeki A noktasına bakalım: Bu nokta dt zaman sonra A' olacaktır. Telin A noktasındaki hızı \vec{v} , A' daki yükün tel boyunca hızı \vec{u} ise $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ hızı A daki yükün bileşke hızı olur. Şerit üzerindeki sonsuz küçük yüzey parçasının alanı şöyle yazılabilir (bkz. Şek. 7.14'deki yan şekil):

$$d\vec{a} = (\vec{v} \times d\vec{l}) dt$$

Buna göre, toplam akıdaki değişme

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l})$$

olur. $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$, ve $d\vec{l}$ elemanı \vec{u} 'ya paralel olduğundan

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{B} \cdot (\vec{w} \times d\vec{l})$$

yazabiliriz. Üçlü skaler çarpımın sıra değiştirme kuralını hatırlayalım:

$$\vec{B} \cdot (\vec{w} \times d\vec{l}) = -(\vec{w} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Buradan

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint (\vec{w} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

bulunur. $\vec{w} \times \vec{B}$ çarpımı birim yük üzerindeki \vec{f}_{mag} magnetik kuvvetidir:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint \vec{f}_{\text{mag}} \cdot d\vec{l}$$

mag 'nin integrali emk'nin tanımı olduğundan ispat tamamdır:

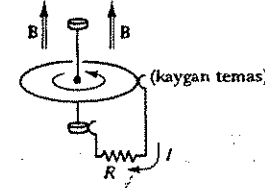
$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Emk 'nin (7.9) denkleminde yapılan integral tanımında işaret sorun olabilir: Kapalı devre üzerinde hangi yönde gidilmelidir? (7.12) denklemindeki \mathcal{E} tanımında da aynı işaret sorunu vardır: $d\vec{a}$ 'nın pozitif yönü hangisidir? Akı kuralını uygularken işaret sağ-el kuralıyla bulunur: dört parmağınız çerçevedeki akım yönünde kıvrıldığında, başparmak $d\vec{a}$ yönünü gösterir. Hesap sonucu emk eksi çıkıyorsa, akım ters yöndeymiş demektir.

7.1. ELEKTROMOTOR KUVVETİ

Akı kuralı hareket kaynaklı emk bulmada en kestirme yoldur. Fiziksel içeriğinde yeni bir şey yoktur—sadece Lorentz kuvveti. Bazen akı kuralıyla çözülemeyen hareket kaynaklı emk 'ye rastlayabilirsiniz. İşte bir örnek:

Örnek 7.4 : Dikey yönde düzgün \vec{B} magnetik alanı içinde, metal bir disk dikey bir eksen etrafında dönmektedir. Eksene bağlı bir telin ucuna R direnci bağlanmış, diğer bir tel diskin dönen dış kenarına bağlanarak kapalı bir devre oluşturulmuştur (Şek. 7.15). Devreden geçen akımı bulun.

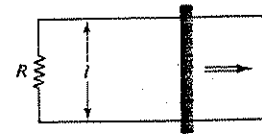


Şekil 7.15

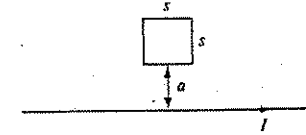
Çözüm : Burada tuhaf bir durum var: devre içinden geçen magnetik akı değişmezmiş gibi geliyor. O halde akım nasıl oluşur? Akı kuralında akımın belirli bir yol izlediği varsayımı yapılmaktadır. Oysa bu örnekte akım tüm disk yüzeyine yayılmaktadır. Burada emk 'nin Lorentz kuvvetiyle hesaplanmasını size bırakıyorum (Problem 7.9).

Problem 7.7 Kütlesi m olan metal bir çubuk, aralarında l uzaklığı olan paralel iki iletken ray üzerinde kayabilmektedir (Şek. 7.16). Rayların bir tarafı R direnci ile birleştirilmiştir. Tüm sistem sayfa içine yönelik düzgün \vec{B} magnetik alanı içindedir.

- Çubuk sağa doğru v hızıyla giderken dirençten geçen akım ve yönü ne olur?
- Çubuk üzerindeki magnetik kuvvet ve yönü ne olur?
- Çubuk t = 0 anında v_0 hızıyla itilip bırakılırsa, daha sonraki bir t anında hızı ne olur?
- Çubuğun $\frac{1}{2}mv_0^2$ olan ilk kinetik enerjisi nereye gider? Devrenin başka bir yerinde kazanılan enerjinin tam $\frac{1}{2}mv_0^2$ olduğunu, dolayısıyla bu hareket sırasında enerjinin korunduğunu gösterin.



Şekil 7.16



Şekil 7.17

Problem 7.8 I akımı geçen sonsuz doğrusal telin yakınında, bir kenarı s olan kare çerçeve bulunmaktadır (Şek. 7.17).

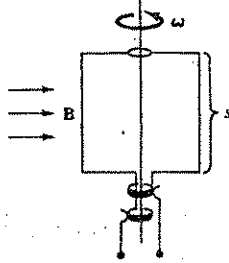
- Çerçeve içinden geçen magnetik akıyı bulun.
- Çerçeve tele dik olarak v hızıyla uzaklaştığında, oluşan emk ne kadardır? Akım hangi yönde oluşur?
- Çerçeve aynı hızla sağa doğru çekilmiş olsaydı, (b) şıkkının yanıtı nasıl olurdu?

Problem 7.9 Şek. 7.15'teki diskin yarıçapı a ve dönme hızı ω olsun. Devrede oluşan emk ve dirençten geçen akım ne kadardır?

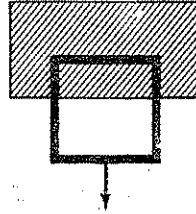
Problem 7.10 Aynı bir çerçeve üzerine sonsuz sayıda yüzey gerilebilir. Oysa, bir çerçeveden geçen $\oint \vec{B} \cdot d\vec{a}$ akısının hangi yüzeyde hesaplanacağını belirtmedim. Bu

görünürdeki unutkanlığımı yorumlayın.

Problem 7.11 Bir kenarı s olan kare çerçeve düşey bir eksen etrafında ω açısal hızıyla döndürülmektedir (Şek. 7.18). Bölgede sağa doğru düzgün \vec{B} magnetik alanı vardır. Bu alternatif akım jeneratörünün emk 'ini hesaplayın. (Sonuç elbette t zamanının fonksiyonu olacaktır.)



Şekil 7.18



Şekil 7.19

Problem 7.12 Kalın bir alüminyum levhadan kare şeklinde bir çerçeve kesilip çıkarılmıştır. Çerçevenin üst kısmı, şekilde taralı gösterilen bölgede sayfa içine doğru düzgün \vec{B} magnetik alanı içine konulup serbest düşmeye bırakılıyor (Şek. 7.19). Magnetik alan şiddeti 1 tesla ise, çerçevenin limit hızını bulun. Çerçevenin hızını zamanın fonksiyonu olarak bulun. Çerçeve limit hızın % 90'ına erişinceye kadar geçen zaman ne olur? Çerçeve düşerken bir kenarı kesilip devre açılırsa ne olur? (Not: Çerçevenin boyutları hesap sonunda sadeleşecektir.)

7.2 FARADAY YASASI

7.2.1 Elektromagnetik İndüksiyon

Bir önceki kısımda, sabit magnetik alan içinde iletken bir çerçeveyi hareket ettirdiğimizde oluşam emk için akı kuralı şöyle bulunmuştu:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Peki, çerçeveyi sabit tutup mıknatısı zıt yönde hareket ettirsek ne olur? Aynı emk'nin oluştuğunu söylersem herhalde pek şaşırmazsınız—önemli olan çerçeve ile mıknatısın *bağıl hareketidir*. Gerçekten de, özel görelilik teorisine göre, bunun böyle olması gerekir. Bu durum deneysel olarak Faraday tarafından gözlemlendiğinde, görelilik teorisi daha ortada yoktu; klasik elektromagnetik teori çerçevesinde bu olgu önemli sonuçlar doğurur. Eğer çerçeve hareket ediyorsa emk magnetik kuvvet tarafından oluşturulur; fakat çerçeve durgunken *mıknatıs* hareket ediyorsa kuvvet magnetik kökenli olamaz—durgun yükler üzerinde magnetik kuvvet yoktur. Bu durumda, itici kuvvet nereden kaynaklanır? Duran yüklere kuvvet uygulayan bu alan nasıl bir alandır? Yanıt: bir *elektrik alan*! Ama *elektrostatik* türden değil, çünkü elektrostatik alanın emk oluşturamayacağını biliyoruz ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$). Bu yeni tür elektrik alan mıknatısın hareket ediyor olmasından, yani magnetik alanın değişiyor olmasından kaynaklanmalıdır. O halde, *değişen magnetik alan bir elektrik alan oluşturur*.

Bu emk durgun magnetik alanda hareket eden çerçevenin emk 'sine eşit olduğuna göre,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.14)$$

7.2. FARADAY YASASI

olur. Bu, Faraday yasasının integral ifadesidir. Bunun diferansiyel ifadesini Stokes teoremi yardımıyla kolayca bulabiliriz:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Yüzey integrallerinin eşitliğinden sonuç yazılabilir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.15)$$

Eğer magnetik alan sabitse, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ veya $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ olur, yani statik durumu elde ederiz.

Yukarda sözettiğim iki deney aynı formülü ($\mathcal{E} = -d\Phi/dt$) sağladıkları için birbirlerine eşdeğer gibi görünse de, fiziksel açıklamaları tümenden farklıdır: Çerçeve hareket ettiğinde, Lorentz kuvveti oluşur ve emk *magnetik* kuvvetten kaynaklanır. Mıknatıs hareket ettiğinde ise, Faraday yasasına göre, emk *elektriksel* kuvvetten kaynaklanır. Bu açıdan bakıldığında, iki farklı sürecin aynı emk 'ye yol açması gerçekten şaşırtıcıdır. Einstein'ı görelilik teorisini bulmaya iten, klasik elektromagnetik teorideki bu "rastlantı" idi. Fakat bu öyküyü Bölüm 10'da dinleyeceğiz.

Hareket kaynaklı emk ile Faraday emk'si arasındaki paralellliği gösterebilmek için, ikinci deneyde mıknatısın hareket ettiğini söyledim. Oysa, \vec{B} 'deki değişimin nedeni ne olursa olsun, Faraday yasası geçerlidir: Bu değişim mıknatısın hareketinden kaynaklanabilir; veya, mıknatısın şiddeti değişebilir (birileri solenoitteki akımı kurcalıyor olabilir). İletken çerçeve magnetik alanın *neden* değiştiğini bilemez. Önemli olan, çerçeve içinden geçen magnetik akımın değişmesidir. Böyle olduğunda, magnetik alan değişmesine eşlik eden bir elektrik alan oluşur.

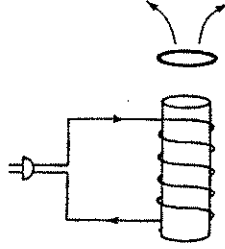
Faraday yasasındaki eksi işaretini doğru kullanmak bazan insanı uğraştırabilir. Bunu kolaylaştırmak üzere **Lenz kuralı** denilen bir yol vardır:

İndüksiyon yoluyla oluşabilecek akım, kendisini doğuran magnetik akıdaki değişikliğe karşı koyacak yönde olur.

Akı azalıyorsa, oluşan akımın magnetik alanı, akıyı artıracak yönde olur; akı artıyorsa akım ters yönde oluşur. Dikkat edin: indüksiyon akımı, akımın *kendisine* değil, akıdaki *değişmeye* karşıdır. Faraday indüksiyonu bir tür "eylemsizlik olayı"dır: İletken bir çerçeve kendi içindeki akımın sabit olmasını ister. Akı değiştiğinde, çerçeve bu değişmeye karşı koyacak yönde bir akım oluşturarak yanıt verir. (Çerçeve bunu tam olarak başaramaz; indüksiyon akımı orijinal akımın sadece bir kesri kadar olur; Lenz kuralı sadece akımın *yönünü* belirtir.

Örnek 7.5: Zıplayan halka deneyi. Demir bir çubuğun etrafına solenoit şeklinde tel sarılır (demirin görevi magnetik alanı artırmaktır) ve üst tarafına metal bir halka yerleştirilir (Şek. 7.20). Solenoide akım verildiğinde halkanın birkaç metre havaya zıpladığı görülür. Neden?

Çözüm: Akım vermeden önce halka içindeki akı sıfırdır. Sonra halka içinden (şekilde yukarı yönde) geçen magnetik akıdan dolayı bir indüksiyon emk'si, ve dolayısıyla indüksiyon akımı



Şekil 7.20

oluşur. Lenz kuralına göre, akımın yönü öyle olmalıdır ki, bunun manyetik alanı halka içindeki ilk akıyı azaltacak şekilde olsun. O halde, indüksiyon akımı solenoidteki akıma zıt yönde olur. Zıt yöndeki akımlar birbirini ittiğinden, halka havaya fırlar.

Değişken bir manyetik alanın yol açtığı indüksiyon elektrik alanını hesaplamak için, Faraday yasası ile Ampere yasası arasındaki benzerlikten yararlanılır. Faraday yasasını yazalım:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ve, Ampere yasasını yazalım:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Elbette sadece rotasyonelden elektrik alanı bulamayız; diverjansını da bilmek gerekir. Fakat, \vec{E} alanı sadece Faraday indüksiyon alanı ise, yani \vec{B} 'deki değişmeden kaynaklanıyorsa, ortamda serbest yük yoğunluğu olmaz ve Gauss yasasına göre:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

olur. Manyetik alan için diverjans daima sıfırdır:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Görüldüğü gibi, tam bir paralellik vardır. Buna göre, *magnetostatik alan* $\mu_0 \vec{J}$ ile nasıl belirleniyorsa, *Faraday indüksiyon elektrik alanı* da $-(\partial \vec{B}/\partial t)$ ile öyle belirlenir. Biot-Savart yasasını yazalım:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \hat{r}}{R^2} d\tau$$

Bu ifadenin elektrik alan için paraleli şöyle olmalıdır:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\partial \vec{B}/\partial t) \times \hat{r}}{R^2} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B} \times \hat{r}}{R^2} d\tau \right\} \quad (7.16)$$

Parantez içindeki ifade, (5.66) denklemiyle tanımlanan \vec{A} vektör potansiyelidir. Buna göre

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7.17)$$

olur. Bu sonucu kontrol etmek için rotasyonelini alalım:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Eğer sistemin simetrisi varsa, Ampere yasasının integral ifadesi de kullanılabilir:

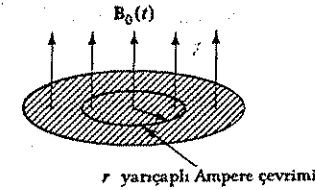
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{ç}}$$

Buna paralel indüksiyon elektrik alan ifadesi

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

olur; yani, seçtiğimiz Ampere çevrimi içindeki $\mu_0 I_{\text{ç}}$ yerine, akı değişimi alınır.

Örnek 7.6 : Şek. 7.21'deki tarah bölgede, yukarı yönde ve düzgün $\vec{B}_0(t)$ manyetik alanı zamanın fonksiyonu olarak değişmektedir. Indüksiyon elektrik alanını bulun.



Şekil 7.21

Çözüm : r yarıçaplı Ampere çevrimi seçilir ve Faraday yasası uygulanır:

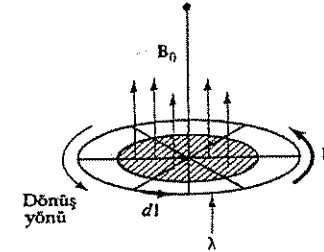
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(2\pi r) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (\pi r^2 B_0(t)) = -\pi r^2 \frac{dB_0}{dt}$$

Buradan sonuç bulunur:

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB_0}{dt} \quad (7.18)$$

\vec{E} alanı çembere teğet yönde, tıpkı düzgün akım yoğunluğu geçen telin manyetik alanı gibi, olur. B_0 artıyorsa, yukardan bakıldığında \vec{E} saat yönünde dolandır.

Örnek 7.7 : R yarıçaplı çember şeklinde bir tekerlek çevresine λ boyca yük yoğunluğu konulmuştur. Tekerlek orta noktasından tavana asılmış olup yatay bir düzlemde serbestçe dönebilmektedir (Şek. 7.22). Tekerlek içinde a yarıçapına kadar olan bölgede yukarı yönde düzgün \vec{B}_0 manyetik alanı bulunmaktadır. Manyetik alan birden sıfırlanıyor. Tekerlek ne yapar?



Şekil 7.22

Çözüm : Değişen manyetik alanın oluşturduğu indüksiyon elektrik alanı tekerleğe teğet yönde dolandır. Bu elektrik alan tekerlek çevresindeki yükleri bir kuvvet uygulayıp tekerleği

döndürür. Lenz kuralına göre, dönüş yönü öyle olmalıdır ki, bareketli yüklerin magnetik alanı, yukarı yöndeki akıyı geri getirebilmelidir. Buna göre dönüş, şekilde gösterildiği gibi, yukardan bakıldığında saat yönü tersine olur.

Faraday yasasına göre

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

olur. Tekerlek çevresindeki küçük $d\vec{l}$ elemanı üzerindeki tork ($\vec{R} \times \vec{F}$), veya $(R\lambda E) dl$ olur. Tekerlek üzerindeki toplam tork

$$N = R\lambda \oint E dl = -R\lambda \pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

ve tekerleğin kazandığı toplam açısal momentum

$$N dt = -R\lambda \pi a^2 \int_{B_0}^0 dB = R\lambda \pi a^2 B_0$$

olur. Bu sonuca göre, magnetik alanın sıfırlanma hızı önemsizdir, tekerleğin son açısal hızı aynı olacaktır. (Bu açısal momentumun nereden geldiğini düşünüyorsanız, Örnek 7.17'yi bekleyin.)

Bu örnek için son bir söz: Dönmeyi sağlayan elektrik alanıdır. Bunu açık görebilmeniz için, tekerlek çevresinde (yani, yüklerin orada) magnetik alan daima sıfır olacak şekilde örneği hazırladım. Burada magnetik alanı sıfırlayınca, elektrik alan kendiliğinden oluşur ve tekerleği döndürür.

Faraday yasası uygulamalarının çoğunda rahatsız edici bir nokta vardır: Faraday yasasında *değişen* magnetik alanlar söz konusudur, oysa bu alanları hesaplamak için magnetostatik formüller (Ampere yasası, Biot-Savart yasası) kullanılmaktadır. İşin doğrusu, bu yolla yapılan hesaplar yaklaşık olur. Fakat, magnetik alan çok hızlı değişmediği sürece, yapılan hata pratikte çok küçük olur. Örneğin, Problem 7.15'teki makasla kesilen telde dahi, Ampere yasasının uygulamaya yetecek kadar *statik* bir durum vardır. Magnetostatik kural-ların Faraday yasasıyla birlikte kullanılabildiği bu rejimlere *yarı-statik* adı verilir. Genel olarak, ancak elektromagnetik dalgalar ve radyasyon teorisine gelindiğinde magnetostatik uygulanır olmaktan çıkar.

Örnek 7.8 : *R yarıçaplı küresel kabuk yüzeyinde σ yük yoğunluğu vardır. Küre kendi eksenine etrafında yavaşça değişen $\omega(t)$ açısal hızıyla dönmektedir. Küre içinde ve dışında elektrik alanı bulun.*

Çözüm : Burada iki tür elektrik alan vardır: (1) Yüzey yükünün Coulomb alanı:

$$\vec{E}_c = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & (\text{küre dışında}) \\ 0 & (\text{küre içinde}) \end{cases}$$

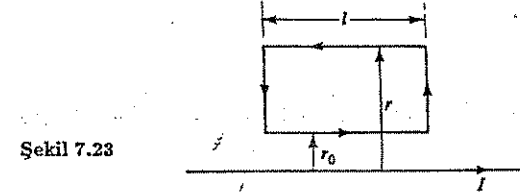
(2) Değişen magnetik alandan kaynaklanan Faraday alanı. Dönen küresel kabuğun vektör potansiyeli Örnek 5.11'de bulunmuştu. O örnekteki sonuç magnetostatik için geçerliydi; fakat ω yavaş değişiyorsa, burada da kullanabiliriz. (5.61) formülünü (7.17) denkleminde

yerine koyarsak

$$\vec{E}_f = \begin{cases} -\frac{\mu_0 R \sigma}{3} \omega r \sin \theta \hat{\phi} & (\text{küre dışında}) \\ -\frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3} \omega r \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\phi} & (\text{küre içinde}) \end{cases}$$

bulunur. Burada $\dot{\omega} = d\omega/dt$ dir.

Örnek 7.9 : *Sonsuz doğrusal bir telden geçen akım $I(t)$ şeklinde yavaşça değişiyor. İndüksiyon elektrik alanını bulun.*



Şekil 7.23

Çözüm : Yarı-statik yaklaşıklıkta, doğrusal telin magnetik alanı ($\mu_0 I/2\pi r$) olup telin çevresinde dolanır yödedir. Yukarda incelediğimiz, Faraday yasası ile Ampere yasası arasındaki analogiye göre, solenoidin \vec{B} alanı gibi, burada \vec{E} alanı eksene paralel olacaktır. Şek. 7.23'teki Ampere çevrimini seçersek, Faraday yasası:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= E(r_0)l - E(r)l = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a} \\ &= -\frac{\mu_0 (dI/dt)l}{2\pi} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'} = -\frac{\mu_0 (dI/dt)l}{2\pi} (\ln r - \ln r_0) \end{aligned}$$

veya,

$$E(r) = \frac{\mu_0 (dI/dt)}{2\pi} \ln r + K \quad (7.19)$$

olup $K = E(r_0) - (\mu_0 (dI/dt)/2\pi) \ln r_0$ sabittir.

Bu sonuca göre, $r \rightarrow \infty$ olduğunda E alanı ıraksak olacaktır. Bu doğru olamaz... nerede yanlış yaptık? **Yanıt:** Yarı-statik yaklaşıklığın dışına çıktık. Bölüm 9'da göreceğimiz gibi, elektromagnetik "haber" ışık hızıyla yayılır; buna göre, uzak mesafelerde \vec{B} alanı sadece o andaki akıma değil, daha önceki zamanlardaki akıma da bağlı olacaktır. I akımının önemli ölçüde değiştiği zaman aralığına τ dersek, yarı-statik yaklaşıklığın geçerli olabilmesi için

$$r \ll c\tau \quad (7.20)$$

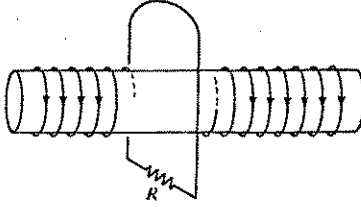
olmalıdır; bu nedenle yukardaki (7.19) sonucu büyük r değerlerine uygulanamaz.

Problem 7.13 Koaksiyal bir kablo, sonsuz doğrusal bir tel ve onunla eş eksenli R yarıçaplı iletken bir silindirden oluşmaktadır. Alternatif $I = I_0 \cos(\omega t)$ akımı içteki telden gidip silindirden geri dönmektedir.

(a) İndüksiyon elektrik alanı hangi yönde olur? (radyal, eksen yönünde, dolanımlı?)

(b) \vec{E} alanını eksenden r uzaklığının fonksiyonu olarak bulun.

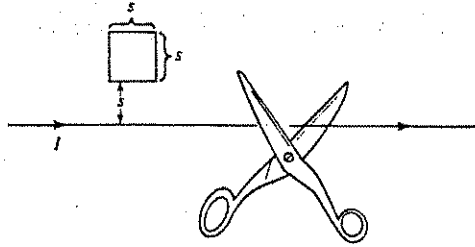
Problem 7.14 a yarıçaplı ve birim uzunlukta N sarımlı uzun bir solenoit, R dirençli bir devrenin içine uzatılmıştır (Şek. 7.24).



Şekil 7.24

(a) Solenoidteki akım $dI/dt = k = \text{sabit}$ olacak şekilde arttığında, devreden geçen akım ve yönü ne olur?

(b) Bu kez sabit I akımı geçerken, solenoid devrenin içinden çıkarılıyor, ters çevriliyor ve tekrar devre içine sokuluyor. Direnç üzerinden geçen toplam yük ne kadar olur?

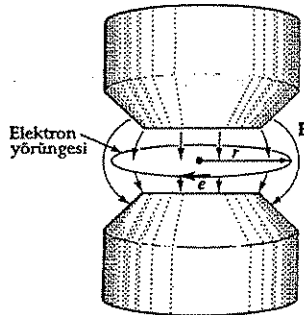


Şekil 7.25

Problem 7.15 Kenar uzunluğu s ve direnci R olan bir kare çerçeve, I akımı geçen sonsuz doğrusal telin yakınına aynı düzlemde konulmuştur (Şek. 7.25). Tel birden makasla kesilerek akım sıfırlanıyor. Kare çerçevedeki indüksiyon akımının yönü ne olur? Bu akım süresince çerçevenin bir kesitinden geçen toplam yük ne kadardır?

Akımın birden sıfır olması yerine, düzgün olarak şöyle azaldığını da düşünebilirsiniz:

$$I(t) = \begin{cases} (1 - \alpha t)I & (0 < t < 1/\alpha \text{ için}) \\ 0 & (t > 1/\alpha \text{ için}) \end{cases}$$



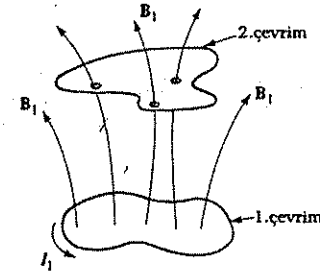
Şekil 7.26

Problem 7.16 Siklotron hareketi yapan elektronlar manyetik alan artırılarak daha da hızlandırılabilirler. Teğetsel ivme bir elektrik alanla sağlanır. Betatron denilen hızlandırıcıların çalışma ilkesi budur. Hızlanma sırasında yörünge yarıçapının sabit kalması istenir. Şek. 7.26'daki mıknatıs için, yörünge içindeki ortalama manyetik alanın, yörünge çevresindeki manyetik alanın iki katı olduğunu gösterin. Elektronların sıfır manyetik alanda sıfır ilk hızla başladığını ve düzenin eksenel simetrik olduğunu varsayın. (Ayrıca, elektron

hızının ışık hızından çok küçük kaldığını varsayarak klasik mekanığın geçerli olduğunu kabul edin.)

Problem 7.17 Bir atomda q yüklü elektron Q yüklü çekirdek çevresinde r yarıçaplı yörüngede dönmektedir. Merkezci ivme zıt yüklerin Coulomb çekme kuvvetiyle sağlanır. Şimdi yörünge düzlemine dik yönde küçük bir dB manyetik alanı yavaşça artırılıyor. İndüksiyon elektrik alanında elektronun kinetik enerjisindeki dT artışının, dairesel hareketin aynı r yarıçapında kalmasına tam yetecek kadar olduğunu gösterin. (Diamagnetizmayı inceleyen yarıçapın sabit kaldığını bu nedenle varsaydık.)

7.2.2 İndüktans



Şekil 7.27

Hareketsiz iki çerçeve gözönüne alalım (Şek. 7.27). 1. çerçevenin kararlı I_1 akımı geçirdiğimizde oluşan manyetik alan \vec{B}_1 olsun. Bu alan çizgilerinin bir bölümü 2. çerçeve içinden geçecektir. \vec{B}_1 alanının 2. çerçeve içinden geçen akısına Φ_2 diyelim. Sistem çok basit değilse \vec{B}_1 hesabı oldukça karmaşık olabilir. Fakat Biot-Savart yasasına tekrar bakalım:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{r}}{R^2}$$

Bu manyetik alan I_1 akımıyla orantılıdır. Bunun 2. çerçevenin geçen

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2$$

akısı da aynı I_1 akımıyla orantılı olacaktır. O halde, şöyle yazabiliriz:

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \quad (7.21)$$

Buradaki M_{21} orantı katsayısına iki çerçevenin karşılıklı indüktansı denir.

Karşılıklı indüktans hesabı genelde çok zordur. Burada pratikte yararlı olabilecek, vektör potansiyel cinsinden bir ifade verelim:

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{a}_2 = \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

(Son eşitlikte Stokes teoremi kullanıldı.) (5.58) tanımına göre

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_1}{R}$$

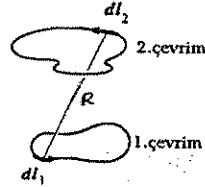
olduğundan

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\vec{l}_1}{R} \right) \cdot d\vec{l}_2$$

yazılır ve (7.21) denkleminle karşılaştırılırsa

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R} \quad (7.22)$$

İki eğrisel integralli bu ifadeye Neumann formülü denir; İntegrallerden biri 1.çerçeve üzerinde, diğeri 2.çerçeve üzerinde alınır (Şek. 7.28). Bu formülün de kolay olduğunu iddia etmiyorum, fakat iki noktayı açığa kavuşturması bakımından önemlidir:



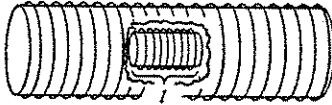
Şekil 7.28

1. M_{21} katsayısı iki çerçevenin sadece geometrik özelliklerine (şekil, boy, aradaki uzaklık) bağlıdır.
2. 1. ve 2.çerçeveleri yer değiştirirsek, katsayı değişmez:

$$M_{21} = M_{12} \quad (7.23)$$

O halde, indisleri kaldırıp kısaca M ile gösterebiliriz. Bu şaşılacak bir sonuçtur: Şekli ve biçimleri ne olursa olsun, 1.çerçeve üzerindeki I akımının 2.çerçeve üzerindeki akısı, 2.çerçeveden aynı I akımı geçirildiğinde 1.çerçeve oluşturduğu akıya eşit olur.

Örnek 7.10: Birim uzunlukta N_2 sarımlı uzun solenoid içine yarıçapı R , uzunluğu l ve birim uzunlukta sarım sayısı N_1 olan küçük bir solenoid konulmuştur (Şek. 7.29) Küçük solenoidten I akımı geçtiğinde, uzun solenoid içindeki magnetik akı ne olur?



Şekil 7.29

Çözüm: Küçük solenoidin boyu kısa olduğundan, magnetik alan ifadesi karmaşıktır; üstelik büyük solenoidin her halkasında farklı akı oluşturur. Akıyı bu yolla hesaplamak olacak iş değildir. Oysa, karşılıklı indüktansların eşitliğini kullanırsak problem kolaylaşır. Verilen problemin karşısına bakalım: Dış solenoidten I akımı geçirelim ve küçük solenoid içindeki akıyı hesaplayalım: Uzun solenoid içinde magnetik alan düzgün olup, değeri

$$B = \mu_0 N_2 I$$

olur. Buna göre, küçük solenoidin tek bir sarımından geçen akı

$$B \pi R^2 = \mu_0 N_2 I \pi R^2$$

olur. Toplam sarım sayısı ($N_1 l$) olduğundan, iç solenoidteki toplam akı bulunur:

$$\Phi = (\mu_0 \pi R^2 N_1 N_2 I) l$$

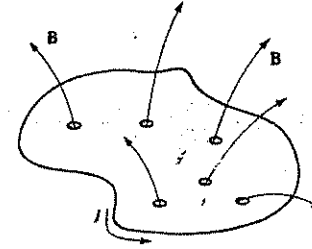
Bu, bizim aradığımız küçük solenoidteki I akımının uzun solenoidte oluşturduğu akıya eşittir. Bu sistemin karşılıklı indüktansı şöyle olur:

$$M = \mu_0 \pi R^2 N_1 N_2 l$$

Yukardaki iki çerçeve deneyde 1.çerçeve üzerindeki akımın değiştiğini varsayalım. Bu durumda, 2.çerçeveden geçen magnetik akı da değişecek ve Faraday yasasına göre, 2.çerçeve bir emk oluşacaktır:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (7.24)$$

Bu ilginç bir sonuçtur: 1.çerçeve üzerindeki akımı değiştirdiğimizde, buna iletken bir telle bağlı olmadığı halde, 2.çerçeve bir akım oluşacaktır.



Şekil 7.30

Biraz düşünecek olursak, değişken bir akım sadece komşu çerçeve değil, kendi bulunduğu çerçeve de bir emk oluşturur (Şek. 7.30). Bu magnetik akı da yine geçen akımla orantılı olur:

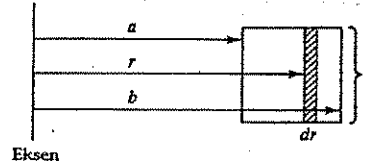
$$\Phi = L I \quad (7.25)$$

L orantı katsayısına çerçevenin özindüksiyon katsayısı veya kısaca indüktans denir. İndüktans, M gibi, çerçevenin sadece geometrisine (büyüklüğü, biçimi) bağlı bir sabittir. Akım değişirken, çerçeve oluşun emk Faraday yasası ile verilir:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (7.26)$$

İndüktans birimi volt×saniye/ampere, veya henry (H) olur.

Örnek 7.11: Dikdörtgen kesitli toroit şeklindeki bir bobinin iç yarıçapı a , dış yarıçapı b ve kalınlığı h olup, toplam n sarımı vardır. Özindüksiyon katsayısını bulun.



Şekil 7.31

Çözüm: Toroit içinde r uzaklıktaki magnetik alan (5.52) formülünden yazılır:

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}$$

Şek. 7.31'e göre, bir sarımdan geçen magnetik akı

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0 n I}{2\pi} h \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 n h I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

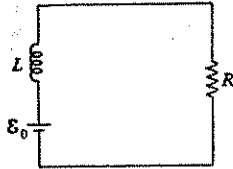
olup, toplam akı bunun n katıdır. Buna göre, (7.25) formülünden özindüksiyon katsayısı hesaplanır:

$$L = \frac{\mu_0 n^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (7.27)$$

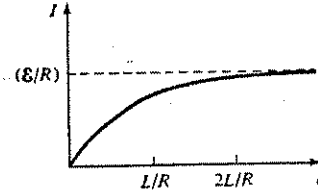
Tanım olarak M ve L pozitif birer sabittir. (7.26) formülündeki eksi işareti, Lenz kuralı uyarınca, emk'nın akımdaki değişmeye karşı koyacak yönde olmasını gerektirir. Bu açıdan, devrenin kendisinde oluşan bu emk'ya zıt emk denir. Bir devredeki akımı değiştirmek istediğinizde, bu zıt emk'yı karşılamalısınız. Bu bakımdan, elektrik devrelerinde indüktans, mekanikteki kütle rolünü üstlenir. L ne kadar büyükse, devredeki akımı değiştirmek o kadar zor olur; tıpkı büyük kütlelerin daha zor ivmelendiği gibi.

Örnek 7.12: Bir çerçevede I akımı geçmekteyken tel kesiliyor; akım "birdenbire" sıfır oluyor. Burada I akımı küçük olabilir, ama dI/dt çok büyük olduğundan, önemli bir zıt emk doğar. Bu nedenle, bir ütü veya tost makinasının fişini çektiğinizde bir kıvılcım atladığını görürsünüz—elektromagnetik indüksiyon, akımı sabit tutabilmek için ne lazımsa yapar, gerektiğinde boşluktan atlar.

Fakat, ütü veya tost makinasının fişini taktığınızda böyle dramatik bir etki gözlenmez. Bu kez indüksiyon, akımdaki daha yumuşak bir artışa karşı koymaya çalışır. Örneğin, direnci R ve indüktansı L olan bir devrenin, sabit \mathcal{E}_0 emk veren bir bataryaya bağlandığını düşünelim (Şek. 7.32). Geçen akım ne olur?



Şekil 7.32



Şekil 7.33

Çözüm: Bu devrenin toplam emk'sı batarya ve devrenin indüktansından kaynaklanır. Ohm yasası yazılırsa

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = RI$$

Bu, $I(t)$ için birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir. Genel çözümün

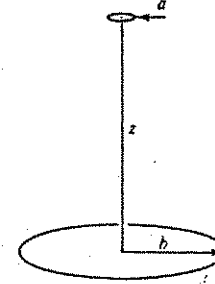
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + k e^{-(R/L)t}$$

olduğu kontrol edilebilir. k sabiti problemin sınır koşulundan tayin edilir. Bu devre $t = 0$ anında fişe takıldığında, $I(0) = 0$ olur ve $k = -\mathcal{E}_0/R$ bulunur. Buna göre,

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-(R/L)t}\right) \quad (7.28)$$

bulunur. Bu eğri Şek. 7.33'te gösterilmiştir. Eğer devrede indüktans olmasaydı, akım birden \mathcal{E}_0/R değerine çıkardı. Pratikte her devrenin bir miktar özindüksiyonu vardır ve akım dereceli olarak \mathcal{E}_0/R değerine ulaşır. L/R oranına devrenin "zaman sabiti" denir; akımın son değerine ne kadar zamanda erişeceğinin bir ölçüsüdür.

Problem 7.18 Yarıçapı a olan küçük bir çember, yarıçapı b olan büyük bir çemberin merkezinden çıkılan dikme üzerinde z yüksekliktedir (Şek. 7.34). İki çember düzlemi paraleldir.

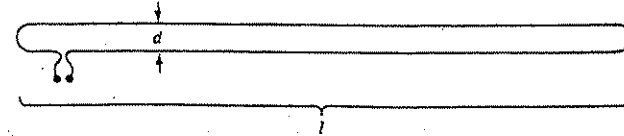


Şekil 7.34

- Büyük çemberden I akımı geçtiğinde küçük çemberdeki magnetik akıyı bulun. (Küçük çember içinde magnetik alanın sabit değerde olduğunu varsayabilirsiniz.)
- Bu kez küçük çemberden I akımı geçtiğinde, büyük çember içinden geçen akıyı hesaplayın. (Küçük çemberi noktasal bir dipol gibi alabilirsiniz.)
- Karşılıklı indüktans katsayılarını bulun ve $M_{21} = M_{12}$ olduğunu gösterin.

Problem 7.19 Bir kenarı s uzunluktaki kare çerçeve, birbirine $3s$ uzaklıkta paralel olan sonsuz iki telin ortasına ve tellerle aynı düzlemlerde olacak şekilde konulmuştur. (Aslında iki uzun tel kapalı bir devrenin iki uzun kenarı olur ve kısa kenarların katkıları yok sayılabilir.) Kare çerçevede saat yönünde I akımı, $dI/dt = k$ (sabit) olacak şekilde giderek artıyor. Büyük devrede oluşan indüksiyon emk'sı ne olur? İndüksiyon akımı hangi yönde olur?

Problem 7.20 Yarıçapı R ve birim uzunlukta N sarımlı olan sonsuz solenoidin birim uzunluktaki indüktansını bulun.



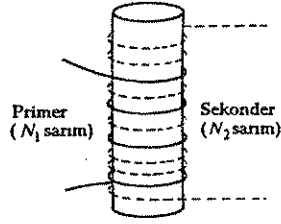
Şekil 7.35

Problem 7.21 Şek. 7.35'teki "saç tokası" şeklindeki devrenin özindüksiyon katsayısını bulun. (Uçlardaki katkıları yok sayın, akı tümüyle uzun kenarlardan kaynaklanır.) Burada herkesin bildiği bir güçlük karşılacaksınız. Tam bir yanıt bulabilmek için telin küçük yarıçaplı olduğunu varsayın ve telin içinden geçen akıyı yok sayın.

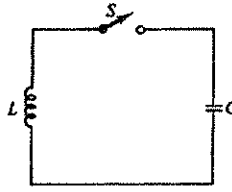
Problem 7.22 Bir silindirik çevresine iki solenoit sarılmış ve her sarımdan eşit akı geçmesi sağlanmıştır. (Bu, silindir içine demir konulup akıyı yoğunlaştırarak sağlanır.) Birinci (veya, "primer") bobinde N_1 sarım ve ikinci (veya, "sekonder") bobinde N_2 sarım vardır (Şek. 7.36). Birinci bobinden geçen I akımı değiştiğinde, ikinci bobinde oluşan emk'nın

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (7.29)$$

olduğunu gösterin. Burada \mathcal{E}_1 birincideki zıt emk'dır. (Bu düzenek transformator adıyla bilinir ve alternatif bir akımın emk değerini azaltıp çoğaltmakta kullanılır. Sarım sayıları uygun değerlerde seçilirse, ikinci devrede istenilen emk elde edilebilir. Bunun enerji korunumuna aykırı olduğunu düşünüyorsanız, Problem 7.58'e bakın.)



Şekil 7.36



Şekil 7.37

Problem 7.23 Sığası C olan bir kapasitör V potansiyeli altında yüklendikten sonra bir L indüktansına bağlanıyor (Şek. 7.37). $t = 0$ anında S anahtarı kapatılıyor. Devredeki akımı zamanın fonksiyonu olarak bulun. Bu devreye, C ve L 'ye ek olarak, bir de R direnci bağlanırsa, yanıtınız nasıl değişir?

Problem 7.24 Bir bobin, magnetik geçirgenliği μ olan lineer magnetik bir sıvıya daldırıldığında, özindüksiyon katsayısı hangi oranda değişir?

7.2.3 Magnetik Alanda Enerji

Bir devrede akımı başlatabilmek için enerji gerekir. Burada dirençlerde ısıya dönüşen enerjiden söz etmiyorum—dirençlerdeki enerji az veya çok olabilir, ama devre açısından bir kayıptır. Burada, akımı başlatabilmek için *zıt emk'ya karşı yapılması gerek işten* söz ediyorum. Bu enerjinin değeri bellidir ve akım sıfırlandığında *geri alınabilir*. Bu, devre çalışırken bir tür potansiyel enerji olarak, magnetik alanda depolanır.

Birim yükün devrede bir tam dolanımı sırasında zıt emk'ya karşı yapılan iş $-\mathcal{E}$ olur. (Eksi işareti işi bizim yaptığımızı göstermek içindir.) Telden birim zamanda geçen yük I olduğundan, birim zamanda yapılan toplam iş

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E} I = LI \frac{dI}{dt}$$

olur. Akım sıfırdan başlayıp son I değerine erişinceye kadar yapılan toplam iş bunun integrali olur:

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad (7.30)$$

İş, akımın ne kadar zamanda son değerine eriştiğine değil, sadece devrenin geometrisine (L) bağlı olur.

İş ifadesini daha değişik bir şekilde yazarak, yüzey ve hacim akımlarına genelleştirmek mümkündür. Devre içinden geçen magnetik akımın $\Phi = LI$ olduğunu hatırlayın. Diğer yandan

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Burada C devreyi oluşturan eğri ve S bunun içinde kalan herhangi bir yüzeydir. Buradan

$$LI = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

ve

$$W = \frac{1}{2} I \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

7.2. FARADAY YASASI

olur. Vektör işaretini I üzerine alırsak

$$W = \frac{1}{2} \oint_C (\vec{A} \cdot \vec{I}) dl \quad (7.31)$$

bulunur. Şimdi bu ifadenin hacim akımlarına nasıl genelleşebileceği açıktır:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{hacim}} (\vec{A} \cdot \vec{J}) d\tau \quad (7.32)$$

Bunu bir adım daha götürüp, magnetik alan cinsinden ifade edebiliriz. $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ Ampere yasasıyla \vec{J} elenirse

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{hacim}} \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\tau \quad (7.33)$$

olur. Vektörlerin 6. çarpım kuralını hatırlayalım:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= B^2 - \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Buna göre

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int B^2 d\tau - \int \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) d\tau \right] = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_{\text{hacim}} B^2 d\tau - \oint_{\text{yüzey}} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} \right] \quad (7.34)$$

Birinci integral, *akımların işgal ettiği tüm hacim* üzerinden alınmaktadır. Bu hacmi daha da büyütürsek, dışarda $\vec{J} = 0$ olduğundan, yapılan toplam iş değişmez. Ama birinci integralin değeri giderek artar, ikinci yüzey integrali de sıfıra gider. Sonunda *tüm uzay* üzerinden integral alındığında yüzey integrali sıfır olur:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{tüm uzay}} B^2 d\tau \quad (7.35)$$

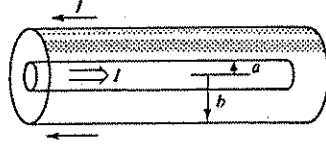
Bu sonuca bakarak, enerjinin birim hacimde $B^2/2\mu_0$ miktarda "magnetik alanda depolandığını" söyleyebiliriz. Gerçi (7.32) denklemine bakanlar, enerjinin birim hacimde $(\vec{A} \cdot \vec{J})$ miktarda "akım dağılımında depolandığını" söyleyebilirler, ama bizim bakış açımız daha güzeldir. Arada sadece teorik fark vardır; önemli olan büyüklük toplam W enerjisidir, nerede depolandığını dert etmeyeceğiz.

Yine, magnetik kuvvetler iş yapmadığı halde, magnetik alan oluşturmak için iş yapılması gerektiği size tuhaf gelebilir. Burada, magnetik alan oluşturmak *değişken magnetik alan* demektir ve Faraday yasasına göre bu, indüksiyon elektrik alanı gerektirir; elektrik alan iş yapar. Başlangıçta \vec{E} yoktu, sonunda da yoktur; arada \vec{B} alanını oluştururken \vec{E} ortaya çıkar ve iş yapar. (Bölüm 5'te magnetostatik alandaki enerjiyi neden hesaplayamadığımızı umarım şimdi anlıyorsunuz.) Bu incelemenin ışığında, elektrik ve magnetik enerji formüllerinin ne kadar paralel olduğunu görmek yararlıdır:

$$W_{\text{elek}} = \frac{1}{2} \int (V \rho) d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad (2.37 \text{ ve } 2.39)$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int (\vec{A} \cdot \vec{J}) d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau \quad (7.32 \text{ ve } 7.35)$$

Örnek 7.13 : Uzun bir koaksiyal kablunun a yarıçaplı iç silindirinden geçen I akımı b yarıçaplı dış silindirden geri dönmektedir (Şek. 7.38). Kablunun l uzunluğunda depolanan enerjiyi bulun.



Şekil 7.38

Çözüm : Ampere yasasıyla silindirler arasındaki bölgede magnetik alanı buluruz:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

Diğer bölgelerde magnetik alan sıfırdır. Buna göre, birim hacimdaki enerji

$$\frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

olur. l uzunluğunda ve $[r, r + dr]$ aralığındaki silindirik bir kabukta enerji

$$\left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \right) l 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

Bu ifadenin a 'dan b 'ye integrali aradığımız enerjiyi verir:

$$W = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Bu sonuç, özindüksiyon katsayısını hesaplamamızın daha kolay bir yolunu göstermektedir. (7.30) formülüne göre enerji $\frac{1}{2} L I^2$ olduğundan, iki ifade karşılaştırılırsa

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

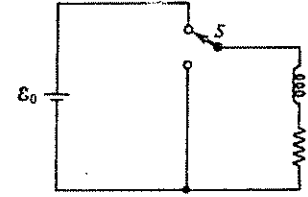
bulunur. Bu yöntem, özellikle hacim veya yüzey akımları olan sistemlerde kullanışlı olabilir.

Problem 7.25 Kesiti R yarıçaplı silindir olan ve birim uzunlukta N sarımlı sonsuz solenoidten I akımı geçmektedir. Solenoidin l uzunluğunun enerjisini dört farklı yoldan hesaplayın:

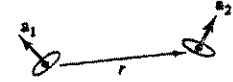
- (7.30) formülüyle (L değerini Problem 7.20'de buldunuz).
- (7.31) formülüyle (\vec{A} potansiyeli Örnek 5.12'de bulunmuştu.)
- (7.35) formülüyle.
- (7.34) formülüyle; (hacim olarak, $r < R$ 'den $r > R$ 'ye kadar olan silindirik tübü alın.)

Problem 7.26 Örnek 7.11'deki toroidin enerjisini (7.35) formülüyle hesaplayın. Yanıtınızı (7.27) denklemininle karşılaştırın.

Problem 7.27 Dairesel kesitli uzun bir kablo hacmi içinde düzgün dağılmış akım, kablo yüzeyinden geri dönüyor (iki arasında ince bir yalıtkan tabaka olduğunu varsayın.) Birim uzunluktaki özindüksiyon katsayısını bulun.



Şekil 7.39



Şekil 7.40

Problem 7.28 Şek. 7.39'daki devre bir süre bataryaya bağlı kaldıktan sonra, $t = 0$ anında anahtar diğer yöne kapatılarak batarya devre dışı bırakılıyor.

- Daha sonraki bir t anında akım ne olur?
- Dirençte harcanan toplam enerji ne kadardır?
- Bu enerjinin başlangıçta L bobininde depolanmış olan enerjiye eşit olduğunu gösterin.

Problem 7.29 Bir iletişim hattı, herbirinin genişliği w olan ve aralarında küçük s uzaklığı bulunan iki metal şeritten yapılmıştır ($s \ll w$). Metal şerit yüzeylerde düzgün dağılmış olan akım bir şeritten gidip diğerinden geri dönüyor.

- Birim şerit uzunluğunun C sığasını bulun.
- Birim şerit uzunluğunun \mathcal{L} indüktansını bulun.
- $\mathcal{L}C$ çarpımının sayısal değeri nedir? [Şeridin cinsine göre \mathcal{L} ve C ayrı ayrı değişebilir, ama çarpımları evrensel bir sabittir. İletim hatlarında bu çarpım, teldeki elektromagnetik sinyalin iletim hızıyla ilişkilidir: $v = 1/\sqrt{\mathcal{L}C}$].
- Şeritler arasındaki bölge elektrik ve magnetik geçirgenliği sırasıyla ϵ , μ olan bir yalıtkanla doldurulmuşsa, bu kez $\mathcal{L}C$ çarpımı ne olur? İletim hızı ne kadardır? (bkz. Problem 7.24 ve Örnek 4.6)

Problem 7.30 Aralarında r uzaklığı bulunan çok küçük iki çerçeve, yüzey alan vektörleri \vec{a}_1 ve \vec{a}_2 olacak şekilde konulmuştur (Şek. 7.40).

- Karşılıklı indüktans katsayısını bulun. [Yol gösterme: Herbirini noktasal magnetik dipol varsayın ve (5.85) formülünü kullanın.] Yanıtınız (7.23) denklemininle uyumlu mudur?
1. çerçevede sabit I_1 akımı varken, 2. çerçevede belli bir I_2 akımı oluşturmak istiyoruz. Birinci çerçevedeki akımı I_1 değerinde tutabilmek için, karşılıklı indüksiyon emk'sına karşı ne kadar iş yapılmalıdır? (Bu sonucun ışığında, (6.31) formülünü yorumlayın.)

7.3 MAXWELL DENKLEMLERİ

7.3.1 Maxwell'den Önceki Elektrodinamik

Buraya kadarki bölümlerde elektrik ve magnetik alanların diverjans ve rotasyonelleri için şu yasaları bulmuştuk:

- | | | |
|-------|--|------------------|
| (i) | $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ | (Gauss yasası) |
| (ii) | $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ | (adı yok) |
| (iii) | $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | (Faraday yasası) |
| (iv) | $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ | (Ampere yasası) |

(7.36)

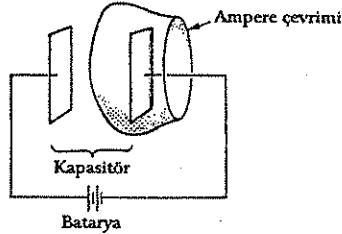
İşte yüzyıl kadar önce, Maxwell araştırmasına başladığı sıralarda elektromagnetik teori bu denklemlerle biliniyordu. Elbette yukardaki gibi modern notasyonla yazılmış değillerdi, ama fiziksel içerikleri biliniyordu. Fakat bu denklemlerde önemli bir çelişki göze çarpmaktadır. Bunu görebilmek için rotasyonelin diverjansının sıfır olduğu özdeşliği kullanırız. (iii) no.lu denklemin diverjansını alalım:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$$

Bu denklemin sol tarafı özdeş olarak sıfırdır. Sağ taraf ise (ii) denklemine göre sıfır olur. Burada bir çelişki yoktur. Fakat (iv) denklemine aynı işlem uygulanırsa sorun ortaya çıkar:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) \quad (7.37)$$

Sol taraf özdeş olarak sıfırdır, fakat sağ taraf her zaman sıfır olmayabilir. Kararlı akımlar için $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ olduğu doğrudur; fakat magnetostatik dışına çıkıldığında Ampere yasası doğru olamaz.



Şekil 7.41

Ampere yasasının değişken akımlar için hatalı olduğunu görmenin başka bir yolu daha vardır. Bir kapasitörün yüklendiği devreyi gözönüne alalım (Şek. 7.41). Ampere yasasının integral ifadesini yazalım:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{iç}$$

Bu yasayı şekilde gösterilen kapalı Ampere çevrimi üzerinde uygularsak $I_{iç}$ ne olur? Bu eğriyle sınırlı bir yüzeyi kesen akım olur. Böyle bir yüzeyin en basit seçimi, eğri içinde kalan düzlem yüzeydir—tel bu düzlemi kestiği için $I_{iç} = I$ olur, ve beklenen sonuç bulunur. Fakat, Şek. 7.41'deki torba şeklindeki yüzeyi seçersem ne olur? Bu yüzeyi kesen hiçbir akım yoktur ve $I_{iç} = 0$ olur! Magnetostatikte böyle bir sorunla karşılaşmamıştık, çünkü orada yüklerin bir yerlerde (burada kapasitör levhaları) birikmesi söz konusu değildi; kararlı olmayan akımlar için "eğri içinde kalan akım" kavramı belirsiz bir kavramdır, ve eğriyle sınırlı yüzeyin seçimine göre değişir.

Ampere yasasının magnetostatik dışında geçerli olması zaten beklenemezdi, çünkü Biot-Savart yasasından çıkarılmıştı. Fakat Maxwell'in yaşadığı devirde Ampere yasasının daha genel olmasını engelleyen deneysel bir kanıt yoktu. Bu teorik bir tutarsızlığı ve Maxwell bunu teorik bir yaklaşımla çözdü.

7.3.2 Ampere Yasasını Maxwell Nasıl Tamir Etti?

Çelişki (7.37) denkleminin sağ tarafından kaynaklanmaktadır; bu terimin sıfır olması gerekirdi, ama değildir. (5.25) süreklilik denklemini ve Gauss yasasını kullanarak, bu terimi şöyle yazabiliriz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

7.3. MAXWELL DENKLEMLERİ

Bu durumda, parantez içindeki ifadenin ters işaretlisini Ampere yasasının sağ tarafına eklersek, eşitlik sağlanabilecektir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7.38)$$

(Maxwell bu terimi eklerken, günümüzde geçerli olmayan esir modeline göre bir düşünce yöntemi izlemişti; süreklilik denklemini kurtarmış olma çabasında değildi. Fakat vardıgı sonuç doğrudur.)

Böyle bir değişiklik elektrostatik veya magnetostatik açıdan hiçbir değişikliğe yol açmaz. \vec{E} sabit olduğunda, yine $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ Ampere yasasını buluruz.

Maxwell'in eklediği terim, Ampere yasasını genelleştirmenin yanı sıra, estetik açıdan da çekicidir. Nasıl ki değişken magnetik alan indüksiyon elektrik alanı oluşturuyorsa (Faraday yasası), şimdi değişken elektrik alanın da bir indüksiyon magnetik alanı oluşturabileceği ortaya çıkıyor. Elbette estetik kaygılar bunun doğru olduğunu göstermez (aynı işi gören başka terimler de bulunabilirdi); Maxwell teorisini doğrulayan kanıt 1888'de Hertz tarafından elektromagnetik dalgaların bulunmasıyla geldi.

Maxwell bu ek terime deplasman akımı adını verdi:

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7.39)$$

Bu terim pek uygun sayılmaz, çünkü $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ 'nin akımla bir ilgisi yoktur, sadece Ampere yasasında \vec{J} 'nin yanında yer alır. Şimdi bu terim katıldığında, yukardaki kapasitör örneğindeki çelişkinin nasıl halledildiğini görelim. Kapasitör levhaları arasındaki uzaklık çok küçükse, elektrik alan düzğün alınabilir:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

Burada A levhalardan birinin yüzey alanı ve Q üzerindeki toplam yüküdür. Buna göre, levhalar arasında

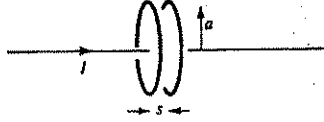
$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 A} \frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0 A}$$

olur. Öte yandan, (7.38) denkleminin integral ifadesi şöyle yazılabilir:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{iç} + \epsilon_0 \mu_0 \int \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a} \quad (7.40)$$

Yüzey integrali için düzlem yüzey seçilirse, $E = 0$ ve $I_{iç} = I$ olur. Torba şeklindeki yüzey seçilirse, $I_{iç} = 0$, fakat bu kez $\int (\partial \vec{E} / \partial t) \cdot d\vec{a} = I / \epsilon_0$ olur. Yani, hangi yüzey kullanılırsa kullanılsın, aynı sonuç bulunur. Fakat, birinci yüzeyde gerçek bir akım, ikincide ise sadece deplasman akımı vardır.

Problem 7.31 Bir düzlem kapasitörün levhaları a yarıçaplı çemberler şeklinde olup aralarında s uzaklığı vardır (Şek. 7.42). I akımı geçen bir tel kapasitörün içinden geçmektedir. Kapasitör yüklenirken levhalar arasında orta düzlemde ve merkezden r uzaklıkta ($r < a$) bir noktada oluşan indüksiyon magnetik alanını bulun.



Şekil 7.42

Problem 7.32 Problem 7.13'e tekrar dönelim. Problemin doğru yanıtı şöyledi:

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \sin \omega t \ln \left(\frac{R}{r} \right) \hat{z}$$

(a) \vec{J}_d deplasman akımını bulun.

(b) Toplam deplasman akımını $I_d = \int \vec{J}_d \cdot d\vec{a}$ integraliyle bulun.

(c) I_d/I oranını bulun. Dış silindir çapı 2 mm olsaydı, $I_d/I = 0.01$ olması için, frekans ne kadar olurdu? (Bu sonuç, deplasman akımını neden Faraday'ın bulamadığını gösterir. Frekans çok yüksek olmadığı sürece deplasman akımı yok sayılabilir.)

7.3.3 Maxwell Denklemleri ve Magnetik Yük

Yukarda Maxwell denklemlerine son noktayı koymuş bulunuyoruz. Bunları bir tabloda özetleyelim:

(i)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(Gauss yasası)
(ii)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	(adı yok)
(iii)	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(Faraday yasası)
(iv)	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	(Ampere yasası)

(7.41)

Buna Lorentz kuvveti eklenirse

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.42)$$

Böylece, Bölüm 4 ve 6'da incelediğimiz maddenin yapısıyla ilgili özellikler dışında, klasik elektromagnetik teoremin çerçevesi tanımlanmış olur. Hatta, yük korunumunu ifade eden

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (7.43)$$

süreklilik denklemini dahi, Maxwell denklemlerinin bir sonucu olur [(iv) denkleminin diverjansını alın].

ρ ve \vec{J} 'nin sıfır olduğu boş uzayda Maxwell denklemlerinin çarpıcı bir simetrisi vardır:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

\vec{E} yerine \vec{B} ve \vec{B} yerine de $-\epsilon_0 \mu_0 \vec{E}$ alınırsa, sağ ve sol taraftaki denklemler yer değiştirmiş olurlar. Bu simetriyi Gauss yasasındaki yük terimi ve Ampere yasasında akım terimi bozarlar.

7.3. MAXWELL DENKLEMLERİ

Gauss yasasındaki gibi bir yük teriminin neden $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ denkleminde olmadığı, veya Ampere yasasındaki gibi bir akım teriminin neden $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ denkleminde olmadığı sorusu akla gelebilir. Örneğin,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{denkleminin benzeri} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \eta$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{denkleminin benzeri} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{K} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

olsaydı, η "magnetik yük" ve \vec{K} "magnetik yükün akımı" olurdu. Elektrik yükün korunumu gibi, magnetik yükün korunumu da doğru olurdu [(iii) denkleminin diverjansı alınır]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{K} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Bir magnetik yük olsaydı, Maxwell denklemlerine çok güzel uyardı. Fakat, yapılan tüm araştırmalarda böyle bir yüke rastlanmadı; günümüzdeki bilgiye göre, η ve \vec{K} tüm evrende sıfırdır. Bu bakımdan Maxwell denklemleri \vec{E} ve \vec{B} 'ye göre simetrik değildirler: elektrik monopoli vardır, fakat magnetik monopoli yoktur. [Kuantum elektrodinamiğinde magnetik yükün olmayışı sadece estetik bir bozukluk değildir; Dirac'ın gösterdiği gibi, magnetik monopollerin varlığı elektrik yükünün neden kuantalanmış olduğunu açıklayabilirdi (bkz. Problem 7.52).]

Problem 7.33 s_1 ve s_2 gibi iki magnetik yük için "Coulomb yasası" şöyle olurdu:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{s_1 s_2}{r^2} \hat{r}$$

\vec{E} ve \vec{B} alanlarında \vec{v} hızıyla hareket eden bir magnetik yük üzerindeki "Lorentz kuvveti" ifadesini çıkarın.

7.3.4 Madde İçinde Maxwell Denklemleri

(7.41) ifadeleriyle verilen Maxwell denklemleri kendi içinde kapalı ve tutarlıdır. Fakat, içinde elektrik polarizasyon veya magnetizasyon bulunan madde ortamlarında çalışırken, bu denklemleri daha kullanışlı halde yazabiliriz. Çünkü, örneğin polarize olmuş madde içindeki "bağlı" yükler üzerinde doğrudan bir kontrolümüz yoktur; bunların Maxwell denklemlerinde yer alması çözümü güçleştirir. Şimdi Maxwell denklemlerini sadece "serbest" yükler ve akımlar cinsinden ifade edelim.

Statik durumda öğrendiğimiz gibi, \vec{P} polarizasyonu sonucu, (4.12) denkleminde göre, bağlı yük yoğunluğu oluşuyordu:

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (7.44)$$

olur. Benzer şekilde, \vec{M} magnetizasyonu, (6.13) denkleminde verilen bir bağlı akım yoğunluğu oluşturur:

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (7.45)$$

Statik olmayan durumda yeni bir etki vardır: elektrik polarizasyonundaki değişme yeni bir tür (bunu \vec{J}_p ile göstereyim) akım yoğunluğu oluşturur ve bunun da toplam akıma eklenmesi gerekir. Bunu anlamak için, Şek. 7.43'teki polarize olmuş madde içinde küçük bir tüp gözönüne alalım: Tüpün taban yüzeylerinden birinde $\sigma_p = P$ ve diğerinde $-\sigma_p$ yüzey



Şekil 7.43

yükleri oluşur. Şimdi P arttığında, buna bağlı olarak her iki yüzeydeki yükler de artar, dolayısıyla küçük bir akım oluşur:

$$dI = \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} da_{\perp} = \frac{\partial P}{\partial t} da_{\perp}$$

Buradan "polarizasyon akım yoğunluğu" bulunur:

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (7.46)$$

Bu polarizasyon akımını \vec{J}_b bağlı akımıyla karıştırmamak gerekir. \vec{J}_b akımı ortamın magnetizasyonundan, yani elektronların yörünge ve spin hareketinden kaynaklanır. Buna karşılık \vec{J}_p akımı, polarizasyon değiştiğinde yüklerin öteleme hareketinden kaynaklanır. Bu akımın da süreklilik denklemini sağladığını gösterebiliriz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_p = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) = -\frac{\partial \rho_b}{\partial t}$$

Bu incelemenin ışığında, toplam yük yoğunluğu iki terimden

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (7.47)$$

ve toplam akım yoğunluğu üç terimden oluşacaktır:

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p = \vec{J}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (7.48)$$

Buna göre, Gauss yasası şöyle yazılır:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P})$$

veya

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (7.49)$$

Burada \vec{D} , daha önce statik durumda olduğu gibi

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (7.50)$$

olur. Öte yandan, Ampere denkleminin düzeltilmiş şekli şöyle yazılır:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

veya

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (7.51)$$

Burada yine \vec{H} magnetostatikteki gibi tanımlanmıştır:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (7.52)$$

Faraday yasası ve $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ denklemi, serbest yük ve akımların ayrı yazılmasından etkilenmezler.

Buna göre, serbest yük ve akımlar cinsinden Maxwell denklemleri şöyle ifade edilir:

(i)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0}$
(ii)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
(iii)	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
(iv)	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

(7.53)

Bazı fizikçiler bu denklemlere "gerçek" Maxwell denklemleri gözüyle bakarlar; fakat bunların (7.41) denklemlerinden daha "genel" bir yanları yoktur, sadece yük ve akımların serbest ve serbest olmayan iki gruba ayrılmış olmasını yansıtır. Üstelik, şimdi hem \vec{E} ve \vec{D} , hem de \vec{B} ve \vec{H} alanları birlikte yer alırlar. Ayrıca, \vec{D} ve \vec{H} için (7.50) ve (7.52) tanımları eklenmelidir. Buna ek olarak, ortama bağlı olan \vec{P} ve \vec{M} vektörleri de tanımlanmalıdır.

Lineer ortamlar için bu ek bağıntılar şöyle olur:

$$\left. \begin{aligned} \vec{P} &= \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ \vec{M} &= \chi_m \vec{H} \end{aligned} \right\} \quad \text{ve} \quad \left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

\vec{D} vektörüne elektrik "deplasman" vektörü denildiğini söylemiştik; buna benzeterek, 4. Maxwell denklemindeki ikinci terime "deplasman akımı" denir:

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (7.55)$$

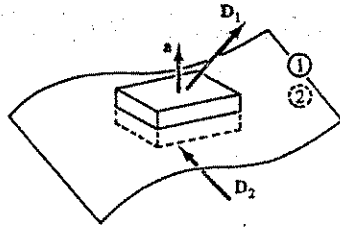
Problem 7.34 $\nu = 4 \times 10^8$ Hz frekansta deniz suyunun elektrik ve magnetik geçirgenlikleri $\epsilon = 81\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ olup, öz direnci $\rho = 0.23 \Omega \cdot m$ dir. İletkenlik akımının deplasman akımına oranı ne olur? (Yol gösterme: Deniz suyuna batırılmış bir düzlem kapasitöre $V_0 \cos(2\pi\nu t)$ potansiyel farkı uygulandığını düşünün.)

7.3.5 Sınır Koşulları

Genel olarak \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} ve \vec{H} alanları, iki ortamı birbirinden ayıran sınırdan, veya σ yüzey yükü ve \vec{K} yüzey akımı bulunan yüzeylerde süreksiz olurlar. Bu süreksizliğin miktarı Maxwell denklemlerinden tayin edilebilir.

Önce, (7.53) denklemlerinin integral ifadelerini yazalım:

$$\left. \begin{aligned}
 (i) \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} &= Q_{iS} \\
 (ii) \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} &= 0 \\
 (iii) \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \\
 (iv) \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I'_{iS} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{a}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Kapaklı herhangi bir } S \text{ yüzeyi} \\ \\ \text{Kapaklı } C \text{ eğrisinin sınırladığı } S \text{ yüzeyi} \end{array} \quad (7.56)$$



Şekil 7.44

(i) denklemini Şek. 7.44'deki sınırın iki tarafına uzanan ince bir tablet üzerinde uygulayalım:

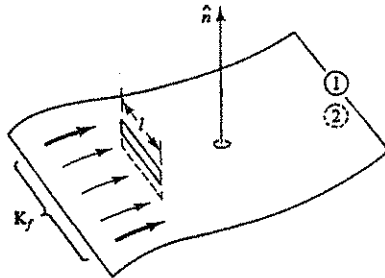
$$\vec{D}_1 \cdot \vec{a} - \vec{D}_2 \cdot \vec{a} = \sigma_f a$$

(Tabletin yan kenarları sıfır limitine gittiğinde, hacim içindeki yükler integrale katkıda bulunmazlar.) Buna göre, \vec{D} 'nin arakesit yüzeyine dik yöndeki bileşenindeki süreksizlik şöyle olur:

$$D_{1\perp} - D_{2\perp} = \sigma_f \quad (7.57)$$

Aynı düşünce yöntemiyle (ii) denklemi ele alınırsa, \vec{B} 'nin dik bileşeni sürekli bulunur:

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \quad (7.58)$$



Şekil 7.45

(iii) denklemini uygulamak üzere, Şek. 7.45'teki ince Ampere çevrimi seçilirse

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{l} - \vec{E}_2 \cdot \vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

(Sonsuz küçük yan kenarların katkısı yok sayıldı.) Çevrimin yan kenar uzunluğu sıfıra giderken, içerdeki akı da sıfıra gider. Buna göre

$$\vec{E}_{1\parallel} - \vec{E}_{2\parallel} = 0 \quad (7.59)$$

olur, yani \vec{E} 'nin arakesite *paralel* bileşeni sınırda süreklidir. Aynı düşünce yöntemiyle, (iv) denkleminde

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{l} - \vec{H}_2 \cdot \vec{l} = I'_{iS}$$

yazılır; burada I'_{iS} Ampere çevrimi içinden geçen akıdır. (Çevrimin genişliği sıfıra giderken, *hacim* akımı sıfıra gider, fakat *yüzey* akımı bulunabilir.) Burada \hat{n} yüzey normal vektörü 2. ortamdan 1. 'ye doğru seçilirse, $\hat{n} \times \vec{l}$ çarpımı çevrime dik olacaktır,

$$\vec{I}'_{iS} = \vec{K}_f \cdot (\hat{n} \times \vec{l}) = (\vec{K}_f \times \hat{n}) \cdot \vec{l}$$

alınırsa,

$$\vec{H}_{1\parallel} - \vec{H}_{2\parallel} = \vec{K}_f \times \hat{n} \quad (7.60)$$

Buna göre, \vec{H} 'nin paralel bileşeni, serbest yüzey akımı kadar süreksiz olur.

(7.57)-(7.60) denklemleri elektromagnetik teorisinin en genel sınır koşullarıdır. Ortamlar *lineer* ise, bu koşulları sadece E ve B cinsinden ifade edebiliriz:

$$\left. \begin{aligned}
 (i) \quad \epsilon_1 E_{1\perp} - \epsilon_2 E_{2\perp} &= \sigma_f & (iii) \quad \vec{E}_{1\parallel} - \vec{E}_{2\parallel} &= 0 \\
 (ii) \quad B_{1\perp} - B_{2\perp} &= 0 & (iv) \quad \frac{\vec{B}_{1\parallel}}{\mu_1} - \frac{\vec{B}_{2\parallel}}{\mu_2} &= \vec{K}_f \times \hat{n}
 \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

Eğer, arakesitte serbest yük veya akım yoksa, bu koşullar daha da basitleşir:

$$\left. \begin{aligned}
 (i) \quad \epsilon_1 E_{1\perp} - \epsilon_2 E_{2\perp} &= 0 & (iii) \quad \vec{E}_{1\parallel} - \vec{E}_{2\parallel} &= 0 \\
 (ii) \quad B_{1\perp} - B_{2\perp} &= 0 & (iv) \quad \frac{\vec{B}_{1\parallel}}{\mu_1} - \frac{\vec{B}_{2\parallel}}{\mu_2} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (7.62)$$

Bu koşullar Bölüm 8'de inceleyeceğimiz yansıma ve kırılma teorisinin temelini oluştururlar.

7.4 ELEKTROMAGNETİK TEORİNİN POTANSİYEL FORMÜLASYONU

7.4.1 Skaler ve Vektör Potansiyeller

Elektrostatikte $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ olma özelliğinden yararlanıp, elektrik alanı skaler bir potansiyelin gradyanı olarak $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ şeklinde yazabilmiştik. Elektrodinamikte bu mümkün değildir, çünkü \vec{E} 'nin rotasyoneli artık sıfırdan farklıdır.

Fakat, \vec{B} 'nin diverjansı hala sıfır olduğundan, magnetostatikte olduğu gibi, yine

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (7.63)$$

şeklinde yazabiliriz. Bunu Faraday yasasında kullanırsak

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

olur; yani rotasyoneli sıfır olan bir büyüklüktür. Şimdi bunu skaler bir potansiyelin gradyanı olarak yazabiliriz:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V$$

Böylece, \vec{E} alanının V ve \vec{A} cinsinden ifadesi bulunur:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7.64)$$

(7.63) ve (7.64) denklemlerindeki potansiyel formülasyonu (ii). ve (iii). Maxwell denklemlerini otomatik olarak sağlar. Diğer iki denklemden ne haber? (7.64) ifadesini (i) denkleminde yerine koyalım:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.65)$$

Bu, Poisson denkleminin yerine geçen ifade olur. Yine, potansiyelli ifadeleri (iv) denkleminde kullanırsak

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

olur. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ vektör özdeşliği kullanılır ve gruplandırma yapılırsa

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \quad (7.66)$$

(7.65) ve (7.66) denklemleri Maxwell denklemlerindeki tüm bilgiye eşdeğer olurlar.

Örnek 7.14:

$$V = 0 \quad \text{ve} \quad \vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \alpha}{4c} (ct - |x|)^2 \hat{k} & (|x| < ct \text{ için}) \\ 0 & (|x| > ct \text{ için}) \end{cases}$$

potansiyellerine yol açan yük ve akım yoğunluklarını bulun. (α bir sabit ve $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ dir.)

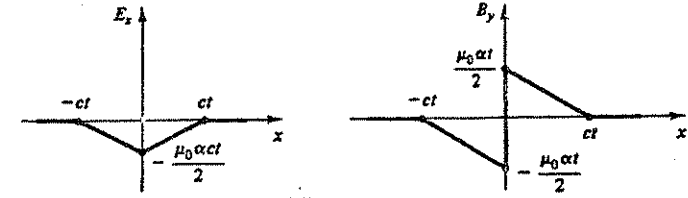
Çözüm: Önce, (7.63) ve (7.64) denklemlerinden elektrik ve magnetik alanları bulalım:

$$\vec{E} = 0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \alpha}{2} (ct - |x|) \hat{k}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\mu_0 \alpha}{4c} \frac{\partial}{\partial x} (ct - |x|)^2 \hat{k} = \pm \frac{\mu_0 \alpha}{2c} (ct - |x|) \hat{k}$$

($x > 0$ için artı, $x < 0$ için eksi alınır.) Bu sonuç $|x| < ct$ içindir.

$|x| > ct$ olduğunda, Şek. 7.46'da görüldüğü gibi, $\vec{E} = \vec{B} = 0$ olur.



Şekil 7.46

Şimdi, önümüze gelen tüm kısmi türevleri alırsak

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \mp \frac{\mu_0 \alpha}{2} \hat{j}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0 \alpha}{2c} \hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \alpha c}{2} \hat{k}, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \pm \frac{\mu_0 \alpha}{2} \hat{j}$$

Bu ifadeleri ($c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ olduğuna dikkat ederek) (7.41) Maxwell denklemlerinde yerine koyduğumuzda, $\rho = \vec{J} = 0$ bulunur. Fakat, \vec{B} ifadesinin $x = 0$ 'da süreksiz olması, yz -düzleminde bir \vec{K} yüzey akımı olduğunu haber verir. Çevrede magnetik madde olmadığını varsayarsak ($\mu = \mu_0$), (iv) sınır koşulu [(7.61) denklemi]

$$\alpha \hat{j} = \vec{K} \times \hat{i}$$

olur. Buradan yüzey akımı bulunur:

$$\vec{K} = \alpha t \hat{k}$$

Bu, $x = 0$ düzleminde x -yönünde akan ve $t = 0$ anında başlayıp giderek artan bir akımdır.

7.4.2 Ayar Dönüşümleri

Yukarda bulduğumuz (7.65) ve (7.66) denklemlerinin karmaşık oluşu, potansiyel yaklaşımının pek de avantajlı olmadığını akla getirebilir. Fakat, hiç olmazsa altı bilinmeyenli (\vec{E} ve \vec{B} bileşenleri) bir problemi dört bilinmeyene (skaler V ile vektör \vec{A}) indirgemiş olduk.

Bu iki denklem altında potansiyelleri tam olarak belirlemez; V ve \vec{A} üzerine ek bazı kısıtlamalar getirebiliriz. Bunun nasıl yapılacağını görmek için, aynı elektrik ve magnetik alanı veren (V, \vec{A}) ve (V', \vec{A}') gibi iki farklı potansiyel çifti gözönüne alalım. Bunlar arasındaki ilişki nasıldır? Aralarındaki farkları $\vec{\alpha}, \beta$ fonksiyonlarıyla gösterebiliriz:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha} \quad \text{ve} \quad V' = V + \beta$$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ bağıntısına göre, bu iki vektör potansiyelin aynı \vec{B} alanını vermesi için

$$\vec{\nabla} \times \vec{\alpha} = 0$$

olmalıdır. Buna göre, $\vec{\alpha}$ skaler bir fonksiyonun gradyanı olarak yazılabilir:

$$\vec{\alpha} = \vec{\nabla} \lambda$$

Öte yandan, iki potansiyelin aynı elektrik alanı vermesi için, $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \partial \vec{A} / \partial t$ bağıntısına göre,

$$\vec{\nabla} \beta + \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad \text{veya} \quad \vec{\nabla} \left(\beta + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) = 0$$

olmalıdır. Parantez içindeki terimin türevi sıfır olduğuna göre, \vec{r} değişkenine göre sabit olmalıdır. Buna göre,

$$\beta = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

seçilirse, $\vec{E}' = \vec{E}$ olacaktır.

Sonuç:

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda \\ V' &= V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (7.67)$$

Bunun anlamı şudur: Herhangi bir skaler λ fonksiyonu alıp, bunun diverjansını \vec{A} ya ekler ve aynı zamanda $\partial \lambda / \partial t$ türevini V den çıkarırsak, fiziksel \vec{E} ve \vec{B} alanları hiçbir değişikliğe uğramaz. V ve \vec{A} potansiyellerinde yapılan bu tür değişimlere **ayar dönüşümleri** denir. Bu keyflik, karmaşık yapıdaki (7.65) ve (7.66) denklemlerini basitleştirmekte kullanılabilir. Magnetostatikte $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ seçimi uygun olmuştur [bkz. (5.55) denklemi]. Elektrodinamikte neyin uygun olacağı pek açık değildir; her probleme göre uygun olan ayar dönüşümü farklıdır. Bu dönüşümler içinde en popüler olan ikisini ele alacağız.

Problem 7.35

$$V(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qt}{r^2} \hat{r}$$

potansiyellerine karşılık gelen yük ve akım dağılımlarını bulun.

Problem 7.36 $V = 0$ ve $\vec{A} = A_0 \sin(\kappa x - \omega t) \hat{j}$ potansiyelleri veriliyor (A_0, ω ve κ birer sabit). \vec{E} ve \vec{B} alanlarını bulun ve boşlukta Maxwell denklemlerini sağladıklarını gösterin. Bunun için ω ve κ hangi koşulu sağlamalıdır?

Problem 7.37 $\lambda = -qt/(4\pi\epsilon_0 r)$ ayar fonksiyonunu kullanarak, Problem 7.35'teki potansiyellerin dönüşümünü yapın ve sonucu yorumlayın.

7.4.3 Coulomb Ayarı ve Lorentz Ayarı

Coulomb ayarı. Bu ayarda, magnetostatikte olduğu gibi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (7.68)$$

seçilir. Buna göre, (7.65) denklemi şöyle sadeleşir:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.69)$$

Bu, bildiğimiz Poisson denklemi olup çözümü bellidir. Sonsuzda $V = 0$ seçilirse

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dr}{R} \quad (7.70)$$

olup, tıpkı elektrostatikte potansiyel ifadesi gibidir. Fakat boşuna ümitlenmeyin—elektrostatikte durumun tersine, sadece V 'yi bilmekle \vec{E} alanını bulamazsınız; (7.64) formülüne göre \vec{A} da gerekir.

(7.70) formülünde bir tuhaflık vardır: bu ifadeye göre, bir noktadaki potansiyel, uzayın her noktasında *şu andaki* yük dağılımıyla tayin edilmektedir. Laboratuarda bir elektronu

kımlıdattığımız anda, Ay üzerindeki V potansiyeli değişecektir. Özel görelilik teorisine göre hiçbir mesaj ışık hızından daha hızlı iletilemez. Bu durumda, yukardaki V formülü size pek inandırıcı gelmeyebilir. Oysa, önemli nokta şudur: V potansiyeli *fiziksel* olarak ölçülen bir büyüklük değildir—Ay'daki biri ancak \vec{E} alanını ölçebilir ve bu ölçüm \vec{A} potansiyelini de içerir. Yani, Coulomb ayarında, ρ daki bir değişme aynı anda V potansiyeline yansır, ama $(-\vec{\nabla} V - \partial \vec{A} / \partial t)$ toplamına yansmaz. Bu değişme "haberi" geldiğinde \vec{E} değişir.

Coulomb ayarının avantajı skaler potansiyelin hesabını kolaylaştırmasıdır. Dezavantajı ise, \vec{A} 'nın hesabını zorlaştırması olur. \vec{A} 'nın sağladığı (7.66) denkleminin Coulomb ayarındaki ifadesi şöyle olur:

$$(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}) = -\mu_0 \vec{J} - \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (7.71)$$

Lorentz ayarı. Bu ayarda $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ şöyle seçilir:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad (7.72)$$

Bu seçim sonucu (7.66) denkleminde ortadaki terim sıfır olur ve

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad (7.73)$$

bulunur. Öte yandan, V 'nin sağladığı (7.65) denklemi şöyle olur:

$$\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.74)$$

Lorentz ayarının avantajı V ile \vec{A} denklemlerinin aynı biçimde oluşup oluşmadır. Burada kısaltma olarak, **d'Alembertian operatörü** denilen şöyle bir diferansiyel operatör tanımlanır:

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (7.75)$$

Buna göre, potansiyellerin sağladıkları denklemler

$$\left. \begin{aligned} \square^2 \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \square^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \quad (7.76)$$

V ve \vec{A} 'nın eşit muamele gördüğü bu ayar, özellikle görelilik teorisinde büyük kolaylık sağlar; dört boyutlu uzayda d'Alembertian operatörü Laplasyen operatörünün görevini üstlenir. (7.76) denklemleri Poisson denkleminin dört boyutlu karşılığı olurlar.

Bu kitapta bundan böyle sadece Lorentz ayarı kullanacağız. Buna göre, tüm elektromagnetik teori, verilen ρ ve \vec{J} için, (7.76) denklemlerinin çözümünü aramaktan ibaret olur. Bu konuya Bölüm 9'da döneceğiz.

Problem 7.38 Örnek 7.14, Problem 7.35 ve 7.36'daki potansiyellerden hangileri Coulomb ayarında, hangileri Lorentz ayarında yazılmışlardır?

Problem 7.39 Bölüm 5'te, diverjansı sıfır olan bir vektör potansiyelin daima seçilebileceğini söylemiştim (Coulomb ayarı). Benzer şekilde, vektör potansiyelin $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\epsilon_0}{4\pi} (\partial V / \partial t)$ olacak şekilde daima seçilebileceğini gösterin. Her zaman $V = 0$ seçilebilir mi? $\vec{A} = 0$ seçilebilir mi?

7.4.4 Lorentz Kuvvetinin Potansiyel İfadesi

Lorentz kuvvetini potansiyeller cinsinden yazmak yararlı olur. Newton'un hareket yasası \vec{p} momentumu cinsinden yazılırsa

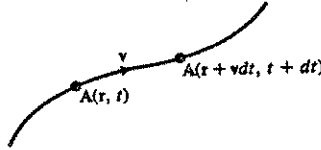
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \left[-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]$$

Son terimi indirgemek için 4. çarpım kuralını uyguluyoruz:

$$\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

Parçacığın \vec{v} hızı sadece t zamanının fonksiyonu olup konumdan bağımsızdır. Buna göre

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{\nabla}(V - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right]$$



Şekil 7.47

Burada tam türev denilen bir büyüklük şöyle tanımlanır: Parçacığın t anında \vec{r} konumlu yerdeki vektör potansiyeli $\vec{A}(\vec{r}, t)$, daha sonraki $t + dt$ anında $(\vec{r} + \vec{v} dt)$ konumlu yerdeki potansiyeli $\vec{A}(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt)$ olsun (Şek. 7.47). Potansiyeldeki artış Taylor açılımı kullanılarak şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \vec{A}(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt) - \vec{A}(\vec{r}, t) \\ &= \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right) (v_x dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right) (v_y dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \right) (v_z dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dt \end{aligned}$$

Her iki taraf dt ile bölünürse,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad (7.77)$$

Bu, tam türevin tanımıdır. Yüklü parçacık hareket ederken iki tür "değişiklik" hisseder. Birincisi, potansiyelin kendisi zamana bağlı olarak değişmektedir; ikincisi ise parçacık uzayda yeni bir konuma geçtiğinde, potansiyel uzayda değişmiş olur. (7.77) denklemindeki iki terim bunu ifade ederler.

Tam türev kullanılırsa, Lorentz kuvveti şöyle yazılır:

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} + q\vec{A}) = -\vec{\nabla}[q(V - \vec{v} \cdot \vec{A})] \quad (7.78)$$

Bu ifade, potansiyel enerjisi U olan bir parçacığın $d\vec{p}/dt = -\vec{\nabla}U$ hareket denklemi yapısındadır. Burada momentum rolünü üstlenen büyüklük

$$\vec{p}_{\text{kanon}} = \vec{p} + q\vec{A} \quad (7.79)$$

olup kanonik momentum adını alır. U potansiyeli rolünde ise, hıza bağlı şu büyüklük olur:

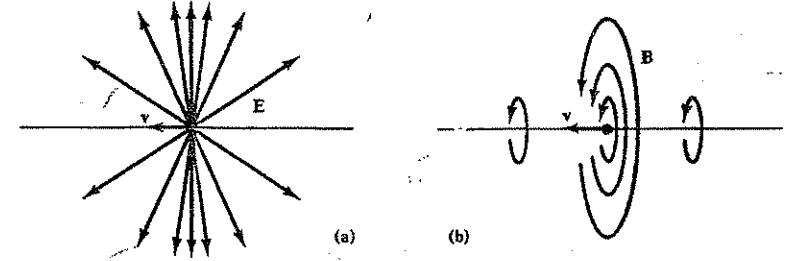
$$U = q(V - \vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (7.80)$$

Problem 7.40 Düzgün magnetik alanın vektör potansiyeli $\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B})$ dir (bkz. Problem 5.27). Bu sistem için $d\vec{A}/dt = -\frac{1}{2}(\vec{v} \times \vec{B})$ olduğunu gösterin ve (7.78) denkleminde doğru hareket denklemi bulunduğunu gösterin.

7.5 ELEKTRODİNAMİKTE ENERJİ VE MOMENTUM

7.5.1 Elektrodinamikte Newton'un 3. Yasası

z -ekseni boyunca sabit v hızıyla giden noktasal bir q yükü düşünün. Bu yükün elektrik alanı, hareket ettiği için, Coulomb yasasıyla ifade edilemez. Fakat yine de \vec{E} alanı, Bölüm 9'da göreceğimiz gibi, yükün o andaki konumundan dışa doğru radyal yönde olacaktır (Şek. 7.48a). Öte yandan, hareketli noktasal yük kararlı bir akım sayılamayacağından, magnetik alanı da Biot-Savart yasasıyla ifade edilemez. Fakat, yine Bölüm 9'da ispat ettiğimiz gibi, \vec{B} alan çizgileri gidiş yolu çevresinde dolanmış olacaktır (Şek. 7.48b).

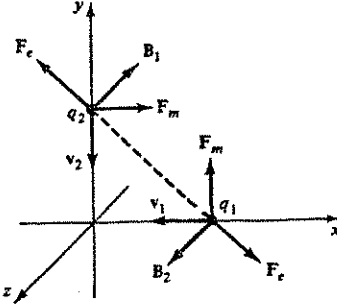


Şekil 7.48

Şimdi bu yükün, y -ekseni boyunca aynı hızla gitmekte olan diğer özdeş bir yükle karşılaştığını düşünelim. Bunlar arasında oluşan elektromagnetik kuvvet her ikisini de eksenler dışına saptırmak isteyecektir; ama yüklerin raylar üzerinde gittiğini, dolayısıyla aynı yön ve hızlarını koruduklarını varsayalım (Şek. 7.49). Bu yükler arasındaki elektriksiz kuvvet iticidir. Peki magnetik kuvvet nasıl olur? q_2 yükünün bulunduğu yerde q_1 'in magnetik alanı sayfa düzlemi içine doğru, dolayısıyla q_2 'ye etkiyen magnetik kuvvet sağa doğru olur. Oysa, q_1 yükünün bulunduğu yerde q_2 'nin magnetik alanı sayfa düzlemi dışına doğru, dolayısıyla q_1 'e etkiyen magnetik kuvvet yukarı doğru olur. İşte sorun buradadır: İki yükün birbirine uyguladığı etki-tepki kuvvetleri eşit, fakat zıt olmadığından Newton'un 3. yasasına aykırı olur. Elektrostatik ve magnetostatik 3. yasaya uyduğu halde, elektrodinamik uymamaktadır.

Hımm, bu çelişki gerçekten tuhaf, ama pratikte 3. yasayı ne zaman kullanıyoruz acaba? Yanıt: Her zaman! Örneğin, momentum korunumunu ispat ederken kullandığımız, iç kuvvetlerin birbirini sıfırlaması 3. yasasının bir sonucudur. Üçüncü yasayı çiğnerseniz, momentum korunumunu tehlikeye atarsınız, ve fizikte bundan daha kutsal bir yasa yok gibidir.

Elektrodinamikte momentum korunumu, elektrik ve magnetik alanların da momentum taşıdığı düşüncesiyle kurtarılabilmiz. Bu fikir bize pek şaşırtıcı gelmiyor, çünkü elektrik ve magnetik alanların enerji depoladığını kabul etmiştik. Şek. 7.49'daki iki noktasal yük örneğinde, parçacıkların kaybettikleri momentum alanlar tarafından götürülmüş olur. Yüklerin momentumuna alan momentumunu eklersek ancak momentum korunumu sağlanabilir. Bu kısımda elektromagnetik teoride enerji ve momentumun korunduğunu



Şekil 7.49

gösterirken, alan enerji ve momentumları için ifadeler bulacağız.

7.5.2 Poynting Teoremi

Bölüm 2'de statik bir yük dağılımını oluşturmak için elektriksel kuvvetlere karşı yapılması gereken iş formülünü bulmuştuk [(2.39) denklemi]:

$$W_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

Burada \vec{E} ortamdaki net elektrik alanıdır. Benzer şekilde, bir akım dağılımını sürdürebilmek için, zıt emk'lara karşı yapılması gereken iş şöyleydi [(7.35) denklemi]:

$$W_B = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$

Burada \vec{B} bileşke magnetik alanıdır. Buna göre, elektrik ve magnetik alanların birlikte bulunduğu bir sistemde depolanan toplam enerjinin

$$W_{EB} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau \quad (7.81)$$

olması beklenir. Şimdi, elektromagnetik alanda enerji korunumu çerçevesinde, bu sonucun genel ispatını yapalım.

Belirli bir t anında \vec{E} ve \vec{B} alanlarına yolaçan bir yük ve akım dağılımı olsun. dt kadar zaman sonra yükler bir miktar yer değiştirmiş olacaktır. Soru: dt zaman aralığında elektromagnetik kuvvetler bu yükler üzerinde ne kadar iş yapar? Lorentz kuvveti ifadesine göre, küçük bir dq yükünün $d\vec{l}$ kadar yer değiştirmesi sırasında yapılan iş

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = dq (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = \vec{E} \cdot \vec{v} dq dt$$

olur. Ortamdaki ρ ve \vec{J} dağılımları cinsinden $dq = \rho d\tau$ ve $\rho \vec{v} = \vec{J}$ olur. Buna göre, sonlu V hacmi içindeki tüm yüklerin hareketi sırasında birim zamanda yapılan iş

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) d\tau \quad (7.82)$$

olur. O halde, $(\vec{E} \cdot \vec{J})$ çarpımı birim hacimde ve birim zamanda yapılan iş—yani, birim hacimde harcanan güç olur. Buradaki \vec{J} çarpanını magnetik alan cinsinden ifade etmek için, Ampere yasasını kullanalım:

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

6. çarpım kuralına göre

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

alınır ve $(\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t)$ Faraday yasası kullanılırsa

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

bulunur. Şu iki terimi değişik yazalım:

$$\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (B^2) \quad \text{ve} \quad \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2)$$

Buna göre

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (7.83)$$

olur. Bu ifadeyi (7.82) denklemine yerine koyar ve ikinci terime Stokes teoremini uygularsak

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} \quad (7.84)$$

olur; burada V hacmini saran kapalı yüzey S dir. Bu sonuç Poynting teoremi adıyla bilinir; elektrodinamikte iş-enerji teoreminin karşılığıdır. Sağ taraftaki birinci integral alanlarda depolanan enerji olup (7.81) denklemdeki W_{EB} dir. İkinci terim V hacminin yüzeyinden dışarı enerji akışını temsil eder. Poynting teoremine göre, *elektromagnetik kuvvetlerin yaptığı iş, alanlarda depolanan enerjideki azalma ile yüzeyden kaybedilen enerjinin toplamına eşit olur.*

Birim yüzeyden birim zamanda geçen enerjiye Poynting vektörü denir:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (7.85)$$

$\vec{S} \cdot d\vec{a}$ çarpımı $d\vec{a}$ yüzey elemanını birim zamanda geçen enerji, yani *enerji akısı* (veya, *\vec{S} enerji akı yoğunluğu*) olur. İlerleyen bölümlerde Poynting vektörünün birçok uygulamasını yapacağız.

O halde, Poynting teoremini şöyle yazabiliriz:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dW_{EB}}{dt} - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a} \quad (7.86)$$

Yükler üzerinde yapılan iş bunların mekanik (kinetik veya potansiyel) enerjisini artıracaktır. Bu mekanik enerji yoğunluğunu U_M ile gösterirsek

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V U_M d\tau \quad (7.87)$$

olur. Alanlarda depolanan enerji yoğunluğunu da U_{EB} ile gösterelim:

$$U_{EB} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (7.88)$$

Buna göre,

$$\frac{d}{dt} \int_V (U_M + U_{EB}) = - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a} = - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{S}) d\tau$$

veya, iki tarafın integrali eşitlenirse

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} (U_M + U_{EB}) \quad (7.89)$$

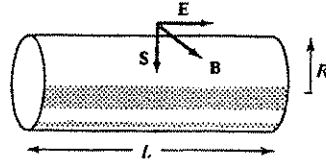
Bu sonuç Poynting teoreminin diferansiyel ifadesidir. Bunu yük korunumunu ifade eden süreklilik denklemiyle karşılaştırın:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Yük yoğunluğu yerine toplam (mekanik+elektromagnetik) enerji yoğunluğu, akım yoğunluğu yerine de, enerji akışını temsil eden \vec{S} Poynting vektörü gelmiştir.

Eğer ortamda lineer dielektrik, diamagnetik veya paramagnetik maddeler varsa, sadece serbest yük ve akımlar üzerinde yapılan iş hesaplandığında, enerji yoğunluğu $\frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$ ve Poynting vektörü $(\vec{E} \times \vec{H})$ olur.

Örnek 7.15: I akımı geçen R dirençli bir telde birim zamanda harcanan enerjiyi Poynting vektörüyle hesaplayın.



Şekil 7.50

Çözüm : Telden akım geçtiğinde elektromagnetik iş yapılır ve bu Joule ısı olarak telin ısınmasına yol açar [(7.6) formülü]. Elbette, bu enerjiyi hesaplamamızın daha kolay yolları vardır; burada Poynting vektöründen giderek hesaplayalım. Tel içinde düzgün elektrik alan olduğunu varsaydığımızda

$$E = \frac{V}{L}$$

olur. Burada V telin iki ucu arasındaki potansiyel farkı ve L telin uzunluğudur (Şek. 7.50). Magnetik alan tel çevresinde dolanımly yönde olup, yüzeydeki değeri

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

olur. Buna göre, E ve B alanları birbirine dik olduğundan, yüzeyde Poynting vektörünün büyüklüğü

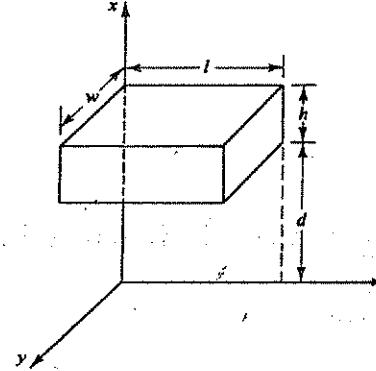
$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = \frac{1}{\mu_0} \frac{V}{L} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{VI}{2\pi RL}$$

olup, radyal yönde içeri doğrudur. O halde, tel yüzeyinden birim zamanda geçen toplam enerji

$$\int \vec{S} \cdot d\vec{a} = S(2\pi RL) = VI$$

olur. Bu sonuç Kısım 7.1'de doğrudan yapılan hesapla aynıdır.

Problem 7.41 Örnek 7.13 ve Problem 7.29'daki kabloda iletilen gücü (birim zamandaki enerjiyi) hesaplayın. Teller arasında V potansiyel farkı olduğunu ve I akımının telin birinden gidip diğerinden geri döndüğünü varsayın.



Şekil 7.51

Problem 7.42 Örnek 7.14'de bulunan elektrik ve magnetik alanların, Şek. 7.51'deki dikdörtgen kutu içinde var olduklarını gözönüne alın. Prizmanın uzunluğu l , genişliği w ve yüksekliği h olup, yz -düzlemine d yükseklikte paraleldir.

- Kutu içinde $t_1 = d/c$ ve $t_2 = (d+h)/c$ zamanlarında depolanmış enerjiyi bulun.
- Poynting vektörünü bulun ve $t_1 < t < t_2$ zaman aralığında kutu içine birim zamanda geçen enerjiyi hesaplayın.
- (b) şıkkındaki sonucun t_1 'den t_2 'ye integralini alarak, (a) şıkkındaki enerjinin net akıya eşit olduğunu gösterin.

7.5.3 Maxwell Gerilme Tansörü

Şimdi V hacmindaki yükler üzerinde toplam kuvveti hesaplayalım:

$$\vec{F} = \int_V (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rho d\tau = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) d\tau \quad (7.90)$$

Birim hacimdeki kuvvet de şöyle olur:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (7.91)$$

Yine, bu ifadeyi alanlar cinsinden yazmak için, ρ ve \vec{J} 'yi (i) ve (iv) Maxwell denklemlerinden alalım:

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}$$

Vektör türevi için

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ve Faraday yasasından

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

ifadeleri kullanılırsa

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

yazılır. Buna göre

$$\vec{F} = \epsilon_0 [(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})] - \frac{1}{\mu_0} [\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

olur. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ olduğu için, ikinci parantezin içine $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B}$ terimini katarsak bir şey değişmez, ama ifade daha bir simetrik olur. Öte yandan, 4. çarpım kuralına göre

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}^2) = 2(\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} + 2\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (E^2) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$$

ve \vec{B} için aynı ifade geçerlidir. Böylece

$$\vec{F} = \epsilon_0 [(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}] - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (7.92)$$

Gerçekten berbat bir ifade! Bunu sadeleştirmek için Maxwell gerilme tansörünü tanımlayalım:

$$T_{ij} = \epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2) \quad (7.93)$$

Burada δ_{ij} Kronecker deltasıdır. i, j indisleri x, y, z koordinatlarını temsil ettiği için, gerilme tansörünün dokuz bileşeni vardır: $T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, \dots$ vb. Örneğin,

$$T_{xx} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2)$$

$$T_{xy} = \epsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0} B_x B_y$$

Bir indisli vektörleri oklu sembolle gösteriyorduk; benzer şekilde iki indisli T_{ij} çift okla gösterilir: \vec{T} . Bu tür bir tansörün bir \vec{a} vektörüyle skaler çarpımı alınabilir:

$$(\vec{a} \cdot \vec{T})_j = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij} \quad (7.94)$$

Geriye bir indis kaldığı için, bu işlemin sonucu da bir vektör olur. Özel olarak, \vec{T} 'nin diverjansının j bileşeni şöyle olur:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{T})_j = \epsilon_0 [(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})E_j + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2] + \frac{1}{\mu_0} [(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})B_j + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2]$$

Buna göre, birim hacimdeki kuvvetin (7.91) ifadesi şöyle olur:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \quad (7.95)$$

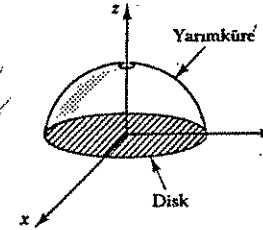
Burada \vec{S} Poynting vektörüdür.

V hacmindeki toplam kuvvetin (7.90) ifadesi de

$$\vec{F} = \oint_S \vec{T} \cdot d\vec{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} d\tau \quad (7.96)$$

olur; birinci integrali diverjans teoremiyle yüzey integraline dönüştürdük. Statik durumda (veya, $\int \vec{S} d\tau$ zamandan bağımsız olduğunda), ikinci terim yok olur ve yük dağılımı üzerindeki elektromagnetik kuvvet tümüyle sınırdaki gerilme tansörüyle belirlenir. Fiziksel olarak \vec{T} birim yüzeye etkiyen kuvvet, yani gerilme olur. Veya, T_{ij} bileşeni, j yönüne dik olan yüzey elemanına i yönünde etkiyen kuvettir. Köşegen elemanlar (T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}) basınçlar, köşegen dışı elemanlar ise (T_{xy}, T_{xz}, \dots) genlemeler (strain) olurlar.

Örnek 7.16: R yarıçaplı küre hacmi içinde toplam Q yükü düzgün dağılmıştır (Şek. 7.52). Kürenin "kuzey" yarımküresine etkiyen kuvveti bulun. (Bu, Problem 2.44'ün aynısıdır, fakat burada Maxwell gerilme tansörü ve (7.95) denklemiyle hesap yapacağız.)



Şekil 7.52

Çözüm: Kuzey yarımküresinin yüzeyi iki kısımdan oluşur: R yarıçaplı yarımküre yüzeyi ve $\theta = \pi/2$ 'deki tabanı kapatan disk yüzeyi. Yarımküre üzerinde yüzey elemanı radyal yönde olup

$$d\vec{a} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

ve bu yüzeyde elektrik alan

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{r}$$

olur. Yarımküre üzerindeki net kuvvetin z -yönünde olacağı açıktır. Buna göre, birim kuvvetin sadece z -bileşenine bakabiliriz:

$$(\vec{T} \cdot d\vec{a})_z = T_{zx} da_x + T_{zy} da_y + T_{zz} da_z$$

Kartezyen koordinatlarda

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

olduğundan, bu bileşenler hesaplanırsa

$$\begin{aligned} T_{zx} &= \epsilon_0 E_z E_x = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ T_{zy} &= \epsilon_0 E_z E_y = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \\ T_{zz} &= \frac{\epsilon_0}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (7.97)$$

Sonra, bu elemanlar yüzey eleman bileşenleriyle skaler çarpılır:

$$(\vec{T} \cdot d\vec{a})_z = T_{zx} da_x + T_{zy} da_y + T_{zz} da_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

O halde, yarımküre yüzeyi üzerindeki toplam kuvvet şöyle olur:

$$F_{\text{küre}} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q^2}{8R^2} \right)$$

Öte yandan, disk yüzeyinde yüzey elemanı dışa doğru, yani -z yönündedir:

$$d\vec{a} = -r dr d\theta \hat{k} \quad (7.98)$$

Elektrik alan ise, küre içindeki formülle yazılır:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r (\cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j})$$

Bu iki ifadeye göre, gerilme tansörünün sadece T_{zz} bileşeni gerekir:

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 r^2$$

Buna göre,

$$(\vec{T} \cdot d\vec{a})_z = T_{zz} da_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 r^3 dr d\phi$$

olur. Buradan disk üzerindeki toplam kuvvet bulunur:

$$F_{\text{disk}} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q^2}{16R^2} \right) \quad (7.99)$$

Nihayet, (7.97) ve (7.99) ifadeleri toplanarak, kuzey yarımküresi üzerindeki net kuvvet bulunur:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3Q^2}{16R^2} \right) \quad (7.100)$$

Problem 7.43 Yüzeyinde düzgün σ yük yoğunluğu bulunan R yarıçaplı küre, z-ekseni çevresinde ω açısal hızıyla dönmektedir. Kuzey ve güney yarımküreler arasındaki magnetik çekim kuvvetini bulun. (Bu, Problem 5.52 olarak çözülmüştü; burada Maxwell gerilme tansörünü kullanarak çözün.)

Problem 7.44 (a) Aralarında r uzaklığı bulunan özdeş iki q yükü ve bunlara orta noktasında dik olan düzlemi gözönüne alın. Bu düzlem üzerinde Maxwell gerilme tansörünün integralini alarak, yüklerden birinin diğerine uyguladığı kuvveti hesaplayın.

(b) Aynı hesabı eşit ve zıt yükler için tekrarlayın.

7.5.4 Momentum Korunumu

Newton'un ikinci yasasına göre bir cisme etkiyen kuvvet momentumdaki değişme hızına eşittir:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

7.5. ELEKTRODİNAMİKTE ENERJİ VE MOMENTUM

Elektrodinamikte bu kuvvet (7.95) denklemiyle verilir:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} d\tau + \oint_S \vec{T} \cdot d\vec{a} \quad (7.101)$$

Bu denklem (7.86) Poynting teoremiyle aynı yapıdadır; dolayısıyla, aynı fiziksel yorum yapılabilir: birinci integral elektromagnetik alanlarda depolanan momentumdur:

$$\vec{p}_{EB} = \epsilon_0 \mu_0 \int_V \vec{S} d\tau \quad (7.102)$$

İkinci integral ise yüzeyden birim zamanda geçen momentum olur. O halde, (7.101) denklemi elektrodinamikte momentum korunumunun genel ifadesidir: yüklerin toplam (mekanik+elektromagnetik) momentumundaki artış alanlar tarafından getirilen momentuma eşit olur. (Burada V tüm uzay kabul edilirse, yüzeyden momentum akışı sıfır olur ve $\vec{p} + \vec{p}_{EB}$ sabit kalır.)

Yük ve enerji korunumlarında olduğu gibi, momentum korunumu da diferansiyel ifadeyle yazılabilir. Mekanik momentum yoğunluğunu \vec{P} ile ve alan momentum yoğunluğunu da \vec{P}_{EB} ile göstereyim. Buna göre

$$\vec{P}_{EB} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} \quad (7.103)$$

ile tanımlanırsa (7.101) şöyle ifade edilir:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{T}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{P} + \vec{P}_{EB}) \quad (7.104)$$

Nasıl ki Poynting teoreminde \vec{S} enerji akı yoğunluğu, veya süreklilik denkleminde \vec{J} akım yoğunluğu oluyorsa, burada da $(-\vec{T})$ momentum akı yoğunluğu olur. $-T_{ij}$ bileşeni, j yönündeki birim yüzeyi i yönünde birim zamanda geçen momentumdur. Dikkat ederseniz \vec{S} Poynting vektörü iki farklı görev üstlenmektedir: \vec{S} 'nin kendisi elektromagnetik enerji akışı olurken, $\epsilon_0 \mu_0 \vec{S}$ elektromagnetik alanda depolanan momentum olur. Benzer şekilde \vec{T} 'nin de ikili rolü vardır: \vec{T} 'nin kendisi bir yüzeye etkiyen elektromagnetik gerilme olurken, $-\vec{T}$ alanların taşıdığı momentum akışı olur.

Böylece, elektromagnetik alan enerji ve momentum taşıyan gerçek bir varlığa kavuşmuş olur. (7.88) denkleminde göre enerji taşır:

$$U_{EB} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

ve (7.103) denkleminde göre momentum taşır:

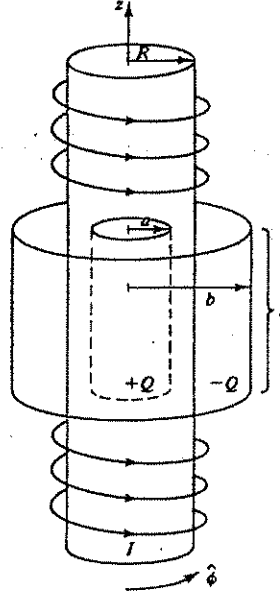
$$\vec{P}_{EB} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

Elektromagnetik alanın açısal momentumunu da ispatsız verelim:

$$\vec{L}_{EB} = \vec{r} \times \vec{P}_{EB} = \epsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (7.105)$$

Statik alanlar dahi, $\vec{E} \times \vec{B}$ sıfırdan farklı olduğu sürece, momentum taşırlar, ve ancak bu elektromagnetik alan katkıları hesaba katıldığında, klasik korunum yasaları geçerli olur.

Örnek 7.17: Üzerinden I akımı geçen ve birim uzunlukta N sarımdan oluşan sonsuz bir solenoit gözönüne alalım (Şek. 7.53). Solenoitle eş eksenli ve l uzunlukta iki silindirden, solenoit içinde olanın yarıçapı a ve yüzeyinde düzgün dağılmış toplam Q yükü bulunmakta, solenoit dışında olanın yarıçapı b ve yüzeyinde düzgün dağılmış toplam $-Q$ yükü bulunmaktadır ($l \gg b$ olduğunu varsayın). Solenoitteki akım yavaşça azaltıldığında, silindirler dönmeye başlar (bu etkiyi Örnek 7.11'de görmüştük). Soru: Silindirlerin açıl momentumu nereden geliyor?¹



Şekil 7.53

Yanıt: Daha önce elektromagnetik alanda depolanmıştı. Akım azaltılmadan önce, silindirler arasındaki bölgede bir elektrik alan

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l r} \hat{r}$$

ve solenoit içinde bir magnetik alan vardır:

$$\vec{B} = \mu_0 N I \hat{z}$$

Buna göre, $a < r < R$ bölgesindeki momentum yoğunluğu (7.103) formülüne göre bulunur:

$$\vec{P}_{EB} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = -\frac{\mu_0 N I Q}{2\pi l r} \hat{\phi}$$

Aynı bölgedeki açıl momentum yoğunluğu da

$$\vec{L}_{EB} = \vec{r} \times \vec{P}_{EB} = -\frac{\mu_0 N I Q}{2\pi l} \hat{z}$$

¹Bu örnek meşhur "Feynman disk paradoksu"nun değişik bir şeklidir (bkz. *The Feynman Lectures in Physics*, Addison-Wesley, 1964, cilt 2, sayfa 17-5).

olup sabittir. O halde, elektromagnetik alanın toplam açıl momentumunu bulmak için, $\pi(R^2 - a^2)l$ hacmiyle çarpmak yeter:

$$\vec{L}_{EB} = -\frac{1}{2}\mu_0 N I Q (R^2 - a^2) \hat{z} \quad (7.106)$$

Şimdi akım azaldığında, değişen magnetik alanda bir indüksiyon elektrik alanı oluşur. Dolanımli yönde olan bu alan Faraday yasasıyla bulunur:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_0 N I \frac{R^2}{r} \hat{\phi} & (r > R) \\ -\frac{1}{2}\mu_0 N I r \hat{\phi} & (r < R) \end{cases}$$

Buna göre, dıştaki silindire uygulanan tork

$$\vec{N}_b = \vec{r} \times (-Q\vec{E}) = \frac{1}{2}\mu_0 N Q R^2 I \hat{z}$$

olur ve kazandığı toplam açıl momentum, mekanikte bilinen $d\vec{L} = \vec{N} dt$ formülünün integraliyle hesaplanır:

$$\vec{L}_b = \frac{1}{2}\mu_0 N Q R^2 \hat{z} \int_I^0 \frac{dI}{dt} dt = -\frac{1}{2}\mu_0 N I Q R^2 \hat{z}$$

Benzer şekilde, içteki silindire uygulanan tork

$$\vec{N}_a = -\frac{1}{2}\mu_0 N Q a^2 I \hat{z}$$

ve bunun açıl momentum artışı

$$\vec{L}_a = -\frac{1}{2}\mu_0 N I Q a^2 \hat{z}$$

olur. Silindirlerin kazandığı toplam açıl momentum hesaplanırsa $\vec{L}_{EB} = \vec{L}_a + \vec{L}_b$ olur; yani, toplam açıl momentum korunmuştur.

Problem 7.45 Sonsuz bir düzlem kapasitörün $z = -d/2$ deki levhasında $-\sigma$ yüzey yükü ve $z = +d/2$ deki levhasında $+\sigma$ yüzey yükü bulunmaktadır.

(a) Levhalar arasındaki bölgede Maxwell gerilme tansörünün dokuz bileşenini hesaplayın. Yanıtınızı 3×3 bir matris olarak gösterin.

(b) (7.96) formülünü kullanarak, üstteki levhanın birim yüzeyine etkiyen kuvveti hesaplayın ve (2.44) formülüyle karşılaştırın.

(c) yz düzleminin (veya, levhalar arasında paralel herhangi bir yüzeyin) birim yüzeyini birim zamanda geçen momentum ne kadardır?

(d) Levhaları tutan başka bir kuvvet yoksa, bu momentumu soğurduklarında geri tepeler. Üstteki levhanın birim yüzeyini iten kuvveti hesaplayın ve (b) şıkkındaki yanıtınızla karşılaştırın. (Not: Bu, farklı bir kuvvet değildir; (b) şıkkında Lorentz kuvvetinden, (d) şıkkında momentum korunumundan hesaplanmaktadır.)

Problem 7.46 Örnek 7.17'de, magnetik alanı sıfırlamak yerine, silindirler arasındaki elektrik alanı sıfırladığımızı düşünelim. (Bu, silindirleri iletken bir telle birleştirerek sağlanabilir; fakat silindirler yine dönmekte serbest olmalıdırlar.) Teldeki $I'(t)$ akımına etkiyen magnetik kuvvetten giderek, silindirlerin yükleri boşalırken kazandıkları açıl momentumu hesaplayın. Bunu, (7.106) formülündeki elektromagnetik alanda depolanan ilk

açısal momentumla karşılaştırın. (Not: Burada açısal momentumun farklı bir mekanizmayla taşındığına dikkat edin; örnekte Faraday yasasıyla, burada ise Lorentz kuvvetiyle taşınmaktadır.)

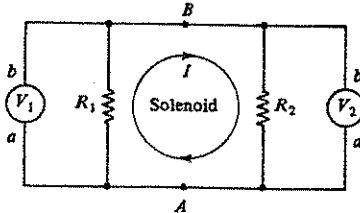
BÖLÜM 7 ÜZERİNE EK PROBLEMLER

Problem 7.47 Düzgün $\vec{B} = B_0 \hat{k}$ magnetik alanında, R yarıçaplı küresel iletken kabuk z -ekseni çevresinde ω açısal hızıyla dönmektedir. Kuzey kutbuyla ekvator arasında oluşan emk'yi bulun. (Yanıt: $\frac{1}{2} B_0 \omega R^2$.)

Problem 7.48 Problem 7.12'ye tekrar bakın ve, gerekirse Problem 5.58 sonucunu kullanın:

(a) Şek. 7.19'daki düzenekte kare halka sayfa düzlemiyle 45° açı altında bırakılıyor olsaydı, daha hızlı düşer miydi? İki limit hızın oranını bulun. Kare çerçeve rastgele yönde bırakılsaydı, hangi yönü seçerdi? (Yanıt: $(\sqrt{2} - 2y/s)^2$; burada s kenar uzunluğu, y kare merkezinin magnetik alan kenarından yüksekliğidir.)

(b) Çember şeklindeki çerçeve bırakıldığında, limit hızına erişinceye kadar geçen süre ne olur?



Şekil 7.54

Problem 7.49 Uzun bir solenoidte akım düzgün olarak artıyor, yani $\Phi = \alpha t$ şeklinde değişiyor (Şek. 7.54). Solenoidin iki karşılıklı tarafında A ve B noktaları arasında iki voltmetre ve R_1 , R_2 dirençleri bağlanıyor. Herbir voltmetre ne gösterir? (Voltmetre bağlandığı yol boyunca $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 'yi ölçer. Voltmetreleri ideal kabul edin, yani iç dirençleri sonsuz olup kendileri akım çekmesinler.) (Yanıt: $V_1 = \alpha R_1 / (R_1 + R_2)$; $V_2 = -\alpha R_2 / (R_1 + R_2)$. Aynı iki nokta arasına bağlı oldukları halde, $V_1 \neq V_2$ olduğuna dikkat edin.)

Problem 7.50 (a) Şek. 7.34'deki sistemin karşılıklı indüktansını (7.22) Neumann formülüyle hesaplayın. a 'nın küçük olduğunu ($a \ll b$, $a \ll z$) varsayın. Yanıtınızı Problem 7.18 ile karşılaştırın.

(b) Sonucu genelleştirerek (a artık küçük olmayabilir)

$$M = \frac{\mu_0 \pi}{2} \sqrt{ab} \beta \left(1 + 3\beta + \frac{75}{8} \beta^2 + \dots \right), \quad \left[\beta = \frac{ab}{z^2 + (a+b)^2} \right]$$

olduğunu gösterin.

Problem 7.51 $\vec{J}(\vec{r})$ zamandan bağımsız, fakat $\rho(\vec{r}, t)$ bağımlı bir sistem gözönüne alınıyor. (Bu, bir kapasitörün yükleniş sırasında olabilir)

(a) Uzayın herhangi bir noktasındaki yük yoğunluğunun, zamanın lineer fonksiyonu, yani

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) + \dot{\rho}(\vec{r}, 0)t$$

olduğunu gösterin. Burada $\dot{\rho}$, $t = 0$ anında ρ 'nun zamana göre türevidir. (Not: Bu elektrostatik veya magnetostatik bir durum değildir; ama şaşılacak tarafı, hem (2.6) Coulomb yasası ve hem de (5.35) Biot-Savart yasası geçerli olmaktadır. Bunun doğruluğu Maxwell denklemlerini sağlayarak gösterilebilir. Özel olarak:

(b)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \hat{r}}{r^2} d\tau$$

ile hesaplanan magnetik alanın, deplasman akımı Ampere yasasını sağladığını gösterin.

! Problem 7.52 Aralarında d uzaklığı bulunan bir q elektrik yükü ile bir g magnetik yükü olduğunu varsayalım. Bu yüklerin alanları sırasıyla şöyle olur:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \text{ve} \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g}{r^2}$$

Bu elektromagnetik alanda depolanan toplam açısal momentumu hesaplayın. (Yorum: Bu sistem Thomson monopolü adıyla bilinir. Sonuç aradaki uzaklıktan bağımsız olup (!) e 'den g 'ye yöneliktir. Kuantum mekanikinde açısal momentum \hbar sabitinin katları olan değerleri alabilir. Bu problemin sonucuna göre, eğer magnetik monopol varsa, $\mu_0 eg/4\pi = n\hbar/2$ bağıntısıyla ($n = 1, 2, 3, \dots$) elektrik ve magnetik yükler kuantalanmış olmalıdır. Bu düşünce 1931 yılında Dirac tarafından öne sürülmüştü.)

! Problem 7.53 Yüzeyinde Q yükü bulunan R yarıçaplı küre hacmi içinde düzgün $\vec{M} = M\hat{k}$ magnetizasyonu bulunmaktadır. Başlangıçta küre hareketsizdir.

(a) Elektromagnetik alanda depolanan açısal momentumu bulun.

(b) Kürenin magnetizasyonu yavaşça sıfırlanıyor. Faraday yasasını kullanarak indüksiyon elektrik alanını ve bu alanın küreye uyguladığı torku bulun. Bu sırada kürenin kazandığı toplam açısal momentumu hesaplayın.

(c) Kürenin magnetizasyonunu sıfırlamak yerine, kuzey kutbuna bağlı iletken bir telle yükünün boşaltıldığını varsayalım. Küre yüzeyindeki akımın yüzey yük yoğunluğunu düzgün tutacak şekilde geçtiğini varsayın. Lorentz kuvveti ifadesini kullanarak küreye uygulanan torku ve boşalma sırasında kürenin kazandığı toplam açısal momentumu hesaplayın. (Yanıt: $\frac{2}{9} \mu_0 MQR^2$.)

Problem 7.54 I akımı geçen sonsuz doğrusal telin dışındaki magnetik alan

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

olur. Tel a yarıçaplı silindirik şeklinde ve öziletkenliği σ ise, tel içindeki elektrik alan

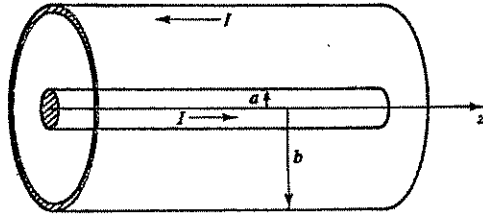
$$\vec{E} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \hat{z}$$

olur (Örnek 7.1 ve 7.3). Soru: Telin dışında elektrik alan ne olur? (Bu meşhur problem ilk kez Sommerfeld tarafından ele alınmış olup, yakın zamanlarda "Merzbacher bilmecesi" adıyla yeniden gündeme gelmiştir.) Yanıt devrenin nasıl tamamlandığına bağlı olmaktadır. Örneğin, akımın Şek. 7.55'teki gibi, b yarıçaplı ve telle eş eksenli, topraklanmış iletken silindirik yüzeyinden geri döndüğünü varsayalım. $a < r < b$ bölgesinde $V(r, z)$ potansiyeli Laplace denklemini sağlar ve sınır koşulları şöyle olur:

$$(i) \quad V(a, z) = -\frac{Iz}{\pi a^2 \sigma}, \quad (ii) \quad V(b, z) = 0$$

Maalesef bu koşullar da yeterli değildir; telin iki ucundaki sınır koşulları da belirtilmelidir. Literatürde bu sorunu aşmak için $V(r, z)$ 'nin z ile orantılı olduğu ifade edilir:

$$V(r, z) = z f(r)$$



Şekil 7.55

Bu varsayımına göre,

(a) $V(r, z)$ 'yi bulun.

(b) $\vec{E}(r, z)$ 'yi bulun.

(c) Tel yüzeyindeki σ yük yoğunluğunu bulun. (Bunu σ iletkenliğiyle karıştırmayın.)

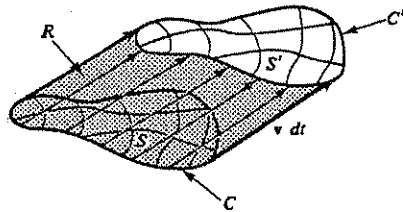
(d) Poynting vektörünü hesaplayın ve enerji akışını yorumlayın.

[Yanıt: $V = (-Iz/\pi a^2 \sigma) \ln(r/b)/\ln(a/b)$. Bu sonuç tuhaftır, çünkü E_r ve $\sigma(z)$, sonsuz doğrusal telde olmaması gerektiği halde, z 'ye bağımlı olurlar.]

Problem 7.55 Alfven teoremini ispatlayın: İdeal iletken bir akışkan içinde (örneğin, serbest elektron gazı), akışkanla beraber hareket eden kapalı bir çevrimdeki magnetik akı zamandan bağımsızdır. (Sanki, magnetik alan çizgileri akışkan içinde "donmuş" gibi olurlar.)

(a) (7.2) Ohm yasasını ve Faraday yasasını kullanarak, eğer $\sigma = \infty$ ve \vec{J} sonlu ise

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{olduğunu gösterin.}$$



Şekil 7.56

(b) t anında kapalı C eğrisini sınırlayan bir S yüzeyi, ve $t + dt$ anındaki yeni konumda kapalı eğriyi (C') sınırlayan bir S' yüzeyi olsun (Şek. 7.56). Buna göre, akıdaki değişme

$$d\Phi = \int_{S'} \vec{B}(t + dt) \cdot d\vec{a} - \int_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{a}$$

olur. Akılar arasında şu bağıntının doğruluğunu gösterin:

$$\int_{S'} \vec{B}(t + dt) \cdot d\vec{a} + \int_R \vec{B}(t + dt) \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{a}$$

(Burada R, C ile C' eğrilerini birleştiren şerittir.) Bu sonucu kullanarak, küçük bir dt artışı için

$$d\Phi = dt \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} - \int_R \vec{B}(t + dt) \cdot d\vec{a}$$

olduğunu gösterin. Kısım 7.13'teki yöntemi kullanarak, ikinci integrali şu şekle dönüştürün:

$$dt \oint_C (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}$$

ve sonra, Stokes teoremini kullanarak

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \cdot d\vec{a}$$

olduğunu gösterin. Bu ve (a) şikkının sonucu teoremin ispatı olur.

Problem 7.56 Hareketten kaynaklanan emk incelemesinde (Kısım 7.1.3) tel çerçevenin direnci R alınmış, dolayısıyla akım ifadesi $I = vBh/R$ olmuştu. Peki tel ideal iletken, yani R sıfır olsaydı, ne olurdu? Bu durumda akımı sınırlayan tek şey çerçevenin özindüktansından kaynaklanan zıt emk olur. Böyle bir çerçevenin basit harmonik hareket yapacağını gösterin ve frekansını bulun.

Problem 7.57 Bir elektromagnetik alan

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{r^2} \theta(vt - r) \hat{r} \quad \text{ve} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

olarak veriliyor. (Teta fonksiyonu Problem 1.44'de tanımlanmıştı.) Bu alanların Maxwell denklemlerinin herbirini sağladığını gösterin ve ρ, \vec{J} 'yi bulun. Bu alanların kaynaklanabileceği fiziksel bir durum düşünün.

Problem 7.58' Bir transformatör (bkz. Problem 7.22) genliği V_1 olan alternatif voltajı alıp V_2 genlikli alternatif voltajı veriyor. Voltaj oranı $V_2/V_1 = N_2/N_1$ şeklinde sarım sayılarına bağlıdır. $N_2 > N_1$ ise çıkış voltajı giriş voltajından büyük olur. Bu durum neden enerji korunumuna aykırı değildir? Yanıt: Güç, voltajla akımın çarpımıdır; voltaj artıyorsa, demek ki akım azalıyordur. Bu problemde bu işin nasıl olduğunu göreceğiz.

(a) İdeal bir transformatörde primer (birinci) ve sekonder (ikinci) devrede tüm sarımlardan geçen akı aynıdır. Bu durumda $M^2 = L_1 L_2$ olduğunu gösterin; M karşılıklı indüktans ve L_1, L_2 özindüktanslardır.

(b) Primer devreye $V_{in} = V_1 \cos \omega t$ voltajı veriliyor; sekonder devre bir R direncine bağlıdır. Her iki devredeki akımların

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = V_1 \cos \omega t, \quad \text{ve} \quad L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} + RI_2 = 0$$

bağıntılarını sağladıklarını gösterin.

(c) (a) sonucunu kullanarak, bu denklemleri $I_1(t)$ ve $I_2(t)$ için çözün. (I_1 'in doğru akım bileşeni olmadığını varsayın.)

(d) $V_{out} = RI_2$ çıkış voltajının V_{in} giriş voltajına oranının $V_{out}/V_{in} = N_2/N_1$ olduğunu gösterin.

(e) $P_{in} = V_{in} I_1$ giriş gücünü ve $P_{out} = V_{out} I_2$ çıkış gücünü hesaplayın. Bunların bir periyot-taki ortalama değerlerinin eşit olduğunu gösterin.

Problem 7.59 İdeal bir iletkende iletkenlik katsayısı sonsuz, dolayısıyla iletken içinde $\vec{E} = 0$ olur. Bu durumda net yük, elektrostatikte olduğu gibi, iletken yüzeyinde bulunur.

(a) İdeal bir iletken içinde magnetik alanın sabit (yani, $\partial \vec{B}/\partial t = 0$) olduğunu gösterin.

(b) Süperiletken maddelerde, buna ek olarak, daima $\vec{B} = 0$ olur. (İçerideki akımın dışa atılmasına Meissner etkisi denir.) Süperiletkenlerde akımın sadece yüzeyde olacağını gösterin.

(c) Süperiletkenlik, her maddeye göre değişen kritik bir sıcaklığın (T_c) üstünde yok olur. Kritik sıcaklığın üstünde R yarıçaplı bir küre, düzgün $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ magnetik alanı içinde tutulurken, T_c sıcaklığının altına soğutuluyor. Yüzeyde oluşan \vec{K} indüksiyon akım yoğunluğunu, θ kutup açısına bağlı olarak hesaplayın.

(d) İdeal iletken telden yapılmış bir çerçeve içinden bir g magnetik monopoli geçtiğini düşünelim. Çerçeveye oluşan akım ne kadardır?

Problem 7.60 Elektronu, hacmi için toplam e yükü düzgün dağılmış R yarıçaplı bir küre olarak düşünelim ve ω açısal hızıyla döndüğünü varsayalım.

(a) Elektromagnetik alanda depolanan toplam enerjiyi bulun.

(b) Elektromagnetik alanın toplam açısal momentumunu bulun.

(c) Einstein'ın $E = mc^2$ bağıntısına göre, elektromagnetik enerji elektronun kütlesine katkıda bulunmalıdır. Lorentz ve diğer fizikçilere göre, elektronun tüm kütlesi buradan kaynaklanmalıdır: $W_{EB} = mc^2$. Öte yandan, elektronun spin açısal momentumunun da elektromagnetik alandan kaynaklandığını varsayalım. Bu iki varsayıma göre, elektronun yarıçapını ve açısal hızını hesaplayın. ωR çarpımı ne kadardır? Bu klasik model akla uygun geliyor mu?

Problem 7.61 a yarıçaplı ve birim uzunlukta N sarımlı sonsuz bir solenoitten I_s akımı geçmektedir. Solenoitle eş eksenli dairesel bir halkanın direnci R dir. Solenoitteki akım yavaşça azalırken, halkada bir I_r indüksiyon akımı oluşur.

(a) I_r akımını dI_s/dt cinsinden bulun.

(b) Halkaya aktarılan (RI_r^2) gücü solenoitten gelmiş olmalıdır. Solenoidin hemen dışında Poynting vektörünü hesaplayarak bunu doğrulayın. (Elektrik alan solenoit içindeki değişen akıdan, magnetik alan ise, halkadaki akımdan kaynaklanır.) Tüm solenoit yüzeyinde integral alarak, toplam halkadaki güçle aynı olduğunu gösterin.

Problem 7.62 Sabit I akımı taşıyan sonsuz doğrusal telin magnetik alanı, dördüncü Maxwell denklemiindeki deplasman akımından şöyle elde edilebilir: Akım yerine, sabit v hızıyla hareket eden düzgün bir λ boyca yük yoğunluğu (yani, $I = \lambda v$) olsun. Bu yük yoğunluğu içinde ϵ uzunlukta küçük bir boşluk olduğunu ve bunun $t = 0$ anında orijinden geçtiğini varsayalım. Buna göre, $t : [0, \epsilon/v]$ zaman aralığında, yz -düzlemindeki bir Ampere çevrimi içinden gerçek bir akım geçmeyecek, sadece deplasman akımı geçecektir.

(a) Coulomb yasasını kullanarak, $x : [\epsilon - vt, vt]$ aralığındaki $-\lambda$ yük yoğunluklu bir doğru parçasının, yz -düzleminde orijinden r uzaklıkta bir noktadaki elektrik alanını bulun.

(b) Bu elektrik alanın, yz -düzleminde R yarıçaplı bir çember içinden geçen akısını hesaplayın.

(c) Bu çember içindeki I_d deplasman akımını bulun. $\epsilon \rightarrow 0$ olurken, $I_d \rightarrow I$ olduğunu gösterin.

8

ELEKTROMAGNETİK DALGALAR

8.1 DALGA DENKLEMİ

8.1.1 Giriş

Yük ve akım bulunmayan boş uzay bölgelerinde Maxwell denklemleri şöyle olur:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \text{(ii)} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{(iii)} & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(iv)} & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (8.1)$$

Bu denklemler, \vec{E} ve \vec{B} 'ye göre, birinci dereceden çiftlenimli kısmi diferansiyel denklem sistemi olurlar. İki alan arasındaki çiftlenimi ayırmak için, (iii) ve (iv) denklemlerinin rotasyonelini alalım:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Boşlukta $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ olduğundan,

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \quad (8.2)$$

Böylece \vec{E} ve \vec{B} için ayrı ayrı denklemler elde etmiş olduk; fakat bunun bedeli ikinci dereceden denklemlere geçmek oldu.

O halde, \vec{E} ve \vec{B} nin herbir bileşeni şöyle bir denklemi sağlar:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (8.3)$$

Bu klasik dalga denklemi olup, v hızıyla ilerleyen bir dalganın hareketini belirler. Yukardaki denklemlerle karşılaştırdığımızda, Maxwell denklemlerinin elektromagnetik dalga çözümlerini kabul ettiği ve bu dalgaların hızının

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (8.4)$$

yani c ışık hızı olduğu ortaya çıkar! Bu sonuç olağanüstüdür, zira buna göre, ışık da bir elektromagnetik dalga olmalıdır. Bu düşünce günümüzde kimseyi şaşırtmıyor, fakat Maxwell'in çağında büyük bir olaydı. Bu ϵ_0 , μ_0 sabitlerinin nereden geldiğini bir düşünün: bunlar Coulomb ve Biot-Savart yasalarında birer sabitti. Bunları ölçmek için yüklü küreler,

bataryalar, akım geçen teller kullanırız—yani, ışıkla bir ilgisi olmayan deneyler yaparız. Oysa, Maxwell teorisine göre bu iki sabitin ışık hızıyla çok basit bir ilişkisi olmaktadır.

Madde içinde, yine serbest yük veya serbest akım bulunmayan bölgelerde, Maxwell denklemleri şöyle olur:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \\ \text{(ii)} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{(iii)} & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(iv)} & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (8.5)$$

Eğer ortam *lineer* ise

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (8.6)$$

ve, homojen ise (yani, ϵ ve μ sabitleri bir noktadan diğerine değişmiyorsa), (8.5) denklemleri şöyle olur:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \text{(ii)} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{(iii)} & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(iv)} & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (8.7)$$

Bu denklemlerin (8.1) den tek farkı, $\epsilon_0 \mu_0$ yerine $\epsilon \mu$ gelmiş olmasıdır. O halde, lineer ve homojen bir madde ortamında elektromagnetik dalgaların hızı şöyle olur:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (8.8)$$

Saydam ortamlarda $\mu \approx \mu_0$ ve $\epsilon > \epsilon_0$ olduğundan, ışık madde içinde *daha yavaş* ilerler. Hız oranı, ortamın *n kırılma indisi* cinsinden ifade edilir:

$$v = \frac{c}{n} \quad (8.9)$$

Buna göre, ortamın kırılma indisi elektrik ve magnetik özelliklerine bağlı olacaktır:

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (8.10)$$

Kırılma indisi gelen ışığın dalgaboyuna (yani, rengine) göre değişir—bir prizma da veya gökkuşağında ışığın dispersiyonu buradan kaynaklanır. Daha sonra göreceğimiz gibi, dalgaboyuna bağlılığın da elektromagnetik açıklaması yapılabilir.

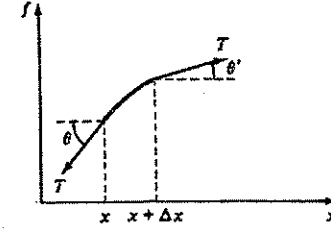
Bu bölümde elektromagnetik dalga teorisini incelemek; yansıma, kırılma, polarizasyon, soğurma ve dispersion olaylarını açıklayarak Maxwell denklemleriyle optik arasında bir köprü kurmak istiyorum. Ancak, buna geçmeden önce, dalgalar hakkında genel bilgimizi gözden geçirmek yararlı olur. Bunu, en basit olarak, bir teldeki enine dalga örneğinde yapabiliriz.

8.1.2 Bir Boyutlu Dalga Denklemi

T gerilme kuvvetiyle gergin tutulan bir tel gözönüne alalım. Denge durumunda tel x -ekseniyle çakışık olur, fakat bir ucunu şöyle bir silkelerse, telde ilerleyen bir dalga oluşur. Telin x ile $x + \Delta x$ arasındaki küçük bir parçasına etkiyen toplam enine kuvvet şöyle olur (Şek. 8.1):

$$F = T \sin \theta' - T \sin \theta$$

8.1. DALGA DENKLEMİ



Şekil 8.1

Burada θ telin x noktasında yatayla yaptığı açı ve θ' , $x + \Delta x$ noktasındaki benzer açıdır. Telin yer değiştirmesi fazla büyük değilse, bu açılar küçük olur ve sinüs yerine tanjant alabiliriz. Telin profili $f(x, t)$ ise

$$F \cong T (\tan \theta' - \tan \theta) = T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x \right) \cong T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x$$

Telin birim uzunluğunun kütlesi μ ise, $\mu(\Delta x)$ kütleli bu parçanın hareketi Newton'un ikinci yasasına göre yazılır:

$$F = \mu(\Delta x) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

ve buradan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

bulunur. O halde, gerili teldeki küçük tedirgemeler dalga denkleminin uyarları:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (8.11)$$

ve bu dalganın hızı şöyle olur:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (8.12)$$

(8.11) denkleminin bir çözümü

$$f(x, t) = g(x - vt) \quad (8.13)$$

olur, yani x ve t değişkenlerine bağımlılığı $z \equiv x - vt$ olan *her fonksiyon* çözüm olur. Bunu görebilmek için kısmi türevleri hesaplayalım:

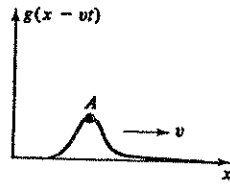
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{dg}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dg}{dz}, & \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{dg}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{dg}{dz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dg}{dz} \right) = \frac{d^2 g}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 g}{dz^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dg}{dz} \right) = -v \frac{d^2 g}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 g}{dz^2} \end{aligned}$$

Bu ifadeler yerlerine konursa, denklemin sağlandığı görülür:

$$\frac{d^2 g}{dz^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Fiziksel olarak (8.13) çözümü, pozitif x -ekseni yönünde v hızıyla ilerleyen ve profili $g(z)$ olan bir dalgayı temsil eder. Dalga üzerinde tespit edilen bir nokta (örneğin, Şek. 8.2 de gösterilen A tepe noktası) z değişkeninin sabit bir değerine karşılık gelir:

$$z = x - vt = \text{sabit}$$



Şekil 8.2

Bu noktanın hızı hesaplanırsa, $dx/dt = v$ hızıyla ilerlediği görülür.

Dalga denkleminin negatif yönde ilerleyen bir çözümü daha vardır:

$$f(x, t) = h(x + vt) \quad (8.14)$$

Bu çözümün de dalga denklemini sağladığı gösterilebilir. Dalga denklemini lineer olduğundan, herhangi iki çözümün toplamı da bir çözüm olur:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f_1 + f_2) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(f_1 + f_2) \quad (8.15)$$

O halde, sağa doğru ve sola giden dalgaların toplamı

$$f(x, t) = g(x - vt) + h(x + vt) \quad (8.16)$$

(8.11) denkleminin en genel çözümü olur. Gerçekten de, telin başlangıçtaki profili $f(x, 0)$ ve enine hız dağılımı $f'(x, 0)$ olsun. Buna göre

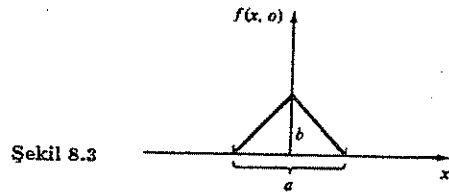
$$\left. \begin{aligned} f(x, 0) &= g(x) + h(x) \\ f'(x, 0) &= -vg'(x) + vh'(x) \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

İkinci denklemin x 'e göre integrali alınır

$$\frac{1}{v} \int_0^x f'(x', 0) dx' = -g(x) + h(x) \quad (8.18)$$

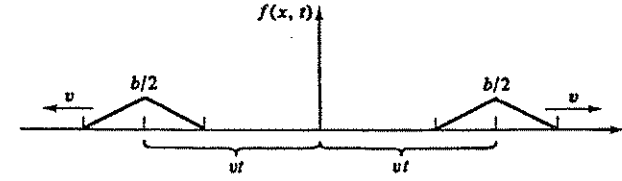
olur. (8.17) ve (8.18) denklemleri birleştirilirse, başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerin şöyle olması gerektiği anlaşılır:

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} \left[f(x, 0) - \frac{1}{v} \int_0^x f'(x', 0) dx' \right] \\ h(x) &= \frac{1}{2} \left[f(x, 0) + \frac{1}{v} \int_0^x f'(x', 0) dx' \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$



Şekil 8.3

Örnek 8.1 : Gitar çalınırken tel başlangıçta enine doğru çekilip ilk hızlı bırakılır; fakat piyano tuşlarına vururken başlangıçta hareketsiz olan tele ilk hız verilir. Şek. 8.3'te görülen gitar teli tam ortasından üçgen şeklinde çekilip bırakılıyor. Telin daha sonraki hareketi nasıl olur?



Şekil 8.4

Çözüm : Burada $f(x, 0) = 0$ olduğundan, (8.19) çözümünü $g(x) = h(x) = \frac{1}{2}f(x, 0)$, yani herbiri $b/2$ yükseklikte iki üçgen verir. t zamanı arttığında g sağa doğru ve h sola doğru aynı v hızıyla giderler. Bu hareket Şek. 8.4 'de gösterilmiştir.

Problem 8.1 Başlangıçta denge konumunda, yani $f(x, 0) = 0$, olan bir tele vurularak hız veriliyor:

$$f'(x, 0) = \begin{cases} -w & -a < x < 0 \\ +w & 0 < x < +a \\ 0 & \text{(diğer yerlerde)} \end{cases} \quad (w \text{ bir sabit})$$

(a) $g(x)$ ve $h(x)$ dalga profillerini bulun.

(b) $t = a/2v$ anında telin profilini bulun ve bir şekilde gösterin.

(c) Aynı işlemi $t = 3a/2v$ anında tekrarlayın.

Problem 8.2 (a) (8.19) ve (8.16) formüllerini birleştirerek, dalga denkleminin d'Alembert çözümünü bulun:

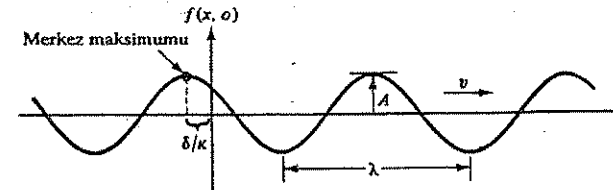
$$f(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x + vt, 0) + f(x - vt, 0) + \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} f'(x', 0) dx' \right]$$

(b) Başlangıçta dengede [$f(x, 0) = 0$] olan bir tele şöyle bir enine hız veriliyor:

$$f'(x, 0) = A x e^{-x^2}$$

Telin daha sonraki hareketini bulun ve bir şekilde gösterin.

8.1.3 Sinüsel Dalgalar



Şekil 8.5

(i) **Terimler.** Olabilecek dalga türleri arasında en bilineni sinüsel dalgadır:

$$f(x, t) = A \cos[\kappa(x - vt) + \delta] \quad (8.20)$$

Şek. 8.5'te bu fonksiyon $t = 0$ anında gösterilmiştir. A dalganın genliği olup, denge konumundan maksimum yerdeğiştirmeyi belirten pozitif bir sayıdır. δ faz sabiti adını alır.

$x = vt - \delta/\kappa$ olduğunda kosinüsün argümanı sıfır, yani yer değiştirme maksimum olur. Bu x değerine "merkez maksimumu" diyelim; eğer $\delta = 0$ ise, $t = 0$ anında merkez maksimumu orijinden geçer. Daha genel durumda, δ/κ merkez maksimumunun orijine gecikme uzaklığı olur. Bu nedenle δ 'ya bazen "faz gecikmesi" de denir. κ dalga sayısı olup λ dalgaboyu ile ilişkisi şöyledir:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} \quad (8.21)$$

x değeri $2\pi/\kappa$ kadar ilerlediğinde kosinüs fonksiyonu kendini tekrarlar.

Dalga zaman içinde v hızıyla sağa doğru ilerlerken, sabit bir x noktasının hareketi yukarı-aşağı yönde olup,

$$T = \frac{2\pi}{\kappa v} \quad (8.22)$$

zaman içinde tam bir salınım yapar. Bu T zamanına periyot denir. Birim zamandaki salınım sayısına frekans denir ve ν ile gösterilir:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\kappa v}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \quad (8.23)$$

İncelememizde daha kullanışlı olacak olan büyüklük ω açısal frekansdır; bu, eşdeğer düzgün dairesel harekette birim zamanda dönülen açının radyan cinsinden değeri olur:

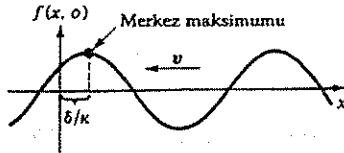
$$\omega = 2\pi\nu = \kappa v \quad (8.24)$$

Sinüsel dalgayı, v yerine, ω cinsinden yazmak daha kullanışlı olur:

$$f(x, t) = A \cos(\kappa x - \omega t + \delta) \quad (8.25)$$

Aynı ω açısal frekansı ve κ dalga sayısı ile sola doğru ilerleyen dalga da şöyle yazılır:

$$f(x, t) = A \cos(\kappa x + \omega t - \delta) \quad (8.26)$$



Şekil 8.6

Burada faz sabitinin işareti, δ/κ uzunluğunun yine dalganın "gecikmesi" olarak seçildiğini gösterir; sola doğru ilerleyen dalganın gecikmesi demek, sağa doğru bir kayma demektir. $t = 0$ anında bu dalga Şek. 8.6'daki gibi olur. Kosinüs çift fonksiyon olduğundan, (8.20) denklemini şöyle de yazabiliriz:

$$f(x, t) = A \cos(-\kappa x - \omega t + \delta) \quad (8.27)$$

Bunu (8.25) denkleminin karşılaştırmak, aynı genlik, faz, frekans ve dalgaboylu bir dalganın zıt yönde gitmesi için κ 'nın işareti değiştirilir.

(ii) **Kompleks gösterim.** Matematikten bilinen Euler formülünü hatırlayalım:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (8.28)$$

Buna göre, (8.25) sinüsel dalgası şöyle yazılabilir:

$$f(x, t) = \text{Re} (A e^{i(\kappa x - \omega t + \delta)}) \quad (8.29)$$

Burada $\text{Re}(w)$ işareti w 'nın reel kısmını gösterir. Şimdi şu kompleks dalga fonksiyonuna bakalım:

$$\tilde{f}(x, t) \equiv \tilde{A} e^{i(\kappa x - \omega t)} \quad (8.30)$$

Burada **kompleks genlik** $\tilde{A} \equiv A e^{i\delta}$ faz sabitini de içerir. Bizim ilgilendiğimiz fiziksel dalga fonksiyonu f 'nin reel kısmı olur:

$$f(x, t) = \text{Re} \tilde{f}(x, t) \quad (8.31)$$

Eğer \tilde{f} biliniyorsa, reel kısmı alınarak f kolayca bulunur. Kompleks gösterimin sinüs ve kosinüslere göre avantajı, üstel fonksiyon işlemlerinin daha kolay oluşundandır.

Örnek 8.2: Kompleks gösterimde iki sinüsel dalganın toplamını bulun.

Çözüm: Kompleks iki dalga fonksiyonunun toplamı $\tilde{f}_3 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ ise, fiziksel f_3 dalgası

$$f_3 = f_1 + f_2 = \text{Re}(\tilde{f}_1) + \text{Re}(\tilde{f}_2) = \text{Re}(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) = \text{Re}(\tilde{f}_3)$$

olur; yani, önce kompleks dalgaları toplar, sonra reel kısmını alırız. Bunun kosinüslerle ne kadar zor olduğunu görmek için, frekans ve dalgaboyları aynı, fakat genlik ve fazları farklı iki dalganın toplamını hesaplayalım:

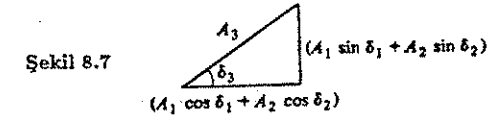
$$\begin{aligned} f_3(x, t) &= A_1 \cos(\kappa x - \omega t + \delta_1) + A_2 \cos(\kappa x - \omega t + \delta_2) \\ &= A_1 [\cos(\kappa x - \omega t) \cos \delta_1 - \sin(\kappa x - \omega t) \sin \delta_1] + \\ &\quad + A_2 [\cos(\kappa x - \omega t) \cos \delta_2 - \sin(\kappa x - \omega t) \sin \delta_2] \\ &= [A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2] \cos(\kappa x - \omega t) - [A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2] \sin(\kappa x - \omega t) \end{aligned}$$

Bu sevimsiz ifadeyi sadeleştirmek için, şöyle iki büyüklük tanımlayalım:

$$\begin{aligned} A_3 &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_1 - \delta_2)} \\ \delta_3 &= \arctan \left(\frac{A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2}{A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2} \right) \end{aligned} \quad (8.32)$$

Sonra, şu toplamı hesaplayalım:

$$\begin{aligned} &(A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2)^2 + (A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2)^2 \\ &= (A_1^2 \sin^2 \delta_1 + 2A_1A_2 \sin \delta_1 \sin \delta_2 + A_2^2 \sin^2 \delta_2) + \\ &\quad + (A_1^2 \cos^2 \delta_1 + 2A_1A_2 \cos \delta_1 \cos \delta_2 + A_2^2 \cos^2 \delta_2) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_1 - \delta_2) = A_3^2 \end{aligned}$$



Şekil 8.7

Şek. 8.7 incelenirse

$$\begin{aligned} A_3 \cos \delta_3 &= A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2 \\ A_3 \sin \delta_3 &= A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan

$$f_3(x, t) = (A_3 \cos \delta_3) \cos(\kappa x - \omega t) - (A_3 \sin \delta_3) \sin(\kappa x - \omega t) = A_3 \cos(\kappa x - \omega t + \delta_3)$$

bulunur. O halde, toplam dalga fonksiyonu, genliği ve faz sabiti (8.32) formülleriyle verilen, tek bir sinüsel dalga olur.

Tüm bu işlemlerde kaybolduysanız, amacımıza eriştim demektir. Çünkü size, aynı işlemin kompleks gösterimde ne kadar daha kolay olduğunu göstereceğim:

$$\tilde{f}_3 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 = \tilde{A}_1 e^{i(\kappa x - \omega t)} + \tilde{A}_2 e^{i(\kappa x - \omega t)} = (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) e^{i(\kappa x - \omega t)} = \tilde{A}_3 e^{i(\kappa x - \omega t)}$$

Şimdi bunun reel kısmı alınır

$$f_3(x, t) = A_3 \cos(\kappa x - \omega t + \delta_3)$$

bulunur. O halde, aynı frekans ve dalga sayılı dalgaların toplamını alırken, sadece *kompleks genlikler toplanır*.

$$\tilde{A}_3 = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 \quad \text{veya} \quad A_3 e^{i\delta_3} = A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2} \quad (8.33)$$

Buradan (8.32) formülleri kolayca bulunur.

Sinüsel dalgaların lineer kombinasyonu. Sinüsel dalga özel bir dalga türü olmasına rağmen, herhangi bir dalga daima sinüsel dalgaların lineer kombinasyonu ile temsil edilebilir. Farklı dalga boylarında sinüsel dalgaların genlik ve fazlarını öyle ayarlarız ki dalga denkleminin her çözümünü temsil edebilirler. (İki veya daha çok çözüm toplamının da bir çözüm olduğunu hatırlayın.) Farklı dalga boylarını toplamak yerine, bununla eşdeğer olan $\kappa = 2\pi/\lambda$ dalga sayılarının integrali alınarak, en genel lineer kombinasyon şöyle yazılabilir:

$$\tilde{f}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\kappa) e^{i(\kappa x - \omega t)} d\kappa \quad (8.34)$$

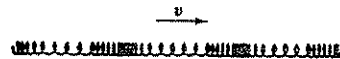
Her iki yönde giden dalgaları almak için, negatif κ değerlerini de kattım. (Bu, λ veya ω 'nın negatif olduğu anlamına gelmez; dalga boyu ve frekans pozitif büyüklüklerdir; daha doğru yazmak gerekirse, $\lambda = 2\pi/|\kappa|$ ve $\omega = |\kappa|v$ olur.)

Buradaki $\tilde{A}(\kappa)$ genlikleri Fourier dönüşümü teorisiyle bulunur (bkz. Problem 8.31); fakat bunun ayrıntıları konumuzun dışındadır. Bilinmesi gereken, her dalganın sinüsel dalgaların lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğidir. Sinüsel dalgaların özellikleri bilindiğinde, diğer dalgalara genişletmek kolay olur. Buradan itibaren sadece sinüsel dalgalarla ilgileneceğiz.

Problem 8.3 (8.33) denklemden giderek (8.32) denklemini çıkarın.

Problem 8.4 (8.31) denklemini değişken ayrımı yöntemiyle çözüp (8.34) ifadesini bulun.

8.1.4 Polarizasyon



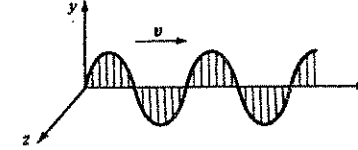
Şekil 8.8

Titreşen bir telde ilerleyen dalga *enine* dalgadır, çünkü telin yer değiştirmesi ilerleme yönüne diktir. Tel yeterince elastik ise, kendi doğrultusunda itme sonucu *boyuna dalga* da üretilebilir; bu tür dalgada yer değiştirme dalganın ilerleme yönünde olur (Şek. 8.8). Boyuna dalgaya en iyi örnek ses dalgasıdır; daha sonra göreceğimiz gibi, elektromagnetik dalga enine dalga olur.

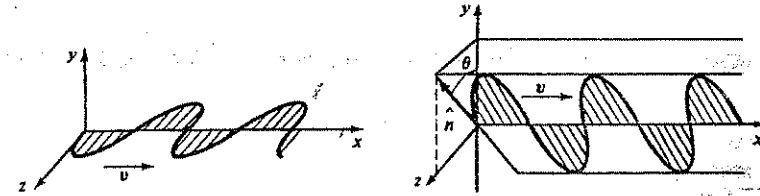
8.1. DALGA DENKLEMİ

Belirli bir ilerleme yönüne dik *iki* boyut olabilir. Buna göre, enine dalga birbirinden bağımsız iki polarizasyon durumunda olabilir. Teli yukarı-aşağı salıncırdığımızda “dikey” polarizasyon olur. Eksenleri Şek. 8.9’deki gibi seçersek, dikey polarizasyonlu dalga

$$\tilde{f}_v(x, t) = \tilde{A} e^{i(\kappa x - \omega t)} \hat{j} \quad (8.35)$$



(a) Dikey polarizasyon



Şekil 8.9

olur. Teli sağa-sola salıncırdığımızda ise “yatay” polarizasyon elde edilir:

$$\tilde{f}_h(x, t) = \tilde{A} e^{i(\kappa x - \omega t)} \hat{k} \quad (8.36)$$

Daha genel olarak, xy -düzleminde herhangi bir \hat{n} yönünde polarize olmuş bir dalga

$$\tilde{f}(x, t) = \tilde{A} e^{i(\kappa x - \omega t)} \hat{n} \quad (8.37)$$

olup \hat{n} vektörü salınım düzleminde alınır. Dalga enine olduğu için, \hat{n} , dalganın ilerleme yönünde diktir:

$$\hat{n} \cdot \hat{i} = 0 \quad (8.38)$$

\hat{n} polarizasyon vektörünün y -ekseniyle yaptığı açıya θ **polarizasyon açısı** dersek

$$\hat{n} = \cos \theta \hat{j} + \sin \theta \hat{k} \quad (8.39)$$

olur. Buna göre, Şek. 8.9c’deki dalga, yatay ve dikey polarizasyonlu iki dalganın kombinasyonu olarak yazılabilir:

$$\tilde{f}(x, t) = (\tilde{A} \cos \theta) e^{i(\kappa x - \omega t)} \hat{j} + (\tilde{A} \sin \theta) e^{i(\kappa x - \omega t)} \hat{k} \quad (8.40)$$

Problem 8.5 Bir telde lineer polarize olmuş en genel dalga (8.37) denklemiyle ifade edilir. Lineer (veya, “düzlem”) polarizasyonda yatay ve dikey dalga bileşenleri *aynı fazda* salınırlar [(8.40) denklemleri]. Eğer, bu iki bileşenin genlikleri aynı, fakat faz farkları 90° ise, dairesel polarize olmuş bir dalga elde edilir:

(a) Sabit bir x noktasına baktığımızda, telin x -ekseni çevresinde dairesel hareket yaptığını gösterin. Pozitif yönden orijine doğru baktığınızda, dalga hangi yönde (saat yönü veya tersi) döner? Buna ters yönde dönen bir dalgayı nasıl kurarsınız?

(b) $t = 0$ anında telin görüntüsünü çizin.

(c) Dairesel polarize olmuş bir dalga elde etmek için teli nasıl sallamak gerekir?

8.1.5 Sınır Koşulları; Yansıma ve Geçme

Yukarda telin sonsuz uzunlukta olduğunu varsaydım; sonlu bir telde ilerleyen dalga telin ucuna geldiğinde ne olur? Ne olacağı telin ucunun bağlı veya serbest oluşuna, yani sınır koşullarına bağlı olacaktır. Önce, telin ucunun *diğer* bir tele bağlı olduğunu varsayalım. T gerilme kuvveti her iki telde aynı olacaktır, fakat μ kütle yoğunlukları farklı olduğundan v_1 ve v_2 dalga hızları farklı olur ($v = \sqrt{T/\mu}$). Bağlantı noktasının $x = 0$ 'da olduğunu varsayalım. Sol taraftan gelen dalga

$$\tilde{f}_I = \tilde{A}_I e^{i(\kappa_1 x - \omega t)} \quad (x < 0) \quad (8.41)$$

olsun. (Buradaki incelemede polarizasyon önemli olmadığından, skaler f dalgası alıyorum.) Bağlantı noktasında bu dalga bir kısmı *yansıyan dalga* olarak geri dönecektir:

$$\tilde{f}_R = \tilde{A}_R e^{i(-\kappa_1 x - \omega t)} \quad (x < 0) \quad (8.42)$$

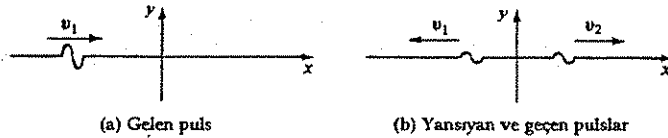
Sağ tarafta 2. telde devam eden dalgaya da geçen dalga diyelim:

$$\tilde{f}_T = \tilde{A}_T e^{i(\kappa_2 x - \omega t)} \quad (x > 0) \quad (8.43)$$

Burada unutulmaması gereken bir nokta şudur: Gelen $f_I(x, t)$ dalgası, ilke olarak $x = -\infty$ 'a kadar uzanan bir dalgadır ve her zaman vardır; f_R ve f_T dalgaları da öyle. Sistemin her tarafı aynı ω açısal frekansıyla titreşmektedir. (Bu frekans teli titreştiren kişi tarafından belirlenmektedir.) Her iki telde dalga hızları farklı olduğundan, dalgaboyları ve dalga sayıları farklı olur:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (8.44)$$

Bu, elbette yapay bir durumdur—aynı tel üzerinde sonsuza kadar uzanan gelen ve yansıyan dalgaları gözle ayırt etmek kolay değildir. Bunun yerine, *sonlu* genişlikte tek bir sinüs pulsu şeklindeki dalga gözönüne alınarak (Şek. 8.10) hesaplar yapılabilir (bkz. Problem 8.6). Fakat bu dalga sinüs *olmadığını* bilmenizi isterim. Sonlu hiçbir puls sinüs *değildir*; ancak çok sayıda sinüs dalganın lineer kombinasyonu olabilir. Gelen dalga *tek* frekanslı olmasını istiyorsanız, sonsuza kadar uzanan sinüs dalga almalısınız.



Şekil 8.10

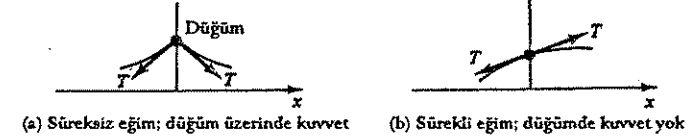
O halde, gelen sinüs bir dalga teldeki toplam yerdeğiştirmesi şöyle yazılabilir:

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} \tilde{A}_I e^{i(\kappa_1 x - \omega t)} + \tilde{A}_R e^{i(-\kappa_1 x - \omega t)} & (x < 0) \\ \tilde{A}_T e^{i(\kappa_2 x - \omega t)} & (x > 0) \end{cases} \quad (8.45)$$

Düğüm noktasının ($x = 0$) hemen solundaki ($x = 0^-$) enine yer değiştirme ile hemen sağdaki ($x = 0^+$) yer değiştirme birbirine eşit olmalıdır; aksi takdirde iki tel birbirinden ayrılırdı. Bunun matematiksel ifadesi, $f(x, t)$ fonksiyonu $x = 0$ 'da sürekli olmalıdır:

$$f(0^-, t) = f(0^+, t) \quad (8.46)$$

8.1. DALGA DENKLEMİ



Şekil 8.11

Düğüm noktasının kütlesi yok sayılırsa, f 'nin türevi de $x = 0$ 'da sürekli olmalıdır:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{0^-} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{0^+} \quad (8.47)$$

Aksi takdirde, düğüm üzerinde net bir kuvvet oluşur ve ivmesi sonsuz olurdu (Şek. 8.11). Her t anında geçerli olan bu iki sınır koşulu, doğrudan fiziksel $f(x, t)$ fonksiyonu içindi. Fakat, \tilde{f} 'nin sanal kısmı ile reel kısmı arasındaki tek fark, kosinüs yerine sinüs geliyor olmasıdır. Bu durumda, $\tilde{f}(x, t)$ kompleks dalga fonksiyonu da aynı sınır koşullarına uyar:

$$\tilde{f}(0^-, t) = \tilde{f}(0^+, t) \quad \text{ve} \quad \left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right|_{0^-} = \left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right|_{0^+} \quad (8.48)$$

Bu koşullar (8.45) çözümüne uygulandığında

$$\tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T \quad \text{ve} \quad \kappa_1(\tilde{A}_I - \tilde{A}_R) = \kappa_2 \tilde{A}_T$$

olur. Böylece, yansıyan ve geçen dalga genlikleri, gelen dalga genliği cinsinden bulunur:

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right) \tilde{A}_I \quad \text{ve} \quad \tilde{A}_T = \left(\frac{2\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2} \right) \tilde{A}_I \quad (8.49)$$

veya, (8.44) bağıntısına göre, hızlar cinsinden ifadelerle geçilir:

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) \tilde{A}_I \quad \text{ve} \quad \tilde{A}_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) \tilde{A}_I \quad (8.50)$$

Aynı ifadeler fiziksel genlik ve fazlar cinsinden yazılırsa

$$A_R e^{i\delta_R} = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) A_I e^{i\delta_I} \quad \text{ve} \quad A_T e^{i\delta_T} = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I e^{i\delta_I} \quad (8.51)$$

Eğer ikinci telin yoğunluğu daha hafifse ($\mu_2 < \mu_1$), $v_2 > v_1$ ve her üç dalga bileşeni de aynı fazda olurlar ($\delta_R = \delta_T = \delta_I$). Buradan genlikler doğrudan yazılabilir:

$$A_R = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) A_I \quad \text{ve} \quad A_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I \quad (8.52)$$

Eğer ikinci tel daha ağırsa, bu kez $v_2 < v_1$ ve yansıyan dalga 180° faz farkı kazanır ($\delta_R + \pi = \delta_T = \delta_I$). Çünkü,

$$\cos(-\kappa_1 x - \omega t + \delta_I - \pi) = -\cos(-\kappa_1 x - \omega t + \delta_I)$$

Buna göre, yansıyan dalga "başsağı" olur. Bu durumda genlikler şöyle bulunur:

$$A_R = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I \quad \text{ve} \quad A_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I \quad (8.53)$$

Özel olarak, ikinci telin kütlesi sonsuz yoğunluktaysa—yani, birinci telin ucu sabit bir yere tespit edilmişse—bu kez genlikler şöyle olur:

$$A_R = A_I \quad \text{ve} \quad A_T = 0$$

Problem 8.6 Birbirine eklenmiş iki telden, 1. tel üzerinde $g_I(x-v_1t)$ gibi herhangi bir dalga ilerliyor. Düğüm noktasında $h_R(x+v_1t)$ gibi yansıyan bir dalga ile $g_T(x-v_2t)$ gibi geçen bir dalga oluşuyor. (8.46) ve (8.47) sınır koşullarını kullanarak, h_R ve g_T fonksiyonlarını, g_I cinsinden bulun.

Problem 8.7 (a) İki telin düğüm noktasının kütlesi M ise, (8.47) koşulu yerine geçen yeni bir koşul bulun.

(b) Düğüm noktası M kütleli ve 2. telin kütlesiz olduğu durumda, yansıyan ve geçen dalgaların genlik ve fazlarını bulun.

! Problem 8.8 Birbirine bağlı iki telden, 2. telin viskoz bir sıvı içinde olduğu ve telin Δx uzunluğuna etkileyen sürtünme kuvvetinin

$$F_s = -\gamma \frac{\partial f}{\partial t} \Delta x$$

şeklinde, enine hızla orantılı olduğu veriliyor.

(a) 2. telin hareketini belirleyen yeni dalga denklemini çıkarın.

(b) Telin gelen ω frekansı ile titreştiğini varsayıp, dalga denklemini çözün; yani $\tilde{f}(x, t) = e^{-i\omega t} \tilde{F}(x)$ şeklinde bir çözüm arayın.

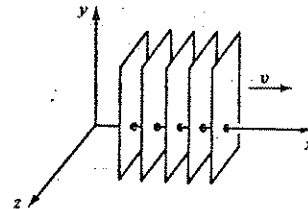
(c) Bu dalga çözümünün sönümlü olduğunu (yani, x arttıkça genliğinin azaldığını) gösterin. Genliğin ilk değerinden $1/e$ kadar azaldığı karakteristik uzunluğu γ, T, μ, ω cinsinden hesaplayın.

(d) Genliği A_I , fazı $\delta_I = 0$ ve frekansı ω olan bir dalga 1. telden geliyor. Yansıyan dalganın genliği ve fazını bulun.

8.2 DİELEKTRİK ORTAMDA ELEKTROMAGNETİK DALGA

8.2.1 Boşlukta Tekrenkli Düzlem Dalgalar

Şekil 8.12



Buraya kadar olan kısımda dalga teorisinin genel hatlarını gözden geçirmiş olduk. Şimdi elektromagnetik dalgalara eğilebiliriz. Kısım 8.1.1'de gördüğümüz gibi, \vec{E} ve \vec{B} alanlarının sağladığı denklemler şöyleydi:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{ve} \quad \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (8.54)$$

Burada $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ boşlukta ışık hızıdır. Yukarda belirttiğimiz gibi, incelemeyi ω frekanslı düzlem dalgalarla sınırlı tutabiliriz. Işığın frekansı renk duyusuna karşılık geldiği için, tek

Tablo 8.1 Elektromagnetik spektrum

Frekans (Hz)	Radyasyon adı	Dalgaboyu (m)
10^{22} —	Gama ışınları	10^{-13}
10^{21} —		10^{-12}
10^{20} —		10^{-11}
10^{19} —		10^{-10}
10^{18} —	X-ışınları	10^{-9}
10^{17} —		10^{-8}
10^{16} —	Morötesi	10^{-7}
10^{15} —	Görünür ışık	10^{-6}
10^{14} —		10^{-5}
10^{13} —	Kızılötesi	10^{-4}
10^{12} —	Mikrodalga	10^{-3}
10^{11} —		10^{-2}
10^{10} —		10^{-1}
10^9 —	TV, FM	1
10^8 —		10
10^7 —	Kısa dalga	10^2
10^6 —		10^3
10^5 —	Radyo dalgaları	10^4
10^4 —		10^5
10^3 —		10^6

Renk	Dalgaboyu (m)	Frekans (Hz)
Yakın morötesi	3.0×10^{-7}	10.0×10^{14}
Mor uç	4.0×10^{-7}	7.5×10^{14}
Mavi	4.6×10^{-7}	6.5×10^{14}
Yeşil	5.4×10^{-7}	5.6×10^{14}
Sarı	5.9×10^{-7}	5.1×10^{14}
Portakal	6.1×10^{-7}	4.9×10^{14}
Kırmızı	7.6×10^{-7}	3.9×10^{14}
Kızılötesi uç	10.0×10^{-7}	3.0×10^{14}

frekanslı dalgaların diğer bir adı tekrenkli (monokromatik) dalga olur. Tablo 8.1'de elektromagnetik dalgaların frekans ve renkleri gösterilmiştir.

Uzayda x -yönünde ilerleyen, y veya z 'ye bağımlı olmayan dalgaları gözönüne alalım. Bu dalganın ilerleme yönüne dik bir düzlemin her yerinde elektrik ve magnetik alanlar düzgün olacağından, buna düzlem dalga denir (Şek. 8.12):

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{ve} \quad \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (8.55)$$

Burada \vec{E}_0 ve \vec{B}_0 elektrik ve magnetik alanların kompleks genlikleridir. Fiziksel alanlar \vec{E} ve \vec{B} 'nin reel kısımları olurlar.

(8.54) dalga denklemlerinin Maxwell denklemlerinden çıkarıldığını hatırlayalım. Boşlukta, Maxwell denklemlerinin her çözümü dalga denklemini sağlar; fakat bunun karşısı doğru değildir: Maxwell denklemleri \vec{E}_0 ve \vec{B}_0 genliklerine bir takım kısıtlamalar koyar. Bu kısıtlamaları sırayla ele alalım:

Boşlukta $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ve $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ olduğundan,¹

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x, t) = \vec{\nabla} \cdot [\vec{E}_0 e^{i(\kappa x - \omega t)}] = i\kappa(\vec{E}_0)_x e^{i(\kappa x - \omega t)} = 0$$

Burada, κ ve üstel fonksiyon sıfır olamayacağından, $(\vec{E}_0)_x = 0$ olmalıdır. Benzer işlem magnetik alan için de geçerlidir. O halde,

$$(\vec{E}_0)_x = 0 \quad \text{ve} \quad (\vec{B}_0)_x = 0 \quad (8.56)$$

bulunur; yani *elektromagnetik dalga enine bir dalgadır*; daha açık olarak, elektrik ve magnetik alanlar dalganın ilerleme yönüne dik olurlar.

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ Faraday yasası elektrik ve magnetik alan genlikleri arasında bir bağlantı kurar. Yine kompleks dalgalarla işlem yapılırsa

$$-\kappa(\vec{E}_0)_z = \omega(\vec{B}_0)_y \quad \text{ve} \quad \kappa(\vec{E}_0)_y = \omega(\vec{B}_0)_z \quad (8.57)$$

Bu iki ilişki vektörel olarak şöyle yazılabilir:

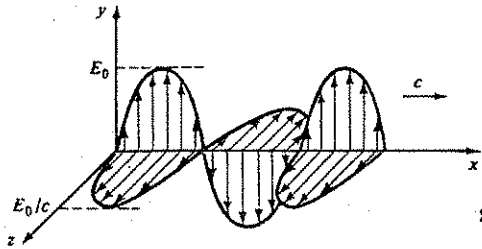
$$\vec{B}_0 = \frac{\kappa}{\omega} (\hat{z} \times \vec{E}_0) \quad (8.58)$$

Buna göre, \vec{E} ve \vec{B} alanları aynı fazda ve birbirine dik olurlar. Fiziksel genlikler arasındaki bağıntı şöyle olur:

$$B_0 = \frac{\kappa}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{c} \quad (8.59)$$

Dördüncü Maxwell denklemi yeni birşey vermez, (8.57) bağıntısını tekrarlar.

Örnek 8.3:



Şekil 8.13

Şek. 8.13'teki dalganın \vec{E} alanı y -yönünde verilmiştir. (8.58) bağıntısına göre, \vec{B} alanı z -yönünde olur:

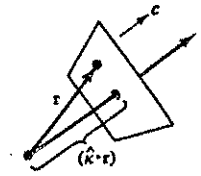
$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(\kappa x - \omega t)} \hat{j} \quad \text{ve} \quad \vec{B}(x, t) = \frac{\vec{E}_0}{c} e^{i(\kappa x - \omega t)} \hat{k}$$

veya;

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\kappa x - \omega t + \delta) \hat{j} \quad \text{ve} \quad \vec{B}(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\kappa x - \omega t + \delta) \hat{k} \quad (8.60)$$

Elektromagnetik dalganın polarizasyon yönü olarak, elektrik alan yönü alınır. Bu örnekteki dalga y -yönünde polarize olmuştur.

¹Kompleks \vec{E} 'nin reel ve sanal kısımları birbirinden sadece sinüs ve kosinüs çarpanlarıyla farklı olduğundan, reel kısım Maxwell denklemini sağlıyorsa sanal kısım, ve dolayısıyla \vec{E} nin kendisi de sağlar.



Şekil 8.14

Dalganın mutlaka x -yönünde ilerliyor olması gerekmez; yukardaki sonuçları herhangi bir yönde ilerleyen tekrenkli düzlem dalgalara kolayca genelleştirebiliriz. Gösterimde kolaylık sağlamak üzere, dalga vektörü adında bir $\vec{\kappa}$ vektörü tanımlanır; bu vektörün büyüklüğü κ dalga sayısı, ve yönü dalganın ilerleme yönüdür. Bu durumda κz çarpımı yerine, $\vec{\kappa} \cdot \vec{r}$ skaler çarpımı gelecektir (Şek. 8.14). Buna göre, elektromagnetik dalga bileşenleri şöyle olur:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{n} \quad (8.61)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E}_0}{c} e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t)} (\vec{\kappa} \times \hat{n}) = \frac{\vec{\kappa} \times \vec{E}}{c} \quad (8.62)$$

Burada \hat{n} polarizasyon vektörüdür. \vec{E} alanı enine dalga olduğundan

$$\hat{n} \cdot \vec{\kappa} = 0 \quad (8.63)$$

olur; \vec{B} 'nin enine oluşu (8.62) formülünden gelir. Bu ifadelerin reel kısımları alınır, dalganın fiziksel elektrik ve magnetik alan bileşenleri bulunur:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \hat{n} \quad (8.64)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) (\vec{\kappa} \times \hat{n}) \quad (8.65)$$

Problem 8.9 Genliği E_0 , frekansı ω ve faz açısı sıfır olan şu tekrenkli düzlem dalgalardan fiziksel elektrik ve magnetik alan bileşenlerini yazın:

- Negatif y yönünde ilerleyen ve x yönünde polarize olmuş dalga.
- Orijinden $(1, 1, 1)$ noktasına ilerleyen ve polarizasyonu xy düzlemine paralel olan dalga. Her iki dalgayı birer şekil çizip gösterin; $\vec{\kappa}$ ve \hat{n} vektörlerinin kartezyen bileşenlerini hesaplayın.

8.2.2 Elektromagnetik Dalganın Enerji ve Momentumu

(7.88) denklemine göre, elektromagnetik alanda birim hacimde depolanan enerji şöyleydi:

$$U = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (8.66)$$

(8.60) denklemindeki tekrenkli düzlem dalga bileşenleri kullanılırsa

$$B^2 = \frac{E^2}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 E^2 \quad (8.67)$$

verir; buna göre *elektrik ve magnetik alanlar enerjiye eşit katkıda bulunurlar*:

$$U = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\kappa x - \omega t + \delta) \quad (8.68)$$

Dalga ilerlerken bu enerjiyi birlikte taşır.

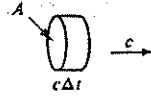
Birim yüzeyden birim zamanda geçen enerji akısı ise (7.85) Poynting vektörüyle belirlenir:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (8.69)$$

Yine, düzlem dalgalar için bu ifade

$$\vec{S} = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\kappa x - \omega t + \delta) \hat{z} = cU \hat{z} \quad (8.70)$$

olur. Yüzeyden geçen enerji akısının hacimde depolanan enerji yoğunluğuyla orantılı olduğuna dikkat edelim. Bunu şöyle açıklayabiliriz: Δt zaman aralığında A yüzeyinden $c\Delta t$ kadar bir dalga uzunluğu geçer (Şek. 8.15). Bunun taşıdığı enerji $U \times$ geçen hacim $= UAc\Delta t$ olur. Buna göre, birim yüzeyden birim zamanda geçen enerji cU olur.



Şekil 8.15

Elektromagnetik alan sadece enerji değil, momentum da taşır. Elektromagnetik alanda depolanan momentum (7.103) formülü olarak bulunmuştur:

$$\vec{P} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \quad (8.71)$$

Tekrenkli düzlem dalganın momentum yoğunluğu şöyle olur:

$$\vec{P} = \frac{1}{c} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\kappa x - \omega t + \delta) \hat{z} = \frac{U}{c} \hat{z} \quad (8.72)$$

Dalga momentumu ile enerjisi arasındaki ilişkiye dikkat edelim:

$$U = P c \quad (8.73)$$

Görünür ışığın dalgaboyu o kadar küçük (5×10^{-7} m) ve periyodu o kadar kısadır ki (10^{-15} s), yapılan makroskopik ölçümler mutlaka çok sayıda periyot üzerinden olacaktır. O halde, yukarıda kosinüsün karesi olarak salınım yapan enerji ve momentumlar pratikte işe yaramazlar; bize bunların ortalama değeri daha yararlı olur. Kosinüs kareli bir ifadenin bir periyot üzerinden ortalamasını hesaplayalım:

$$\langle \cos^2(\kappa x - \omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2\left(\kappa x - \frac{2\pi}{T}t + \delta\right) dt = \frac{1}{2}$$

Burada $\langle \rangle$ bir periyot üzerinden ortalamayı gösterir. Benzer şekilde $\langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$ bulunur. O halde, yukarıdaki enerji ve momentum yoğunluklarının ortalama değerlerini doğrudan yazabiliriz:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad (8.74)$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{z} = c \langle U \rangle \hat{z} \quad (8.75)$$

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{z} = \frac{\langle U \rangle}{c} \hat{z} \quad (8.76)$$

Elektromagnetik dalganın birim yüzeyden geçen ortalama gücüne *şiddet* denir ve I ile gösterilir:

$$I = \langle S \rangle \quad (8.77)$$

Problem 8.10 Dünya yüzeyinde güneş ışığının şiddeti 1300 watt/m^2 dir. Elektrik ve magnetik alan genliklerini bulun. Bu elektrik alanla aynı değeri, durgun bir elektrondan ne kadar uzakta elde edebiliriz? (Aslında, güneş ışığı tekrenkli veya doğrusal polarize olmuş değildir; buradaki hesap sonuçları pek gerçekçi sayılmaz.) Güneş ışığı (tüm momentumu soğuran) ideal bir soğurucu üzerine düştüğünde, ne kadar basınç uygular? İdeal bir yansıtıcıya uygulanan basınç ne olur? Bu, atmosfer basıncının yüzde kaçındır?

Problem 8.11 Kompleks gösterimde, U ve \vec{S} 'nin zaman ortalamalarını hesaplamak için güzel bir teknik vardır: Skaler veya vektörel çarpımdaki ikinci vektörün kompleks eşleniğini alıp, doğrudan $\frac{1}{2}$ ile çarpmak. Buna göre, (8.66) ve (8.69) ifadelerini şöyle yazmak yeterlidir:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} (\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^*)$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}^*)$$

Bu ifadelerin (8.74) ve (8.75) formüllerini doğru olarak verdiğini gösterin. \vec{E} ve \vec{B} farklı fazda olsa dahi, bu tekniğin geçerli olduğunu, fakat sonucun reel kısmının alınması gerektiğini gösterin.

Problem 8.12 x -yönünde ilerleyen ve y -yönünde polarize olmuş tekrenkli düzlem dalganın [(8.60) denklemleri] Maxwell gerilme tansörünün dokuz bileşenini bulun. Yanıtınız akla uygun geliyor mu? (\vec{T} 'nin momentum akı yoğunluğu olduğunu hatırlayın.) Momentum akı yoğunluğu ile enerji yoğunluğu arasındaki ilişki nedir?

8.2.3 Lineer Ortamda Elektromagnetik Dalga

Buraya kadar elektromagnetik dalgaları *boş uzayda* inceledik. Şimdi bu sonuçları *lineer*² ortamlara genişletebiliriz. Yapılacak iş basittir: ϵ_0 yerine ϵ , ve μ_0 yerine de μ almak. Buna göre, ortamda dalga hızı

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \quad (8.78)$$

olur; bu sonuç Kısım 8.1.1'de bulunmuş ve maddenin *kırılma indisi* n şöyle tanımlanmıştır:

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad (8.79)$$

Ortamda elektromagnetik enerji yoğunluğu

$$U = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2) \quad (8.80)$$

ve Poynting vektörü

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} \quad (8.81)$$

olduğundan, (8.77) denklemiyle tanımlanan *dalga şiddeti* şöyle bulunur:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 \quad (8.82)$$

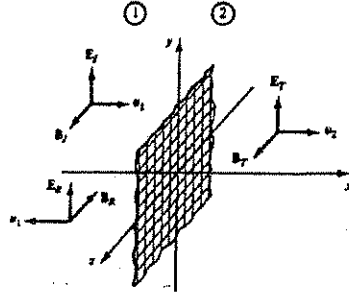
²Burada "lineer" terimini, hem \vec{D} ve \vec{H} 'nin \vec{E} ve \vec{B} ile orantılı olması, ve hem de ϵ ve μ katsayılarının konum ve yönden bağımsız olması anlamında kullanıyorum. Daha doğru olarak, serbest yük ve akım bulunmayan *homojen, lineer ve izotropik* ortam demek gerekir.

Burada önemli soru şudur: Elektromagnetik dalga bir ortamdan diğerine (örneğin, havadan suya, veya cama) geçtiğinde ne olur? Bir teldeki enine dalga örneğinde gördüğümüz gibi, dalga bir kısmı geçecek, bir kısmı da yansacaktır. Ne kadar yansacağı, iki ortam arakesitindeki sınır koşullarına bağlıdır. Bölüm 7'de bulduğumuz bu koşulları [(7.62) denklemi] burada tekrar yazalım:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp} \\ \text{(ii)} & B_{1\perp} = B_{2\perp} \\ \text{(iii)} & \vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel} \\ \text{(iv)} & \frac{\vec{B}_{1\parallel}}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_{2\parallel}}{\mu_2} \end{array} \right\} \quad (8.83)$$

Şimdi bu koşulları kullanarak elektromagnetik dalgaların yansıma ve kırılma yasalarını bulalım.

8.2.4 Normal Gelişte Yansıma ve Geçme



Şekil 8.16

İki lineer ortamın arakesitini yz-düzlemi olarak alalım. Sol taraftan gelen ve +x yönünde ilerleyen ω frekanslı bir dalga polarizasyonu y-yönünde olsun (Şek. 8.16):

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_I(x, t) = \vec{E}_{oI} e^{i(\kappa_1 x - \omega t)} \hat{j} \\ \vec{B}_I(x, t) = \frac{1}{v_1} \vec{E}_{oI} e^{i(\kappa_1 x - \omega t)} \hat{k} \end{array} \right\} \quad (8.84)$$

Arakesitten tekrar 1. ortama yansıyan dalga:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_R(x, t) = \vec{E}_{oR} e^{i(-\kappa_1 x - \omega t)} \hat{j} \\ \vec{B}_R(x, t) = -\frac{1}{v_1} \vec{E}_{oR} e^{i(-\kappa_1 x - \omega t)} \hat{k} \end{array} \right\} \quad (8.85)$$

ve 2. ortama geçen dalga şöyle olur:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_T(x, t) = \vec{E}_{oT} e^{i(\kappa_2 x - \omega t)} \hat{j} \\ \vec{B}_T(x, t) = \frac{1}{v_2} \vec{E}_{oT} e^{i(\kappa_2 x - \omega t)} \hat{k} \end{array} \right\} \quad (8.86)$$

\vec{B}_R ifadesindeki eksi işarete dikkat edin: yansıyan dalga için \vec{k} dalga vektörü ters yönde olduğundan, (8.62) denklemindeki $\vec{k} \times \vec{n}$ çarpımından dolayı magnetik alan bileşeni de ters yönde olur. Diğer bir açıdan bakılırsa, Poynting vektörünün ilerleme yönünde olabilmesi için magnetik alan böyle alınmalıdır.

$x = 0$ arakesitinde, soldaki $\vec{E}_I + \vec{E}_R$ ve $\vec{B}_I + \vec{B}_R$ toplam alanları ile, sağ taraftaki \vec{E}_T ve \vec{B}_T alanları (8.83) sınır koşullarını sağlamalıdır. Yüze normal gelen dalga yüzeye dik bileşenler olmayacağından, (i) ve (ii) koşulları işe yaramaz. (iii) koşulunu göre

$$\vec{E}_{oI} + \vec{E}_{oR} = \vec{E}_{oT} \quad (8.87)$$

olmalı ve (iv) koşuluna göre ise

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\vec{E}_{oI}}{v_1} - \frac{\vec{E}_{oR}}{v_1} \right) = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\vec{E}_{oT}}{v_2} \right)$$

veya,

$$\vec{E}_{oI} - \vec{E}_{oR} = \beta \vec{E}_{oT} \quad (8.88)$$

olmalıdır. Burada, β parametresi şöyle tanımlanmıştır:

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} \quad (8.89)$$

(8.87) ve (8.88) denklemleri çözülerek, yansıyan ve geçen genlikler gelen genlik cinsinden bulunur:

$$\vec{E}_{oR} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \vec{E}_{oI}, \quad \vec{E}_{oT} = \left(\frac{2}{1 + \beta} \right) \vec{E}_{oI} \quad (8.90)$$

Bu sonuçlar, teldeki dalga için bulduğumuz (8.49) ifadelerine çok benzemektedir. Özel olarak, ortamların μ magnetik geçirgenliği boşluktaki değerine çok yakınsa (bu, çoğunlukla böyledir), o zaman $\beta = v_1/v_2$ olur ve

$$\vec{E}_{oR} = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) \vec{E}_{oI}, \quad \vec{E}_{oT} = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) \vec{E}_{oI} \quad (8.91)$$

yani, teldeki dalga formüllerinin aynı olur. Daha önce bulduğumuz gibi, eğer $v_2 > v_1$ ise, yansıyan dalga aynı fazda, fakat $v_2 < v_1$ ise zıt fazda olur. Fiziksel genlikler şöyle olur:

$$E_{oR} = \left| \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right| E_{oI}, \quad E_{oT} = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) E_{oI} \quad (8.92)$$

veya, kırılma indisleri cinsinden yazılır:

$$E_{oR} = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right| E_{oI}, \quad E_{oT} = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right) E_{oI} \quad (8.93)$$

Gelen enerjinin ne kadarı yansır ve ne kadarı diğer ortama geçer? (8.82) formülüne göre, şiddet (birim yüzeye düşen güç)

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v E_o^2$$

idi. Eğer (yine) $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ise, yansıyan şiddetin gelen şiddete oranı şöyle bulunur:

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{oR}}{E_{oI}} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (8.94)$$

Geçen dalga şiddetinin oranı da bulunur:

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{oT}}{E_{oI}} \right)^2 = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (8.95)$$

Burada boyutsuz R parametresine yansımaya katsayısı ve T parametresine de geçme katsayısı denir. Dikkat ederseniz .

$$R + T = 1 \quad (8.96)$$

olup, gelen enerjinin diğer ortama geçerken ve yansırken korunduğunu ifade eder. Örneğin, havadan ($n_1 = 1$) cama ($n_2 = 1.5$) geçen ışık için $R = 0.04$ ve $T = 0.96$ bulunur, yani ışığın büyük kısmı geçer.

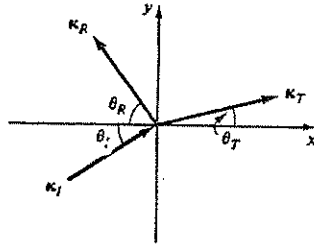
Problem 8.13 Ortamlar için $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ varsayımı yapmadan, yansımaya ve geçme katsayıları ifadelerini çıkarın. Yine $R + T = 1$ olduğunu gösterin.

Problem 8.14 (8.85) ve (8.86) dalga ifadelerini yazarken, yansıyan ve geçen dalgaların polarizasyon düzlemlerinin gelen dalgayla aynı olduğunu varsaydım. Bunun böyle olması gerektiğini ispatlayın. (Yansıyan ve geçen dalgaların polarizasyon vektörlerini şöyle alın:

$$\hat{n}_T = \cos \theta_T \hat{j} + \sin \theta_T \hat{k}, \quad \text{ve} \quad \hat{n}_R = \cos \theta_R \hat{j} + \sin \theta_R \hat{k}$$

Bu durumda, sınır koşullarına göre $\theta_T = \theta_R = 0$ olacağını gösterin.

8.2.5 Eğimli Gelişte Yansımaya ve Kırılma



Şekil 8.17

Yukarda yüzeye normal doğrultuda gelen dalganın yansımaya ve geçmesini inceledik. Şimdi daha genel durumu, yani eğimli gelen dalgayı ele alalım. Dalganın geliş açısı θ_I olsun (Şek. 8.17). Yine sol taraftan yaklaşan tekrenkli düzlem dalga bileşenleri yazılır:

$$\vec{E}_I(\vec{r}, t) = \vec{E}_{oI} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{ve} \quad \vec{B}_I(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_I \times \vec{E}_I) \quad (8.97)$$

Yansıyan dalga bileşenleri

$$\vec{E}_R(\vec{r}, t) = \vec{E}_{oR} e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{ve} \quad \vec{B}_R(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_R \times \vec{E}_R) \quad (8.98)$$

ve geçen dalga bileşenleri

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{E}_{oT} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{ve} \quad \vec{B}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_2} (\hat{k}_T \times \vec{E}_T) \quad (8.99)$$

olur. Her üç dalganın ω frekansı aynıdır—bu özellik dalganın oluştuğu kaynaktan belirlenir. Dalga sayıları arasındaki ilişkiler (8.24) denklemleriyle verilir:

$$\kappa_I v_1 = \kappa_R v_1 = \kappa_T v_2 = \omega \quad \text{veya} \quad \kappa_I = \kappa_R = \frac{v_2}{v_1} \kappa_T = \frac{n_1}{n_2} \kappa_T \quad (8.100)$$

8.2. DİELEKTRİK ORTAMDA ELEKTROMAGNETİK DALGA

Şimdi, 1. ortamdaki bileşke $\vec{E}_I + \vec{E}_R$ ve $\vec{B}_I + \vec{B}_R$ alanları, arakesit yüzeyinde 2. ortamın alanlarıyla (8.83) sınır koşullarını sağlamalıdır. Tüm bu sınır koşullarının ortak ifadesi şu yapıda olacaktır:

$$x = 0 \text{ da} \quad () e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)} + () e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} = () e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (8.101)$$

Parantezlerin içini birazdan dolduracağız; fakat burada dikkat ederseniz, y , z ve t 'ye bağıllık sadece üstel fonksiyonlar içinde olmaktadır. Sınır koşulları arakesit düzleminin her yerinde ve her zaman geçerli olduğundan, bu eşitliklerin sağlanabilmesi için üstel fonksiyonlar eşit olmalıdır. Aksi takdirde, örneğin y deki küçük bir artış eşitliği bozar (bkz. Problem 8.15). ωt terimleri daha baştan eşittirler; uzay terimlerine gelince

$$x = 0 \text{ da} \quad \vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r} \quad (8.102)$$

olmalıdır. Bunu daha açık yazarsak, her x ve y değeri için.

$$(\kappa_I)_y y + (\kappa_I)_z z = (\kappa_R)_y y + (\kappa_R)_z z = (\kappa_T)_y y + (\kappa_T)_z z \quad (8.103)$$

olmalıdır. Bunun gerçekleşebilmesi için y ve z değişkenlerinin katsayıları ayrı ayrı eşit olmalıdır; çünkü, örneğin $y = 0$ olduğunda

$$(\kappa_I)_z = (\kappa_R)_z = (\kappa_T)_z \quad (8.104)$$

ve $z = 0$ olduğunda,

$$(\kappa_I)_y = (\kappa_R)_y = (\kappa_T)_y \quad (8.105)$$

bulunur.

Eksenleri seçerken \vec{k}_I vektörünü xy -düzleminde olacak şekilde alırsak, $(\kappa_I)_z = 0$ olur, ve (8.104) bağıntısına göre, \vec{k}_R ve \vec{k}_T vektörleri de aynı düzlemde olurlar. Buna göre, yansımaya ve geçme koşulları şöyle özetlenebilir:

(A) Gelen, yansıyan ve geçen dalga vektörleri, yüzey normali (burada x -ekseni) ile aynı düzlemde olurlar. Buna geliş düzlemi denir.

Öte yandan, (8.105) bağıntısı açılar cinsinden yazılırsa,

$$\kappa_I \sin \theta_I = \kappa_R \sin \theta_R = \kappa_T \sin \theta_T \quad (8.106)$$

olur. Burada θ_I geliş açısı, θ_R yansımaya açısı ve θ_T geçiş açısı veya, daha bilinen adıyla kırılma açısı olurlar (Şek. 8.17). (8.100) bağıntıları gözönüne alınırsa,

$$(B) \quad \theta_I = \theta_R \quad (8.107)$$

veya, geliş açısı yansımaya açısına eşittir. Son olarak,

$$(C) \quad \frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2} \quad (8.108)$$

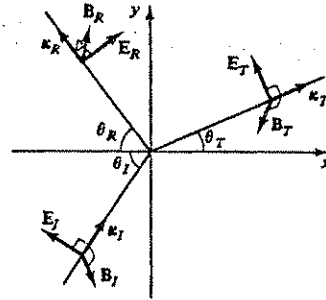
bulunur. Bu, Snell yasasıdır.

(A), (B) ve (C) geometrik optiğin temel yasalarıdır. Bunları elde etmek için pek az elektromagnetik teori kullandık; henüz sınır koşullarını tam kullanmış değiliz—sadece (8.101) denkleminde üstel fonksiyonların eşitliğini kullandık.

(8.101) denklemindeki üstel fonksiyonların eşitliğini sağladıktan sonra, bunlar birbirini götürür ve (8.83) sınır koşulları şöyle sadeleşir:

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad \epsilon_1 [\tilde{E}_{oI} + \tilde{E}_{oR}]_x &= \epsilon_2 (\tilde{E}_{oT})_x \\ (ii) \quad [\tilde{B}_{oI} + \tilde{B}_{oR}]_x &= (\tilde{B}_{oT})_x \\ (iii) \quad [\tilde{E}_{oI} + \tilde{E}_{oR}]_{y,z} &= (\tilde{E}_{oT})_{y,z} \\ (iv) \quad \frac{1}{\mu_1} [\tilde{B}_{oI} + \tilde{B}_{oR}]_{y,z} &= \frac{1}{\mu_2} (\tilde{B}_{oT})_{y,z} \end{aligned} \right\} \quad (8.109)$$

Burada $\tilde{B}_o = (\kappa \times \tilde{E}_o)/v$ olur. (Son iki denklem, biri y ve diğeri z bileşeni olmak üzere, ikişer denklem sayılır.)



Şekil 8.18

Gelen dalganın polarizasyon yönünün geliş düzlemi içinde olduğunu varsayalım (Şek. 8.18'de xy -düzlemi). (Not: Geliş düzlemine *dik* polarizasyon durumunu size bırakıyorum—bkz. Problem 8.16). Buna göre, (i) koşulu şöyle olur:

$$\epsilon_1 [-\tilde{E}_{oI} \sin \theta_I + \tilde{E}_{oR} \sin \theta_R] = \epsilon_2 (-\tilde{E}_{oT} \sin \theta_T) \quad (8.110)$$

(ii) koşulu işe yaramaz ($0 = 0$). (iii) koşuluna gelince

$$(\tilde{E}_{oI} \sin \theta_I + \tilde{E}_{oR} \sin \theta_R) = \tilde{E}_{oT} \sin \theta_T \quad (8.111)$$

ve (iv) koşulu yazılır:

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} [\tilde{E}_{oI} - \tilde{E}_{oR}] = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{oT} \quad (8.112)$$

Yukarda bulduğumuz yansıma ve kırılma yasalarını da gerektiği yerde kullanırsak, (8.110) denklemi indirgenir:

$$\tilde{E}_{oI} - \tilde{E}_{oR} = \beta \tilde{E}_{oT} \quad (8.113)$$

Buradaki β parametresi yine şöyledir:

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \quad (8.114)$$

Ve (8.111) denklemi şöyle olur:

$$\tilde{E}_{oI} + \tilde{E}_{oR} = \alpha \tilde{E}_{oT} \quad (8.115)$$

Buradaki yeni parametre

$$\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} \quad (8.116)$$

olur. Şimdi, (8.113) ve (8.115) denklemlerini yansıyan ve geçen dalga genlikleri için çözeriz:

$$\tilde{E}_{oR} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{oI}, \quad \text{ve} \quad \tilde{E}_{oT} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{oI} \quad (8.117)$$

Bu iki formül, geliş düzleminde polarize olmuş dalga için Fresnel denklemleri adıyla bilinirler. (Diğer iki Fresnel denklemi, geliş düzlemine *dik* polarize olmuş dalga için vardır—bkz. Problem 8.16). Geçen dalganın gelen dalgayla *aynı fazda* olduğuna, yansıyan dalganın ise $\alpha > \beta$ için aynı fazda, $\alpha < \beta$ için ise, 180° farklı fazda olduğuna dikkat edelim.

Yansıyan ve geçen dalga genlikleri geliş açısına bağlı olurlar, çünkü α oranı θ_I geliş açına bağlıdır:

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}}{\cos \theta_I} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I \right)^2}}{\cos \theta_I} \quad (8.118)$$

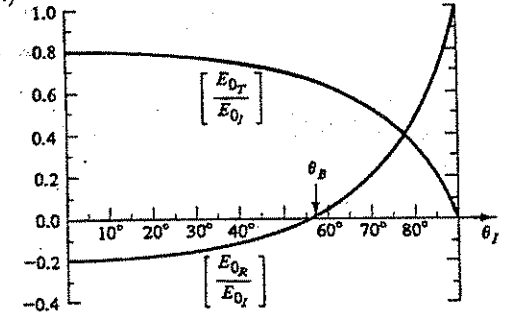
Yüzeye normal gelen dalga için $\theta_I = 0$ ve $\alpha = 1$ olur ve (8.90) formüllerini tekrar elde ederiz. Yüzeyi sıyrarak gelen dalga için $\theta_I = 90^\circ$ ve $\alpha \rightarrow \infty$ olur; yani, gelen dalganın tümü yansır. (Gece ıslak bir yolda araba sürenler bunun acısını iyi bilirler.) Bu ikisinin arasında öyle bir θ_B açısı (buna Brewster açısı denir) vardır ki yansıyan dalga genliği sıfır olur.³ (8.117) denkleminde göre, bunun mümkün olabilmesi için $\alpha = \beta$ olmalıdır; veya, (8.118) denklemi kullanılırsa

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2} \quad (8.119)$$

koşulu bulunur. Çoğu maddeler için $\mu_1 \cong \mu_2$ alınır, $\beta = n_2/n_1$, $\sin^2 \theta_B = \beta^2/(1 + \beta^2)$ olur; buradan Brewster açısı çıkar:

$$\tan \theta_B = \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (8.120)$$

Şek. 8.19'da yansıyan ve geçen dalga genliklerinin θ_I açısına göre grafikleri, hava ($n_1 = 1$) ve cam ($n_2 = 1.5$) arakesiti için gösterilmiştir. (Grafikte negatif sayılar, 180° faz farkını gösterir, yoksa genlikler daima pozitiftir.)



Şekil 8.19

Arakesitin birim yüzeyine düşen güç $\vec{S} \cdot \hat{n}$ olup, \hat{n} birim normal vektördür (burada \hat{x}). Buna göre, gelen dalga şiddeti

$$I_I = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{oI}^2 \cos \theta_I \quad (8.121)$$

³ Geliş düzlemine dik yönde polarize olmuş dalgada böyle bir açı yoktur. Buna göre, Brewster açısıyla gelen bir dalganın yansıyan bileşeni *tümeyile arakesit düzlemine paralel* yönde polarize olmuş olur. Polaroid camdan yapılmış güneş gözlüklerinde geçiş eksenini dikey alınırsa ve yatay yüzeylerden yansıyan ışığın azalması sağlanır.

Yansıyan ve geçen dalga şiddetleri de

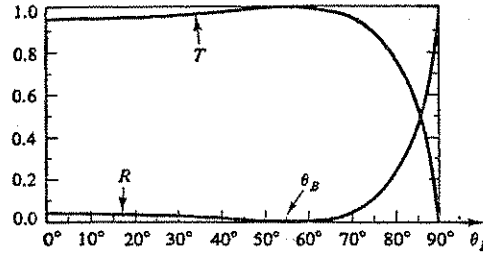
$$I_R = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{oR}^2 \cos \theta_R \quad \text{ve} \quad I_T = \frac{1}{2} \epsilon_2 v_2 E_{oT}^2 \cos \theta_T \quad (8.122)$$

olurlar. O halde, geniş düzlemine paralel polarize olmuş dalganın yansıma ve geçme katsayıları şöyle olur:

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{oR}}{E_{oI}} \right)^2 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \quad (8.123)$$

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{oT}}{E_{oI}} \right)^2 \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \alpha \beta \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2 \quad (8.124)$$

Şek. 8.20'de hava/cam arakesiti için, yansıma ve geçme katsayılarının geliş açısına göre grafikleri gösterilmiştir. R yansıyan enerji oranıdır—doğal olarak, Brewster açısında sıfıra gider. T geçen enerji oranıdır— θ_B açısında 1 olur. Yine, enerji korunumu gereği, $R + T = 1$ olduğu kontrol edilebilir.



Şekil 8.20

Problem 8.15 A, B, C, a, b, c sıfırdan farklı sabitler olsun; her y değerinde $Ae^{iax} + Be^{ibx} = Ce^{icy}$ oluyorsa, $a = b = c$ olduğunu gösterin.

! Problem 8.16 Geniş düzlemine dik yönde polarize olmuş dalga için, (8.109) sınır koşullarını kullanarak, Fresnel denklemlerini çıkarın. $\beta = n_2/n_1 = 1.5$ değerinde (E_{oR}/E_{oI}) ve (E_{oT}/E_{oI}) 'nin θ_I açısına göre grafiklerini çizin. Bu durumda Brewster açısı olmadığını, yani E_{oR} 'nin daima sıfırdan farklı olduğunu gösterin (tabii, $n_1 = n_2$ durumu hariç, çünkü bu durumda iki ortam ayırt edilemez). Bulduğunuz Fresnel denklemlerinin normal geliş limitini doğru verdiğini gösterin. Yansıma ve geçme katsayılarını bulun ve toplamlarının 1 olduğunu gösterin.

Problem 8.17 Elmasın kırılma indisi 2.42 dir. Hava/elmas arakesiti için Şek. 8.19'un benzerini çizin. ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ olduğunu varsayın.) Özel olarak şunları hesaplayın:

- Normal gelişte genlikleri,
- Brewster açısını,
- Yansıyan ve geçen genliklerin eşit olduğu açıyı.

8.3 İLETKEN ORTAMDA ELEKTROMAGNETİK DALGA

8.3.1 Değişik Bir Dalga Denklemi

Bu bölümün başında elektromagnetik dalga denklemini çıkarırken, ρ_f serbest yük ve \vec{J}_f serbest akım yoğunluklarının her yerde sıfır olduğunu varsaymıştım. Bu kısıtlama boşlukta

8.3. İLETKEN ORTAMDA ELEKTROMAGNETİK DALGA

veya cam, saf su gibi dielektrik maddeler için gayet uygundur. Fakat metaller veya tuzlu su gibi iletkenlerde, yüklerin hareketini engelleyemeyiz ve genelde \vec{J}_f sıfırdan farklıdır. Ohm yasasına göre, bir iletkende serbest akım yoğunluğu elektrik alanla orantılıdır:

$$\vec{J}_f = \sigma \vec{E} \quad (8.125)$$

Buna göre, lineer iletken bir ortamda Maxwell denklemleri şöyle olur:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} & \text{(iii)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(ii)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(iv)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\sigma \vec{E} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (8.126)$$

Serbest akımlar için yük korunumunu yazalım:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \quad (8.127)$$

Ohm yasası ve (i) Gauss yasası kullanılırsa

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\sigma(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_f$$

bu diferansiyel denklem hemen çözülür:

$$\rho_f(t) = \rho_f(0) e^{-(\sigma/\epsilon)t} \quad (8.128)$$

Bu sonuca göre, başlangıçta olabilecek $\rho_f(0)$ serbest yük yoğunluğu $\tau = (\epsilon/\sigma)$ gibi karakteristik bir süre içinde sıfıra gidecektir. Bu, iletken içine konulan serbest yüklerin hemen yüzeye gidişi demektir. O halde, bu karakteristik zaman kadar beklersek, iletkenler içinde $\rho_f = 0$ alabiliriz. Buna göre, Maxwell denklemleri

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & \text{(iii)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(ii)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(iv)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\sigma \vec{E} \end{array} \right\} \quad (8.129)$$

olur. Bu denklemlerin, dielektrik ortamdan tek farkı (iv) deki son terimdir.

Yine, (iii) ve (iv) denklemlerinin rotasyoneli alınırsa, \vec{E} ve \vec{B} için değişik birer dalga denklemi elde edilir:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{ve} \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.130)$$

Bu denklemlerin de düzlem dalga çözümleri vardır:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(\kappa x - \omega t)} \quad \text{ve} \quad \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 e^{i(\kappa x - \omega t)} \quad (8.131)$$

Bu çözümler (8.130) denklemlerinde kullanıldığında, bu kez κ dalga sayısının kompleks olduğu görülür:

$$\kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \quad (8.132)$$

Bu ifadenin karekökü alınır ve kompleks dalga sayısının reel ve sanal kısımlarını ayrı yazılırsa⁴

$$\kappa = \kappa_+ + i\kappa_- \quad (8.133)$$

⁴Kompleks sayıların iki karekökü olur; burada, $\sigma \rightarrow 0$ limitinde daha önceki $\kappa = \omega/\nu$ ifadesini veren pozitif kökü alıyoruz.

Hesap sonucu şunu verir:

$$\kappa_{\pm} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2} \pm 1 \right]^{1/2} \quad (8.134)$$

Dalga sayısının κ_{-} sanal kısmı, sönümlü bir dalga olduğunu gösterir:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{-\kappa_{-} x} e^{i(\kappa_{+} x - \omega t)} \quad \text{ve} \quad \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 e^{-\kappa_{-} x} e^{i(\kappa_{+} x - \omega t)} \quad (8.135)$$

Genliğin ilk değerinden $1/e$ kadar azaldığı uzunluğa deri kalınlığı denir:

$$d = \left(\frac{1}{\kappa_{-}} \right) \quad (8.136)$$

Deri kalınlığı elektromagnetik dalganın iletken içine ne kadar nüfuz edebildiğinin bir ölçüsüdür.

Dalga sayısının reel kısmı ise dalgaboyu, hız ve kırılma indisini tayin eder:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa_{+}}, \quad v = \frac{\omega}{\kappa_{+}}, \quad n = \frac{c\kappa_{+}}{\omega} \quad (8.137)$$

"Kötü iletken" denilen iletken türü

$$\sigma \ll \omega \epsilon \quad (8.138)$$

olarak tanımlanır; bu durumda

$$\kappa_{+} \approx \omega \sqrt{\epsilon \mu}, \quad \kappa_{-} \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (8.139)$$

olup, deri kalınlığı frekanstan bağımsız olur.

"İyi iletken" maddeler

$$\sigma \gg \omega \epsilon \quad (8.140)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda, κ_{+} ve κ_{-} yaklaşık eşit olurlar:

$$\kappa_{+} \approx \kappa_{-} \approx \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu}{2}} \quad (8.141)$$

İyi iletkenlerde frekans arttıkça deri kalınlığı azalır. Bu durumda "dalgaboyu" kavramının geometrik anlamı kalmaz, çünkü içeri girebilen kısım bir dalgaboyunun üçte biri ($1/e$) kadar olur:

$$d \approx \frac{\lambda}{2\pi} \quad (8.142)$$

Unutmayın: "İyi" ve "kötü" iletken sıfatı, kullanılan dalganın frekansına bağlıdır: aynı bir madde düşük frekanslarda iyi iletken, yüksek frekanslarda kötü iletken olabilir. (Ayrıca, Kısım 8.4'de göreceğimiz gibi, σ da frekansa bağlı olabilir.)

Örnek 8.4 : Deniz suyu $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$, $\epsilon \approx 70\epsilon_0 \approx 6 \times 10^{-10} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ ve $\sigma \approx 5 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ dir. Deniz suyu elektromagnetik dalgaların davranışını inceleyin.

Çözüm : Önce σ/ϵ oranına bakalım:

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \approx 10^{10} / \text{s}$$

Buna göre, 10^{10} Hz 'den daha yüksek frekanslı (görünür ışık bölgesi ve ötesindeki) dalgalar için deniz suyu kötü bir iletken olur. Bu durumda deri kalınlığı (8.136) formülüyle bulunur:

$$d \approx \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \approx 1 \text{ cm}$$

Bu sonuç gerçeğe pek uymaz, çünkü σ iletkenliği de frekansa bağlıdır.

Daha düşük frekanslı bölgede deniz suyu iyi bir iletken olur. Radyo frekansı bölgelerinde deri kalınlığı oldukça büyük olur. Örneğin, 10 m derinlikteki bir denizaltıyla iletişim kurabilmek için kullanılması gereken frekans

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi \sigma \omega d^2} \approx 500 \text{ Hz}$$

olup, buna karşılık gelen (havadaki) dalgaboyu 600 km dir. Bu, suyun altındaki bir denizaltıyla iletişim kurmanın imkansız olduğunu gösterir.

Örnek 8.5 : Metallerde elektromagnetik dalgaların davranışını inceleyin.

Çözüm : Metallerde genellikle $\sigma \approx 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$, $\mu \approx 10^{-6} \text{ N/A}^2$ ve $\epsilon \approx 10^{-11} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ mertebesinde. Buradan $(\sigma/\epsilon) \approx 10^{18} / \text{s}$ bulunur. O halde, metaller morötesine kadar geniş bir bölgede iyi iletken olurlar. Optik frekanslar ($\omega \approx 10^{15} / \text{s}$) bölgesinde deri kalınlığı 10^{-8} m olur; bu, metallerin neden saydam olmadığını açıklar. (Bu, yine ilkel bir yaklaşıktır, çünkü σ 'nın frekansa bağımlı yok saymaktayız.)

Problem 8.18 (a) Bir cam parçası içine serbest yük katıldığını varsayalım. Yüklerin yüzeye erişmesi ne kadar zaman alır?

(b) Gümüş iyi bir iletken; fakat çok pahalı bir metaldir. 10^{10} Hz mikrodalga frekansında çalışan bir aletin dışarıya karşı yalıtılmasını istiyoruz. Gümüş kaplama kalınlığı en az ne kadar olmalıdır?

(c) 1 MHz frekanslı radyo dalgalarının bakır içindeki dalgaboyu ve ilerleme hızını bulun. Bunları havadaki (veya, boşluktaki) değerlerle karşılaştırın.

Problem 8.19 Örnek 8.4'ü incelerken, frekans arttıkça deri kalınlığının artacağını sanmış olabilirsiniz. Tersine, ϵ , σ ve μ sabit kaldığında, ω artarken d 'nin düzgün olarak azalacağını gösterin. Deri kalınlığını artırmanın tek yolu dalga boyunu artırmaktır. d 'nin ω 'ya göre grafiğini çizin.

8.3.2 İletken Ortamda Tekrenkli Düzlem Dalgalar

(8.135) denklemi sönümlü düzlem dalga, her \vec{E}_0 ve \vec{B}_0 için, (8.130) yeni dalga denklemini sağlar. Buna ek olarak, (8.129) Maxwell denklemlerinin getirdiği diğer kısıtlamalar vardır; bunlar da genlik oranlarını, fazları ve polarizasyon düzlemlerini tayin eder.

(8.129) denklemlerinden, (i) ve (ii) denklemleri yine x -bileşenlerinin sıfır, yani elektromagnetik dalganın enine olduğunu gösterir. Bu durumda, y -eksenimizi \vec{E} 'nin polarize olduğu yönde seçelim:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{-\kappa_{-} x} e^{i(\kappa_{+} x - \omega t)} \hat{j} \quad (8.143)$$

Buna göre, (iii) denklemi magnetik alanı şöyle verir:

$$\vec{B}(x, t) = \left(\frac{\kappa}{\omega} \right) \vec{E}_0 e^{-\kappa_{-} x} e^{i(\kappa_{+} x - \omega t)} \hat{k} \quad (8.144)$$

[(iv) denklemi de aynı şeyi verir.] Yine, elektrik ve magnetik alanlar birbirine diktir.

Her kompleks sayı gibi, κ da mutlak değer ve fazı cinsinden yazılabilir:

$$\kappa = \kappa_+ + i\kappa_- = |\kappa| e^{i\phi} \quad (8.145)$$

Bu değerler hesaplanırsa

$$|\kappa| = \sqrt{\kappa_+^2 + \kappa_-^2} = \omega \sqrt{\epsilon \mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2}} \quad (8.146)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+}\right) \quad (8.147)$$

(8.143) ve (8.144) ifadelerine göre, $\vec{E}_0 = E_0 e^{i\delta_E}$ ve $\vec{B}_0 = B_0 e^{i\delta_B}$ kompleks genlikleri arasında şöyle bir bağıntı olmalıdır:

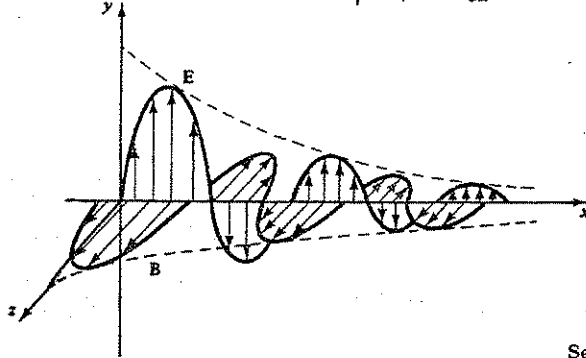
$$B_0 e^{i\delta_B} = \frac{|\kappa| e^{i\phi}}{\omega} E_0 e^{i\delta_E} \quad (8.148)$$

Görüldüğü gibi, artık elektrik ve magnetik alanlar aynı fazda değildir. Bunlar arasındaki faz gecikmesi

$$\delta_B - \delta_E = \phi \quad (8.149)$$

olur. Şek. 8.21'de görüldüğü gibi, magnetik alan elektrik alanın gerisinden gelir. Öte yandan, fiziksel genlikler arasındaki bağıntı şöyle olur:

$$B_0 = \frac{|\kappa|}{\omega} E_0 = \sqrt{\epsilon \mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2}} E_0 \quad (8.150)$$



Şekil 8.21

Sonuç olarak, fiziksel elektromagnetik dalga şöyle olur:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(x, t) &= E_0 e^{-\kappa_- x} \cos(\kappa_+ x - \omega t + \delta_E) \hat{j} \\ \vec{B}(x, t) &= \frac{|\kappa| E_0}{\omega} e^{-\kappa_- x} \cos(\kappa_+ x - \omega t + \delta_E + \phi) \hat{k} \end{aligned} \right\} \quad (8.151)$$

Bu elektromagnetik dalga Şek. 8.21'de gösterilmiştir.

İletken ortamda enerji, elektrik ve magnetik alanlar arasında eşit paylaşılmaz:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} \right) \\ &= \frac{1}{2} E_0^2 e^{-2\kappa_- x} \left\{ \epsilon \cos^2(\kappa_+ x - \omega t + \delta_E) + \frac{|\kappa|^2}{\mu \omega^2} \cos^2(\kappa_+ x - \omega t + \delta_E + \phi) \right\} \quad (8.152) \end{aligned}$$

Bir periyottaki ortalama enerji hesaplanırsa

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} \epsilon E_0^2 e^{-2\kappa_- x} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2} \right] \quad (8.153)$$

bulunur; görüldüğü gibi magnetik katkı (ikinci terim) daima daha baskındır. Aslında, "iyi" iletkenlerde enerjinin yaklaşık tümü magnetik olur:

$$\langle U \rangle \simeq \frac{1}{4} \frac{\sigma}{\omega} E_0^2 e^{-2\kappa_- x} \quad (8.154)$$

Öte yandan, enerji akısını veren Poynting vektörü hesaplanırsa

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} = \frac{|\kappa|}{\mu \omega} E_0^2 e^{-2\kappa_- x} [\cos(\kappa_+ x - \omega t + \delta_E) \cos(\kappa_+ x - \omega t + \delta_E + \phi)] \hat{i} \quad (8.155)$$

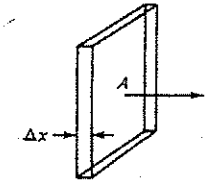
Artık fazları farklı olduğundan, iki kosinüs çarpımının bir periyottaki ortalama değeri $\frac{1}{2}$ olmaz:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos(\theta + \phi) d\theta = \frac{1}{2} \cos \phi \quad (8.156)$$

Burada $|\kappa| \cos \phi = \kappa_+$ olduğundan,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\kappa_+}{\mu \omega} E_0^2 e^{-2\kappa_- x} \hat{i} \quad (8.157)$$

Örnek 8.6 : İletken içinde sönümlü dalga ilerledikçe, (8.154) formülündeki $e^{-2\kappa_- x}$ çarpanından dolayı, enerji yoğunluğu azalır. Bu "kayıp" enerji nereye gider?



Şekil 8.22

Çözüm : Yanıt: İletkeni ısıtır. Joule yasasının en genel (7.82) ifadesine göre, V hacminde kayıp güç

$$P = \int_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) d\tau$$

olur. Şek. 8.22'deki kesiti A ve kalınlığı Δx olan iletken tabakaya bunu uygularsak

$$P = \sigma E^2 A \Delta x$$

olur. (8.152) formülündeki düzlem dalga kullanılırsa, tabaka içinde birim zamanda harcanan ortalama enerji

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2\kappa_- x} A \Delta x$$

olur. Peki, tabakada ısıya dönüşen bu enerji elektromagnetik alanın Poynting vektörüyle kaybettiği enerjiye eşit midir? (8.158) ifadesine göre, tabakaya soldan giren ortalama güç

$$\frac{1}{2} \frac{\kappa_+}{\mu \omega} E_0^2 e^{-2\kappa_- x} A$$

ve, sağ taraftan çıkan güç, aynı ifadenin $x + \Delta x$ 'deki değeridir. Buna göre, tabaka içinde kaybedilen enerji bu ikisinin farkı olur:

$$(P) = \frac{1}{2} \frac{\kappa_+}{\mu\omega} E_0^2 A \left(-\frac{d}{dx} e^{-2\kappa_- x} \right) \Delta x = \frac{\kappa_+ \kappa_-}{\mu\omega} E_0^2 e^{-2\kappa_- x} A \Delta x$$

$\kappa_+ \kappa_- = \frac{1}{2} \sigma \mu \omega$ olduğundan, iki ifade birbirine eşittir; iletken tabakada ısıya dönüşen enerji elektromagnetik alanın burada kaybettiği enerjiye eşittir. Birim hacimde kaybolan ortalama güç şöyle olur:

$$\frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2\kappa_- x} \quad (8.158)$$

Problem 8.20 "İyi" bir iletkende magnetik alanın elektrik alandan 45° faz farkıyla geriden geldiğini gösterin ve genlikleri oranını bulun.

Problem 8.21 Kalın bir iletken tabaka üzerine gönderilen tekrenkli elektromagnetik dalgayı gözönüne alın.

- (a) İletkene aktarılan toplam enerjinin yüzde kaçını deri kalınlığı içinde harcar?
- (b) Tabakada harcanan toplam gücün, tabaka yüzeyinden [(8.157) denkleminde $x = 0$ dan] giren güce eşit olduğunu gösterin.

8.3.3 İletken Yüzeyden Yansıma ve Geçme

Dielektrik yüzeyler için kullandığımız (8.83) sınır koşulları serbest yük ve akım olduğu durumda geçersizdir. Bunların yerine, daha genel olan (7.61) koşullarını alırsız:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \epsilon_1 E_{1\perp} - \epsilon_2 E_{2\perp} = \sigma_f \\ \text{(ii)} & B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \\ \text{(iii)} & \vec{E}_{1\parallel} - \vec{E}_{2\parallel} = 0 \\ \text{(iv)} & \frac{\vec{B}_{1\parallel}}{\mu_1} - \frac{\vec{B}_{2\parallel}}{\mu_2} = \vec{K}_f \times \hat{n} \end{array} \right\} \quad (8.159)$$

Burada σ_f ve \vec{K}_f arakesit yüzeydeki yük ve akım yoğunluklarıdır. Yüzey normali arakesite dik ve 2.ortamdan 1.ortama doğru alınır. Ohm yasasına uyan iletkenlerde ($\vec{J}_f = \sigma \vec{E}$), serbest yüzey akımı olamaz, aksi takdirde yüzeyde sonsuz magnetik alan olması gerekirdi. O halde, $\vec{K}_f = 0$.

Şimdi iletken olmayan lineer bir ortam (1) ile iletken bir ortamın (2) arakesit düzlemini yz-düzlemi olarak seçelim. Yine Şek. 8.16'da olduğu gibi, x -yönünde ilerleyen tekrenkli bir düzlem dalga sol taraftan arakesite yaklaşıyor olsun:

$$\vec{E}_I(x, t) = \vec{E}_{oI} e^{i(\kappa_1 x - \omega t)} \hat{j}, \quad \text{ve} \quad \vec{B}_I(x, t) = \frac{1}{v_1} \vec{E}_{oI} e^{i(\kappa_1 x - \omega t)} \hat{k} \quad (8.160)$$

Bunun sonucu yüzeyden yansıyan bir dalga

$$\vec{E}_R(x, t) = \vec{E}_{oR} e^{i(-\kappa_1 x - \omega t)} \hat{j}, \quad \text{ve} \quad \vec{B}_R(x, t) = -\frac{1}{v_1} \vec{E}_{oR} e^{i(-\kappa_1 x - \omega t)} \hat{k} \quad (8.161)$$

ve 2. ortama geçen bir dalga

$$\vec{E}_T(x, t) = \vec{E}_{oT} e^{i(\kappa_2 x - \omega t)} \hat{j}, \quad \text{ve} \quad \vec{B}_T(x, t) = \frac{\kappa_2}{\omega} \vec{E}_{oT} v_2 e^{i(\kappa_2 x - \omega t)} \hat{k} \quad (8.162)$$

olur. κ_2 kompleks olduğundan, (8.133) denkleminde göre, iletken içindeki dalga sönümlü olacaktır.

8.3. İLETKEN ORTAMDA ELEKTROMAGNETİK DALGA

$x = 0$ arakesitinde 1. ortamdaki toplam dalga ile 2. ortamdaki dalga (8.159) sınır koşullarına uymalıdır. Her iki tarafta $E_{\perp} = 0$ olduğundan, (i) koşulu $\sigma_f = 0$ verir. Yine, $B_{\perp} = 0$ olduğundan, (ii) koşulu kendiliğinden sağlanmış demektir. (iii) koşuluna gelince

$$\vec{E}_{oI} + \vec{E}_{oR} = \vec{E}_{oT} \quad (8.163)$$

ve (iv) koşuluna göre

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (\vec{E}_{oI} - \vec{E}_{oR}) - \frac{\kappa_2}{\mu_2 \omega} \vec{E}_{oT} = 0 \quad (8.164)$$

veya,

$$\vec{E}_{oI} - \vec{E}_{oR} = \beta \vec{E}_{oT} \quad (8.165)$$

bulunur. Bu kez, β parametresi şöyle oluşur:

$$\beta = \left(\frac{\mu_1 v_1 \kappa_2}{\mu_2 \omega} \right) \quad (8.166)$$

(8.163) ve (8.165) denklemleri çözülürse

$$\vec{E}_{oR} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \vec{E}_{oI}, \quad \text{ve} \quad \vec{E}_{oT} = \left(\frac{2}{1 + \beta} \right) \vec{E}_{oI} \quad (8.167)$$

olur. Bu sonuçlar şekil olarak dielektrik ortamdakilere benzeyebilir, fakat bu yanıltıcıdır çünkü bu kez β parametresi içinde yer alan κ_2 kompleks bir sayıdır.

İdeal iletken ($\sigma = \infty$) için, β sonsuz olur ve

$$\vec{E}_{oR} = -\vec{E}_{oI}, \quad \text{ve} \quad \vec{E}_{oT} = 0 \quad (8.168)$$

bulunur. Yani, elektromagnetik dalga tümüyle yansır ve 180° faz farkıyla geri döner. (Gümüş gibi mükemmel iletkenlerin ayna yapımında kullanılması bundandır. Pratikte bir camın arka yüzüne ince bir gümüş tabakası sıvanır—camın yansımaya bir ilgisi yoktur, sadece gümüşün kararmasını önlemek içindir. Optik frekanslarda deri kalınlığı 100 Å kadar olduğundan (Örnek 8.5), gümüş tabakasının fazla kalın olması gerekmez.)

İyi iletkenlerde ($\sigma \gg \omega \epsilon_2$) $|\beta|$ çok büyük olur ve, yukardaki sonuçları $1/\beta$ 'nın serisi olarak açabiliriz:

$$\left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) = -\frac{(1 - 1/\beta)}{(1 + 1/\beta)} \simeq -\left(1 - \frac{1}{\beta} \right)^2 \simeq \frac{2}{\beta} - 1$$

Bu yaklaşıklıkta, yansıma katsayısı şöyle olur:

$$R = \frac{|\vec{E}_{oR}|^2}{|\vec{E}_{oI}|^2} \simeq \left| \left(1 - \frac{2}{\beta} \right) \right|^2 \simeq 1 - 2 \frac{(\beta + \beta^*)}{|\beta|^2}$$

veya, (8.166), (8.133) ve (8.139) denklemleri gözönüne alınırsa

$$R \simeq 1 - \sqrt{8 \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{\omega \epsilon_1}{\sigma} \right)} \quad (8.169)$$

Örnek 8.7: Hava-gümüş yüzeyinde yansıma ve geçmeyi inceleyin.

Çözüm: Hava-gümüş ortamları için $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, ve optik frekanslarda ($\omega = 4 \times 10^{15} \text{ /s}$) $\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ olduğundan, (8.169) formülüne göre $R = 0.93$ bulunur. Yani, enerjinin % 93'ü yansır, % 7'si gümüş tarafından soğrulur. Daha düşük frekanslarda yansıma çok

daha iyi olur. Örneğin, 1 Mhz frekansta $R = 0.999994$ olur. (Fakat, bir sonraki örneği bekleyin.)

Problem 8.22 Poynting vektörünün (8.157) ifadesini kullanarak, iletken yüzeyde yansıma ve geçme katsayılarını çıkarın. (Yanıtınızı β cinsinden ifade edin.) $T + R = 1$ olduğunu gösterin. (İyi iletken varsayımı filan yapmayın.)

Problem 8.23 Genliği E_0 ve frekansı ω olan bir dalganın "iyi" bir iletken yüzeye uyguladığı basıncı hesaplayın. (Yol gösterme: Önce, gelen ve yansıyan dalganın momentumlarını bulun. Δt zaman aralığında iletken yüzeye aktarılan momentum ne kadardır?) Bu basıncın, iletkende serbest elektronlara uygulanan kuvvetle aynı mertebede olduğunu gösterin.

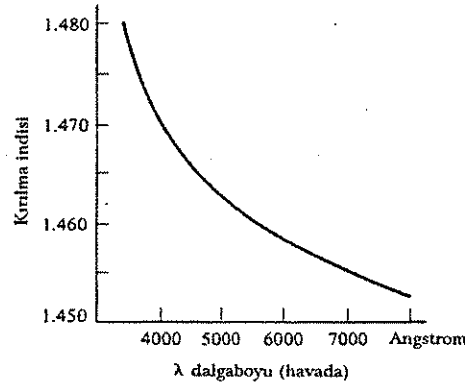
8.4 DİSPERSİYON

8.4.1 ϵ , μ ve σ 'nin Frekansa Bağlılığı

Buraya kadarki kısımlarda, madde içinde elektromagnetik dalga yayılışının maddenin üç özelliğine bağlı olduğunu gördük. Bunlar ϵ , μ elektrik ve magnetik geçirgenlikleri ile σ iletkenlik katsayısıdır. Fakat, gerçekte bu parametreler de dalganın frekansına bağlı olarak değişebilirler. Bu böyle olmasaydı, örneğin dielektriklerde ϵ ve μ sabit olsalardı, dalga hızı ve kırılma indisi

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad n = \frac{c}{v}$$

sabit olurlardı. Oysa, optikten bilindiği üzere, n kırılma indisi frekansa bağlıdır (tipik bir cam için durum Şek. 8.23 'de gösterilmiştir). Buna göre, prizmadan geçen mavi ışık kırmızıdan daha çok kırılır. Beyaz ışık ise gökkuşağı gibi tüm renklerine ayrılır. Bu olaya **dispersiyon** diyoruz. Benzer şekilde, dalga hızının frekansa bağlı olduğu ortamlara da **dispersif ortam** denir. (Maalesef, başta incelediğimiz teldeki enine dalga örneği dispersif değildir; yani $\sqrt{T/\mu}$ dalga hızı frekanstan bağımsızdır. Dispersiyon birçok dalga türünde gözlenir—bkz. Problem 8.24).



Şekil 8.23

Dispersif ortamda, farklı frekanstaki dalgalar farklı hızlarda ilerlediğinden, değişik frekanslardan oluşan bir dalga paketi ilerledikçe şekli değişecektir. Fakat, ω frekanslı her bir sinüsel bileşen

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (8.170)$$

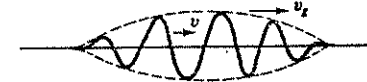
ile verilen hızda ilerleyecektir. Buna, o bileşenin dalga hızı (veya **faz hızı**) denir.

8.4. DİSPERSİYON

Dalga paketinin bir bütün olarak ilerleme hızına **grup hızı** denir:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (8.171)$$

Bir göle taş attığımızda oluşan dalgayı hiç gözlediniz mi? Dairesel dalga bir bütün halinde v_g hızıyla yayılırken, bunu oluşturan tepecikler *iki misli* daha hızlı giderler (bu dalga için $v = 2v_g$ dir). Tepecikler dalga paketinin gerisinde ortaya çıkar, giderek büyür ve ön tarafta yokolurlar (Şek. 8.24). Burada sadece tekrenkli, yani sinüsel dalgalarla ilgileneceğimiz için bu hız konularına girmeyeceğiz. Fakat, bilinmesi gereken şudur: Dispersif ortamda bir dalganın taşıdığı enerji grup hızıyla ilerler. Bu nedenle, bazı durumlarda v faz hızı c ışık hızından büyük çıkarsa telaşa kapılmayın.



Şekil 8.24

Biraz düşünürseniz, ϵ , μ , σ katsayılarının ω frekansına bağlı olması doğaldır. Çünkü bu parametreler, maddenin elektrik ve magnetik alanlara verdiği yanıtın birer ölçüsüdürler. Bu yanıt, tıpkı bir salıncığın hareketinin uygulanan itmenin frekansına bağlı oluşu gibi, frekansa bağlı olmalıdır. Fakat, maddelerin çoğunda μ katsayısı μ_0 değerine çok yakın olup frekansa bağımlılığı önemsizdir. Geriye ϵ ve σ kalıyor. Bu kısımda, madde içindeki elektronların davranışını basit bir modelle ele alıp $\epsilon(\omega)$ ve $\sigma(\omega)$ fonksiyonlarını elde edeceğiz. Fakat bu klasik model yaklaşıktır, maddenin gözlenen davranışını "elitatif olarak temsil eder.

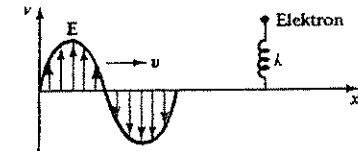
Problem 8.24 (a) Sığ suda dalga hızı derinliğin kareköküyle orantılı olduğundan, sığ su dispersif değildir. Fakat derin suda dalgalar suyun dibini değil, sadece λ dalgaboyu kadar bir derinliği "görürler". Buna göre, derinlik λ 'dan küçükse sığ su, daha büyükse derin su sayılır. Derin suda dalga (faz) hızının grup hızının iki katı olduğunu gösterin.

(b) Kuantum mekanikinde, x yönünde ilerleyen m kütleli bir parçacığın dalga fonksiyonu

$$\psi(x, t) = e^{i(px - Et)/\hbar}$$

olur. Burada p momentum ve $E = p^2/2m$ kinetik enerjidir. Parçacığın grup ve faz hızlarını bulun. Hangisi parçacığın klasik hızıdır? Faz hızının grup hızının yarısı olduğuna dikkat edin.

8.4.2 Dielektriklerde Dispersiyon



Şekil 8.25

Dielektrik bir ortamda elektronlar belirli moleküllere bağlıdır; bu bağ kuvvetlerinin yapısı son derece karmaşık olup kuantum mekanikleriyle incelenmesi gerekir. Bizim basit modelimizde elektronu, k sabitli bir yayla bağlanmış varsayacağız (Şek. 8.25):

$$F_{bağ} = -ky = -m\omega_0^2 y \quad (8.172)$$

Burada y denge konumundan uzaklık, m elektron kütlesi ve $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ doğal titreşim frekansındır. Bu modelin çok basit olması sizi rahatsız edebilir, ama bir de şunu düşünün:

Her bağ kuvveti, denge konumundan küçük yerdeğıştirmeler için bu yapıda olur. Örneğin, elektronun bağli olduğu $U(y)$ potansiyel enerjisi $y = 0$ denge konumu etrafında seri açılırsa

$$U(y) = U(0) + \left(\frac{dU}{dy} \right)_0 y + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)_0 y^2 + \dots$$

Birinci terim bir sabit olup fiziksel bir anlamı yoktur (referans noktası uygun seçilerek daima $U(0) = 0$ yapılabilir.) İkinci terim daima sıfırdır, çünkü denge konumunun tanımı $-dU/dy = F$ kuvvetinin sıfır olduğu yerdir. Üçüncü terim tam bizim modeldeki terimdir, çünkü $k = d^2U/dy^2|_0$ yay sabiti olarak tanımlanır. Yerdeğıştirmeler çok küçük olduğu sürece, daha yüksek dereceli terimler yok sayılabilir.

Elektron titreşim yaptığında, belli bir sürtünme kuvveti de olabilir. Burada hızla orantılı bir sürtünme kuvveti varsayalım:

$$F_s = -m\gamma \frac{dy}{dt} \quad (8.173)$$

Yine en basit bir sürtünme modeli, yani hızla ters yönde ve hızla orantılı bir kuvvet aldım. Sürtünmenin nereden kaynaklandığı burada bizi ilgilendirmiyor—ama ivmelenen yükün radyasyon yoluyla enerji kaybetmesi olabilir (bunu Bölüm 9'da göreceğiz).

Elektron üzerine, frekansı ω olan bir dış elektromagnetik alan gönderildiğinde, bir de bunun uyguladığı dış kuvvet vardır:

$$F_{dış} = qE = qE_0 \cos \omega t \quad (8.174)$$

Burada q elektron yükü, E_0 dalganın elektronun bulunduğu yerdeki genliğidir. (Burada sabit bir noktada hesap yaptığımızdan, dalga $t = 0$ 'da maksimum olacak şekilde zaman başlangıcı seçtim.) Tüm bu kuvvetler Newton hareket yasasında kullanılırsa

$$F_{top} = m \frac{d^2y}{dt^2} = F_{bağ} + F_s + F_{dış} \quad (8.175)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + m\gamma \frac{dy}{dt} + m\omega_0^2 y = qE_0 \cos \omega t$$

Bu modelde elektronun, ω frekanslı harmonik bir dış kuvvetin etkisiyle sönümlü harmonik salınıcı gibi hareket yaptığı görülmektedir.

(8.175) denklemini şöyle bir kompleks denklemin reel kısmı olarak görebilsek, çözüm daha kolay olur:

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + \gamma \frac{d\tilde{y}}{dt} + \omega_0^2 \tilde{y} = \frac{qE_0}{m} e^{-i\omega t} \quad (8.176)$$

Kararlı durumda bu sistem dış kuvvetin frekansı ile salınım yapar:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{-i\omega t} \quad (8.177)$$

Bu çözüm yerine koyulursa

$$\tilde{y}_0 = \frac{(q/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} E_0 \quad (8.178)$$

olur. O halde, bu elektronun hareketinden kaynaklanan dipol momenti şu ifadenin reel kısmı olur:

$$\tilde{p}(t) = q\tilde{y}(t) = \frac{(q^2/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t} \quad (8.179)$$

Paydada bulunan sanal terim, p dipol momentinin elektrik alanla aynı fazda olmayacağını gösterir. Aralarındaki faz farkı $\arctan[\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)]$ olup, $\omega \ll \omega_0$ için çok küçük olur ve $\omega \gg \omega_0$ için π değerine yaklaşır.

Bir moleküldeki farklı elektronların doğal frekansları ve sürtünme kuvvetleri farklı olabilir. Bunu hesaba katmak üzere her molekülde, f_j sayıdaki elektronun frekanslarının ω_j ve sürtünme sabitlerinin γ_j olduğunu varsayalım. Birim hacimdeki molekül sayısı N ise, ortamdaki \tilde{P} polarizasyon vektörü, şu ifadenin reel kısmı olur:

$$\tilde{P} = \frac{Nq^2}{m} \left(\sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2) - i\gamma_j\omega} \right) \tilde{E} \quad (8.180)$$

Bir ortamın elektrik duymunluğu $\tilde{P} = \epsilon_0 \chi_e \tilde{E}$ ile tanımlanmıştır. Yukardaki ifade, kompleks \tilde{E} alanıyla orantılı olan kompleks bir \tilde{P} polarizasyonu gibi görülebilir. Buna göre, kompleks bir duymunluğu şöyle tanımlayabiliriz:

$$\tilde{P} = \epsilon_0 \chi_e \tilde{E} \quad (8.181)$$

Böylece, daha önceki formalizmi kompleks alanlar için genişletebilir ve sonunda reel kısmını alırız. Özel olarak $\tilde{D} = \epsilon \tilde{E}$ ifadesiyle kompleks bir geçirgenlik $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ şeklinde tanımlanır:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left[1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2) - i\gamma_j\omega} \right] \quad (8.182)$$

olur. Bu ifadenin sanal kısmı genelde küçük olur; ancak ω frekansı ω_j 'lerden birine yakın olduğunda bir rol oynar.

Dispersif ortamda belirli frekansta bir dalga denklemini

$$\nabla^2 \tilde{E} = \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} \quad (8.183)$$

olur; burada artık ϵ sabiti ω 'nın kompleks bir fonksiyonudur. Yine, düzlem dalga çözümü

$$\tilde{E}(x, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\kappa x - \omega t)} \quad (8.184)$$

şeklinde denkleme konulursa,

$$\kappa = \sqrt{\epsilon \mu_0} \omega \quad (8.185)$$

artık kompleks bir sabit olur. Bunun reel ve sanal kısımları ayrı yazılırsa

$$\kappa = \kappa_+ + i\kappa_- \quad (8.186)$$

olur. Buna göre, düzlem dalga

$$\tilde{E}(x, t) = \tilde{E}_0 e^{-\kappa_- x} e^{i(\kappa_+ x - \omega t)} \quad (8.187)$$

olur. Burada κ_- sönümü belirleyen katsayı olmaktadır. Dalga şiddeti E^2 ile orantılı olduğundan, α soğurma katsayı şöyle tanımlanır:

$$\alpha = 2\kappa_- \quad (8.188)$$

Öte yandan, dalga hızı ω/κ_+ ve dolayısıyla kırılma indisi

$$n = \frac{c}{\omega \kappa_+} \quad (8.189)$$

olur. Burada, Kısım 8.3.1'deki notasyonu kullandım, ama buradaki κ_+ , κ_- dalga sayılarının iletkenlikle bir ilgisi yoktur, sadece sönümlü harmonik hareketin parametrelerine bağlıdır.

(8.182) denkleminin ikinci terimi gazlarda çok küçük olur. Buna göre karekökü yaklaşık $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ alırsak, (8.185) denklemini

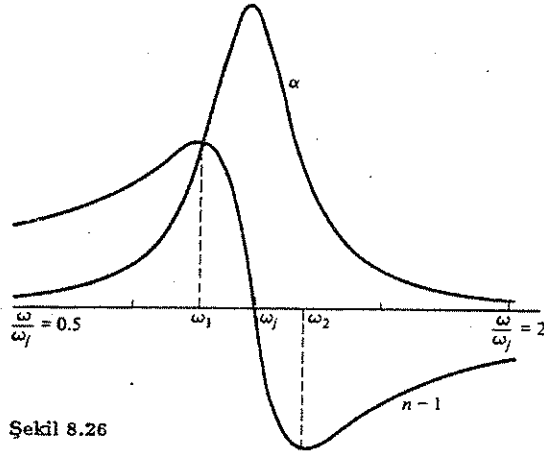
$$\kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2) - i\gamma_j\omega} \right] \quad (8.190)$$

olur. Buradan kırılma indisi ve soğurma katsayısı bulunur:

$$n = \frac{c}{\omega} \kappa_+ \approx 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2} \quad (8.191)$$

$$\alpha = 2\kappa_- \approx \frac{Nq^2\omega^2}{m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j\gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2} \quad (8.192)$$

Şek. 8.26'da kırılma indisi ve soğurma katsayısı, ω_j rezonanslarından biri yakınında gösterilmiştir. Bölgenin büyük kısmında kırılma indisi frekansla birlikte artar; bu optikten beklediğimiz bir sonuçtur (Şek. 8.23). Fakat, rezonansa yaklaştığında kırılma indisi birden azalır. Bu, beklenmedik bir davranış olduğundan **anormal dispersiyon** denir. Anormal dispersiyon (şekilde $\omega_1 < \omega < \omega_2$) bölgesinde, soğurmanın da maksimum olduğuna dikkat edelim. Bu bölgede dielektrik madde saydamlığını kaybeder; çünkü elektronlar sevdiği frekansta titreşip rezonansa geçtiklerinden, enerjisi soğrulan dalga büyük miktarda sönüme uğrar.



Şekil 8.26

Şek. 8.26'da rezonansın üst tarafında n kırılma indisinin 1'den küçük oluşu, dalga (faz) hızının c 'den büyük olması anlamına gelir. Daha önce değindiğim gibi, bunun fiziksel bir önemi yoktur, çünkü enerji faz hızıyla taşınmaz (bkz. Problem 8.27). Öte yandan, toplamdaki diğer terimlerin katkıları grafikte gösterilmemiştir; bunlar da arka planda sabit bir katkı oluşturup her yerde $n > 1$ olmasını bazan sağlayabilirler.

Rezonanslardan uzak kalmaya dikkat edilirse, sönüm terimi çok küçük olur ve kırılma indisi sadeleşir:

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)} \quad (8.193)$$

8.4. DISPERSİYON

Maddelerin çoğunda ω_j doğal frekansları spektrumun her bölgesine rastgele dağılmış olurlar. Saydam maddelerde en yakın rezonanslar morötesi bölgede yer alır. Buna göre, $\omega < \omega_j$ olur ve yaklaşık olarak

$$\frac{1}{(\omega_j^2 - \omega^2)} = \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)^{-1} \approx \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)$$

olur. Böylece kırılma indisi ifadesi

$$n = 1 + \left(\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \right) + \omega^2 \left(\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4} \right) \quad (8.194)$$

veya, boşlukta dalga boyu ($\lambda = 2\pi c/\omega$) cinsinden

$$n = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right) \quad (8.195)$$

olur; bu **Cauchy denklemini** olarak bilinir. A sabitine **kırınım katsayısı** ve B sabitine **dispersiyon katsayısı** denir. Cauchy denklemini optik frekanslarda gazların büyük bir bölümü için geçerli olur.

Bu model, dielektriklerde dispersiyon olayına sadece bir giriş sayılabilir. Fakat, yine de kırılma indisinin frekansa bağımlı olduğunu doğru olarak verebilmektedir. Şimdi, benzer bir yaklaşımı iletkenler için deneyeceğim.

Problem 8.25 Örnek 4.1'deki ilkel modelin doğal frekansı ne olur? (Sayısal yanıt bulun—atom yarıçapını 0.5 Å aldığımızda, doğal frekans elektromagnetik spektrumun neresinde yer alır?) Kırınım ve dispersiyon katsayılarını bulun ve standart koşullarda hidrojen için $A = 1.36 \times 10^{-4}$ ve $B = 7.7 \times 10^{-15} \text{ m}^2$ katsayılarıyla karşılaştırın.

Problem 8.26 ω_0 frekanslı tek bir rezonans için anormal dispersiyon bölgesinin genişliğini bulun. $\gamma \ll \omega_0$ olduğunu varsayın. Kırılma indisinin maksimum değerinin, soğurma katsayısının yarı maksimum olduğu yerlerde oluştuğunu gösterin.

Problem 8.27 Sürtünmenin yok sayılabileceği ($\gamma_j = 0$) durumunda, (8.187) ve (8.190) denklemlerindeki dalgaların grup hızını ($v_g = d\omega/d\kappa_+$) bulun. $v > c$ olsa dahi, $v_g < c$ olduğunu gösterin.

8.4.3 İletken ve Plazmalarda Serbest Elektronlar

İletkenlerde elektronlar hiçbir atom veya moleküle bağlı değildirler. Bu durumda, yukarıdaki yaklaşımda bağ kuvvetini sıfır alıp aynı yönetimi uygulayabiliriz. Ancak bu kez, çok sayıda çarpışmalardan kaynaklanan sürtünme kuvveti çok daha büyük olur. (8.176) hareket denklemini şimdi şöyle yazılabilir:

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + \gamma \frac{d\tilde{y}}{dt} = \frac{qE_0}{m} e^{-i\omega t} \quad (8.196)$$

Yine, kararlı çözüm

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{-i\omega t} \quad (8.197)$$

alırsa,

$$\tilde{y}_0 = -\frac{(q/m)}{\omega^2 + i\gamma\omega} E_0 \quad (8.198)$$

bulunur. Bu kez, elektronların polarizasyonu ile değil, akımla ilgileniyoruz. Birim hacimde N molekül ve her molekülde f sayıda serbest elektron varsa, dy/dt hızıyla hareket eden elektronların oluşturdukları akım

$$J = (Nfq) \frac{dy}{dt} \quad (8.199)$$

olur. Bunu kompleks bir akımın reel kısmı olarak yazmak istersek

$$\tilde{J} = \left(\frac{Nfq^2/m}{\gamma - i\omega} \right) \tilde{E} \quad (8.200)$$

Paydadaki sanal terim akımın E alanıyla aynı fazda olmadığını gösterir. Bu, Ohm yasasına tam uygun değildir. Fakat, kompleks bir σ iletkenlik katsayısı tanımlarsak

$$\tilde{J} = \sigma \tilde{E} \quad (8.201)$$

olur. Bu modelde

$$\sigma = \frac{(Nfq^2/m)}{\gamma - i\omega} \quad (8.202)$$

bulunur. Alçak frekanslarda sanal kısım çok küçüktür ve σ frekanstan bağımsız olur. Fakat, yeterince yüksek frekanslarda J ile E arasındaki faz farkı gözardı edilemez.

Örnek 8.8: Tipik bir metalde σ katsayısının sanal kısmının önemli olmaya başladığı frekansı bulun.

Çözüm: Tablo 7.1'e göre, örneğin bakırın, sıfır frekansta iletkenliği $6 \times 10^7 / \Omega \cdot m$ dir. Yoğunluğu $9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ olan bakırın her atomunda bir serbest elektron olduğunu varsayalım. Buna göre

$$N = \frac{\text{atom sayısı}}{\text{hacim}} = \frac{\text{kütle/hacim} \cdot \text{atom sayısı}}{\text{kütle/mol} \cdot \text{mol}} = \frac{\text{yoğunluk}}{\text{atom kütlesi}} \quad (\text{Avogadro sayısı})$$

$$= \left(\frac{9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{60 \times 10^{-3} \text{ kg}} \right) (6 \times 10^{23}) = 9 \times 10^{28} / m^3$$

bulunur. Buradan sanal terim hesaplanır:

$$\gamma = \frac{Nfq^2}{\sigma m} = \frac{(9 \times 10^{28} m^{-3})(1.6 \times 10^{-19} C)^2}{(6 \times 10^7 / \Omega \cdot m)(9 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 4 \times 10^{13} / s$$

Buna göre, sanal terim kılınç bölgesinden itibaren önem kazanmaktadır. Bu frekansın çok üstünde J ile E arasındaki faz farkı 90° olup, iletkenlik frekansla ters orantılı olarak azalır. (Bu nedenledir ki Örnek 8.5 ve 8.7'de doğru akım iletkenliği kullanmak yanlış sonuç veriyordu.)

İletkenlik katsayısının kompleks olması, elektromagnetik dalganın iletken içindeki davranışını özellikle yüksek frekanslarda etkiler. Bunu incelemek için kompleks dalga sayısı

$$\kappa^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i \sigma \mu \omega \quad (8.203)$$

ifadesinde kompleks σ katsayısı kullanılarak hesaplar sürdürülür. Pratikte çok önemi olan özel bir ortam plazma (iyonlaşmış gaz) halidir. Burada σ sanal olur:

$$\sigma = i \left(\frac{Nfq^2}{m\omega} \right) \quad (8.204)$$

Ayrıca, plazma içinde $\mu \approx \mu_0$ ve $\epsilon \approx \epsilon_0$ olduğundan (8.203) denklemi

$$\kappa^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2) \quad (8.205)$$

olur. Burada ω_p plazma frekansı denilen karakteristik bir frekanstır:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nfq^2}{m\omega}} \quad (8.206)$$

ω_p 'den daha büyük frekanslarda dalga sayısı reel olup, elektromagnetik dalga plazma ortamında sönüme uğramadan ilerler. Dalga hızı

$$v = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2}} \quad (8.207)$$

olup $v > c$ çıkar. Plazmanın kırılma indisi ise şöyle olur:

$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2} \quad (8.208)$$

Frekans ω_p den daha küçük ise, κ dalga sayısı sanal olur, dalga plazma ortamında sönümlü olur:

$$\tilde{E}(x, t) = \tilde{E}_0(x, t) e^{-(\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}/c)x} e^{-i\omega t} \quad (8.209)$$

Çok düşük frekanslarda deri kalınlığı c/ω_p olur; o halde, plazma ortamı ω_p den büyük frekanslı dalgalar için saydam, daha düşük frekansta ise karanlık olur.

Örnek 8.9: İyonosfer. Yeryüzünden 50-1000 km arası yükseklikteki bölgede atmosfer, güneşten gelen morötesi iyonlar tarafından iyonlaştırılmış moleküller içerir. İyonosfer denilen bu bölgede elektron yoğunluğu yaklaşık $10^{11} / m^3$ kadardır. (Aslında molekül yoğunluğu çok daha fazladır, ama bunların çok az bir kısmı iyonize olmuştur.) İyonosferin plazma frekansını bulun.

Çözüm: Verilen elektron yoğunluğu ve diğer sabitler (8.206) denkleminde yerine koyulursa $\omega_p \approx 3 \text{ MHz}$ bulunur. Bu, orta dalga radyo frekansının hemen üstündedir. Daha düşük frekanslı radyo dalgaları iyonosfere giremez ve tekrar yeryüzüne yansır. Bu nedenle geceleri (Güneş'ten gelen iyonlaştırıcı radyasyon yokluğunda) iyonosfer daha yüksek bölgeye çekilir ve kısa dalga radyo yayınları çok daha uzaklardan dinlenebilir.

Problem 8.28 Plazma ortamında $\omega > \omega_p$ frekanslı bir dalganın grup hızını hesaplayın ve ışık hızından daha küçük olduğunu gösterin.

Problem 8.29 Düşük frekanslarda iletkenlik için (7.5) formülü ile, (8.202) denklemini kullanarak, γ sürtünme sabitinin elektronların ortalama serbest yoluyla (yani, iki çarpışma arasında gittikleri ortalama yol ile) ilişkisini bulun. Örnek 8.8'deki verilerle bakırda ortalama serbest yolu hesaplayın. Elektronun ortalama kinetik enerjisini $\frac{1}{2} m v^2 \approx \frac{3}{2} k T$ olarak, oda sıcaklığındaki bakırda ortalama serbest yolu hesaplayın.

Problem 8.30 Bir iletken $\omega \gg \gamma$ olan frekanslarda deri kalınlığı ve kırılma indisinin yaklaşık ifadelerini bulun.

BÖLÜM 8 ÜZERİNE EK PROBLEMLER

! Problem 8.31 Fourier dönüşümü teoremine göre

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa \iff F(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\kappa x} dx$$

bağıntıları vardır. Bu sonucu kullanarak, (8.34) formülündeki $A(\kappa)$ katsayısını, $f(x, 0)$ ve $f(x, 0)$ cinsinden bulun.

$$(\text{Yanıt: } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x, 0) + \frac{if(x, 0)}{\omega}] e^{-i\kappa x} dx)$$

! Problem 8.32 En basit bir küresel dalga şöyle tanımlanır:

$$\vec{E} = E_0 \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \left[\cos(\kappa r - \omega t) - \frac{\sin(\kappa r - \omega t)}{\kappa r} \right] \hat{\phi}, \quad \left(\frac{\omega}{\kappa} = c \right)$$

(Hesaplar sırasında $(\kappa r - \omega t) = u$ alıp kısaltabilirsiniz.)

(a) Bu dalganın boşlukta tüm Maxwell denklemlerini sağladığını gösterin ve buna eşlik eden magnetik alan ifadesini bulun.

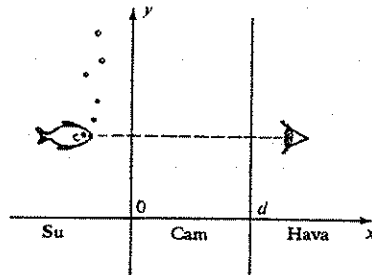
(b) Poynting vektörünü hesaplayın; \vec{S} 'nin bir periyot üzerinden ortalamasını alıp \vec{I} şiddet vektörünü bulun. Bu vektör beklenen yönde midir? r ile beklenen şekilde azalıyor mu?

(c) \vec{I} 'nin R yarıçaplı bir küre yüzeyinde integralini ($\int \vec{I} \cdot d\vec{a}$) hesaplayarak, ortalama radyasyon gücünü bulun. [Yanıt: $(4\pi/3)(E_0^2/\mu_0 c)$]

! Problem 8.33 Kalınlığı d olan bir pencere camı üzerine normal doğrultuda gelen bir dalganın geçme katsayısını hesaplayın. (Not: Camın sol tarafında gelen ve yansıyan birer dalga, sağ tarafında geçen bir dalga, cam içinde ise, sağa ve sola ilerleyen iki dalga vardır. Tüm bu dalgaları kompleks genlikler cinsinden yazın; her iki yüzeydeki sınır koşullarıyla genlikler arasındaki ilişkileri yazın. Dispersiyonu yok sayın ve $\mu = \mu_0$ alın.)

(Yanıt: $T^{-1} = 1 + \left[\frac{(n^2 - 1)}{2n} \sin \kappa d \right]^2$, burada κ cam içindeki dalga sayısıdır.)

Problem 8.34 Bir akvaryumdan çıkan ışık (Şek. 8.27) önce su ($n = \frac{4}{3}$), sonra cam ($n = \frac{3}{2}$) ve sonra hava ($n = 1$) ortamına geçiyor. Dalganın tekrenkli olduğu ve cama dik doğrultuda geldiği durumda geçme katsayısını, yani gözümüze ulaşan ışık şiddetinin balıktan çıkan ışık şiddetine oranını bulun. Her üç ortamda $\mu = \mu_0$ alın. Biz balığı görebiliyoruz; peki, balık bizi görebiliyor mu?



Şekil 8.27

9

ELEKTROMAGNETİK RADYASYON

9.1 DİPOL RADYASYONU

9.1.1 Gecikmeli Potansiyeller

Bölüm 8'de düzlem elektromagnetik dalgaların değişik ortamlarda—boşluk, lineer dielektrik, iletken ve plazma—ilerlemesini inceledik. Bunu yaparken, bu dalgaların nasıl üretildiğiyle ilgilenmedik. Diğer tüm elektromagnetik alanlar gibi, bu dalgaların da kaynağı yük dağılımlarıdır. Durgun, veya düzgün, doğrusal hareket yapan bir yük elektromagnetik dalga yayınlamaz. Birazdan göreceğimiz gibi, yükün ivmelenmesi gerekir. Bu bölümde ivmelenen yüklerin nasıl elektromagnetik dalga oluşturduğunu, yani radyasyonu inceleyeceğiz.

Bunun için, hareketli yüklerin elektrik ve magnetik alanlarının bilinmesi gerekir. Yine, her zaman olduğu gibi, potansiyellerden yola çıkalım; sonra (7.63) ve (7.64) formülleriyle elektrik ve magnetik alanları buluruz:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (9.1)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (9.2)$$

Burada çalışacağımız Lorentz ayarında (7.72) koşulu vardır:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (9.3)$$

Buna göre, potansiyellerin sağladığı (7.73) ve (7.74) denklemleri şöyledir:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.4)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad (9.5)$$

Sağ taraftaki "kaynak" terimleri hariç, bu denklemler (8.3) dalga denklemleri yapısındadırlar. Bu terimden dolayı, yukardaki denklemlere homojen olmayan dalga denklemleri denir.

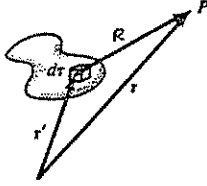
Statik durumda (9.4) ve (9.5) denklemleri Poisson denklemlerine dönüşür:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{ve} \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Bunların çözümlerini biliyoruz:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d\tau, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} d\tau \quad (9.6)$$

Burada $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, kaynak noktasının potansiyelin hesaplandığı P noktasına olan uzaklıktır (Şek. 9.1). Elektromagnetik sinyallerin ışık hızıyla yayıldığını biliyoruz. O halde,



Şekil 9.1

statik olmayan durumda, kaynağın bu andaki durumu değil, sinyalin yola çıktığı daha önceki bir t_r anındaki (buna, gecikmeli zaman denir) durumu önemlidir. Sinyal P noktasına erişmek için R yolu aldığına göre, gecikme süresi R/c olur. Buna göre, gecikmeli zaman

$$t_r = t - \frac{R}{c} \quad (9.7)$$

olur. O halde, (9.6) formüllerinin statik olmayan duruma genellemesi şöyle olmalıdır:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{R} d\tau, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{R} d\tau \quad (9.8)$$

Burada $\rho(\vec{r}', t_r)$ yoğunluğu, \vec{r}' noktasında t_r gecikmeli zamanındaki yük yoğunluğudur. Bu integraller gecikmeli zamanda hesaplandığından, bu potansiyellere **gecikmeli potansiyeller** denir. (Burada bir tane gecikmeli zaman varmış gibi konuşuyorum; oysa uzayın her noktasının gecikmeli zamanı farklı olacaktır.)

Burada kadar herşey mantıklı ve kolay görünüyor. Peki bu *doğru* mu? V ve \vec{A} için bu ifadeleri ispat etmeden, elektromagnetik sinyalin ışık hızıyla gitmesi gerektiğini ileri sürerek yazdım. Bunları ispat etmek için (9.4) ve (9.5) denklemlerini sağladıklarını ve (9.6) Lorentz ayarına uyduklarını göstermem gerekir.

Burada skaler potansiyel ifadesinin (9.4) denklemini sağladığını göstereceğim; aynı düşünce vektör potansiyel için de geçerlidir. Gecikmeli potansiyellerin Lorentz koşuluna uyduğunu göstermeyi de size bırakıyorum (Problem 9.1).

$V(\vec{r}, t)$ 'nin Laplasyenini hesaplarken, integrandın iki yerde \vec{r} ye bağlı olduğuna dikkat edelim: Paydadaki $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ teriminde ve paydaki $t_r = t - R/c$ içinde. Buna göre,

$$\vec{\nabla} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[(\vec{\nabla} \rho) \frac{1}{R} + \rho \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\tau \quad (9.9)$$

olur. Birinci integrant içindeki gradyanın x -bileşenine bakalım:

$$[\vec{\nabla} \rho]_x = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dt_r} \frac{dt_r}{dx} = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(t - \frac{R}{c} \right) = -\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\partial R}{\partial x}$$

Buna göre,

$$\vec{\nabla} \rho = \dot{\rho} (\vec{\nabla} t_r) = -\frac{\dot{\rho}}{c} (\vec{\nabla} R) \quad (9.10)$$

olur. Problem 1.13'te hesaplandığı üzere, $\vec{\nabla} R = \hat{R}$ ve $\vec{\nabla} (1/R) = -\hat{R}/R^2$ olur. Buna göre

$$\vec{\nabla} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{R}}{R} - \rho \frac{\hat{R}}{R^2} \right] d\tau \quad (9.11)$$

9.1. DİPOL RADYASYONU

Bu ifadenin diverjansı Laplasyen olur:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ -\frac{1}{c} \left[\dot{\rho} (\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{R}}{R}) + \frac{\hat{R}}{R} \cdot (\vec{\nabla} \dot{\rho}) \right] - \left[\rho (\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{R}}{R^2}) + \frac{\hat{R}}{R^2} \cdot (\vec{\nabla} \rho) \right] \right\} d\tau$$

Yine (9.10) ifadesi uygulanırsa

$$\vec{\nabla} \dot{\rho} = -\frac{\ddot{\rho}}{c} (\vec{\nabla} R)$$

ve Problem 1.57'ye göre

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{R}}{R} \right) = \frac{1}{R^2}$$

ve (1.79) denklemine göre

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) = 4\pi\delta^3(\vec{R})$$

olur. Bu ifadeler Laplasyende kullanılırsa

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}}{R} - 4\pi\delta^3(\vec{R}) \right] d\tau = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

yani, gecikmeli potansiyel homojen olmayan (9.8) dalga denklemini sağlar.

Burada teorik bir noktaya dikkati çekelim: Gecikmeli zaman gibi, *ilerlemiş* bir zaman

$$t_a = t + \frac{R}{c} \quad (9.12)$$

olarak alınırsa,

$$V_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_a)}{R} d\tau, \quad \vec{A}_a(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_a)}{R} d\tau \quad (9.13)$$

bağıntılarıyla tanımlanan **ilerlemiş potansiyeller** de (9.8) denklemlerini sağlarlar. Bu potansiyeller Maxwell denklemlerini sağladıkları halde, fiziğin temel bir ilkesine aykırıdır: **nedensellik ilkesi**. Bu potansiyel ifadeleri, *gelecekteki* bir yük dağılımının P noktasında *şimdiki* potansiyeli belirleyeceğini söylemektedir—yani bir olayın sonucu nedeninden önce gelmektedir. İlerlemiş potansiyel kavramı teorik bir ilgi odağı olmakla beraber, doğrudan fiziksel bir önemi yoktur.

Örnek 9.1: Sonsuz doğrusal bir telden geçen akım

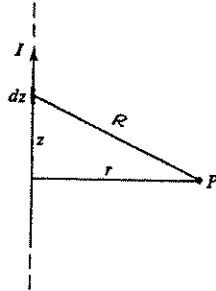
$$I(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ I_0 & (t \geq 0) \end{cases}$$

olarak, $t = 0$ anında birden I_0 değerine getiriliyor.¹ Oluşan elektrik ve magnetik alanları bulun.

Çözüm: Telin nötr olduğunu kabul edersek, $\rho = 0$ ve dolayısıyla skaler potansiyel sıfırdır. Teli z-ekseni doğrultusunda seçelim (Şek. 9.2); buna göre, bir P noktasındaki vektör potansiyel şöyle olur:

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r) dz}{R}$$

¹Bir telin her noktasında akımı aynı anda aynı değere getirmek, görellilik teorisine göre gerçekçi değildir. Bunu yapay bir örnek olarak kabul edin.



Şekil 9.2

Eğer $t < r/c$ ise, akımın başladığı "haberi" henüz P noktasına erişmediğinden, vektör potansiyel sıfır olur. $t > r/c$ olduğunda ise, sadece sonlu bir z uzaklığına kadar olan noktalardan "haber" gelmiştir. Bu z uzaklığı

$$z = \pm \sqrt{(ct)^2 - r^2} \quad (9.14)$$

olur. (Yani, bu noktadan daha uzakta t_r negatif ve $I(t_r) = 0$ olur.) Buna göre,

$$\begin{aligned} \vec{A}(r, t) &= \left(\frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{k} \right) 2 \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{k} \ln(\sqrt{r^2 + z^2} + z) \Big|_0^{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - r^2}}{r} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Buna göre, elektrik alan

$$\vec{E}(r, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi \sqrt{(ct)^2 - r^2}} \hat{k}$$

ve magnetik alan (rotasyonel silindirik koordinatlarda hesaplanır):

$$\vec{B}(r, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \hat{\phi}$$

Dikkat edilirse, $t \rightarrow \infty$ limitinde statik çözümleri buluruz: $\vec{E} = 0$ ve $\vec{B} = (\mu_0 I_0 / 2\pi r) \hat{\phi}$.

Problem 9.1 Gecikmeli potansiyellerin Lorentz ayar koşulunu sağladığını gösterin. [Yol gösterme: Önce şu eşitliği gösterin:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) + \frac{1}{R} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}) - \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right)$$

(Burada \vec{r} ye göre türev $\vec{\nabla}$ ile, \vec{r}' ye göre türev ise $\vec{\nabla}'$ ile gösterilmiştir.) Sonra \vec{r}' ye bağımlı $\vec{J}(\vec{r}', t - R/c)$ içinde iki yerde, \vec{r} ye bağımlı ise sadece R içinde olduğuna dikkat ederek, şu iki ifadeyi çıkarın:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot (\vec{\nabla} R), \quad \text{ve} \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot (\vec{\nabla}' R)$$

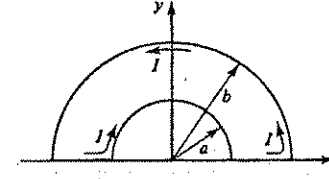
Bu iki bağıntıyı, (9.8) formülündeki \vec{A} 'nın diverjansını hesaplarken kullanın, ...

Problem 9.2 (a) Örnek 9.1'deki sonsuz teldeki akımın, $t > 0$ için düzgün olarak arttığını varsayalım:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \alpha t & (t \geq 0) \end{cases}$$

Oluşan elektrik ve magnetik alanları bulun.

(b) Aynı hesabı aniden çıkıp sönen bir akım, yani $I(t) = q_0 \delta(t)$ için tekrarlayın:

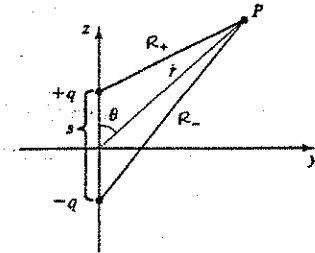


Şekil 9.3

Problem 9.3 Şek. 9.3'deki gibi kıvrılmış nötr bir telden geçen akım zamanla doğru orantılı olarak artıyor: $I(t) = \alpha t$. Merkezdeki \vec{A} vektör potansiyelini, daha sonra elektrik alanı hesaplayın. Bu nötr telde niçin elektrik alan oluşabiliyor? \vec{A} 'yı bildiğimiz halde, niçin magnetik alanı hesaplayamıyoruz?

Bu bölümün kalan kısımlarında (9.8) gecikmeli potansiyellerinin değişik uygulamalarını ele alacağız. Sırasıyla, titreşen bir elektrik dipol, magnetik dipol ve ivmelenen noktasal yükün elektrik ve magnetik alanlarını hesaplayacağız. Bu örnekler elektromagnetik radyasyon teorisinin temellerini oluştururlar.

9.1.2 Elektrik Dipol Radyasyonu



Şekil 9.4

Aralarında s uzaklığı bulunan iki küçük metal kürenin ince bir telle birbirine bağlanmış olduğunu düşünelim (Şek. 9.4). Sistemin tümünü nötr varsayarsak, herhangi bir t anında üstteki kürenin yükü $q(t)$ ise, alttaki kürenin yükü $-q(t)$ olacaktır. Şimdi bu küreler üzerindeki yükleri, ince telle birinden diğerine aktararak, azaltıp çoğalttığımızı düşünelim. Bu yük salınımının frekansı ω ise,

$$q(t) = q_0 \cos \omega t \quad (9.15)$$

olur. Böylece, salınımlı bir elektrik dipol modeli² oluşturmuş oluruz:

$$\vec{p}(t) = q(t) \vec{s} = p_0 \cos \omega t \hat{k} \quad (9.16)$$

²Bu modelin yerine, elastik bir yayla bağli eşit ve zıt iki yükün titreşim hareketi alınabilir. Bu durumda, q sabit kalır, s uzaklığı sinüsel değişir. Fakat, hareketli noktasal yükün gecikmeli potansiyel hesabında ince bir nokta vardır; bunu Kısım 9.2'de ele alacağız.

Burada $p_0 = q_0 s$ maksimum dipol momentidir.

Şekildeki P noktasındaki gecikmeli potansiyel ifadesi şöyle olur:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_0 \cos \omega(t - R_+/c)}{R_+} - \frac{q_0 \cos \omega(t - R_-/c)}{R_-} \right] \quad (9.17)$$

Buradaki R_{\pm} uzaklıkları kosinüs teoremiyle hesaplanır:

$$R_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp rs \cos \theta + (s/2)^2} \quad (9.18)$$

Şimdi, üç aşamalı yaklaşık hesap yapacağız. İlk olarak, noktasal dipol limitine gidelim:

$$s \ll r \quad (1: \text{noktasal dipol yaklaşıklığı}) \quad (9.19)$$

Bu yaklaşıklıkta, s 'ye göre kuvvet serisi açılımı yapılır ve sadece lineer terimler alınır:

$$R_{\pm} \approx r \left(1 \mp \frac{s \cos \theta}{2r} \right) \quad (9.20)$$

$$\frac{1}{R_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{s \cos \theta}{2r} \right) \quad (9.21)$$

olur. Sonra, kosinüslü terimlerin içleri düzenlenir:

$$\begin{aligned} \cos \omega(t - R_{\pm}/c) &= \cos \left[\omega(t - r/c) \pm \frac{\omega s}{2c} \cos \theta \right] \\ &= \cos \omega(t - r/c) \cos \left(\frac{\omega s}{2c} \cos \theta \right) \mp \sin \omega(t - r/c) \sin \left(\frac{\omega s}{2c} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Daha sonra, λ dalgaboyunun s uzaklığından çok büyük olduğu limite geçilir. $\lambda = 2\pi c/\omega$ olduğundan

$$s \ll \frac{c}{\omega} \quad (2: \text{uzun dalgaboyu yaklaşıklığı}) \quad (9.22)$$

Buna göre,

$$\cos \omega(t - R_{\pm}/c) = \cos \omega(t - r/c) \mp \frac{\omega s}{2c} \cos \theta \sin \omega(t - r/c) \quad (9.23)$$

(9.21) ve (9.23) ifadeleri (9.17) denkleminde kullanılırsa

$$V(r, \theta, t) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{\omega}{c} \sin \omega(t - r/c) + \frac{1}{r} \cos \omega(t - r/c) \right] \quad (9.24)$$

Hemen bir sağlama yapalım: Statik limitte ($\omega \rightarrow 0$) ikinci terim statik dipolün potansiyeli için daha önce bulduğumuz (3.94) formülünü verir:

$$V = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Fakat, burada bizim ilgilendiğimiz birinci terimdir. Dipolden çok uzaklarda, yani radyasyon bölgesi denilen yerde

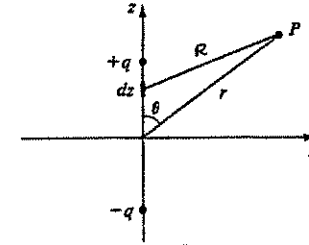
$$r \gg \frac{c}{\omega} \quad (3: \text{radyasyon bölgesi yaklaşıklığı}) \quad (9.25)$$

(veya, $r \gg \lambda$) limitinde, potansiyel ifadesi şöyle bulunur:

$$V(r, \theta, t) = -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \sin \omega(t - r/c) \quad (9.26)$$

Öte yandan vektör potansiyel yükleri birleştiren teldeki akımdan bulunur:

$$\vec{I}(t) = \frac{dq}{dt} \hat{k} = -q_0 \omega \sin \omega t \hat{k} \quad (9.27)$$



Şekil 9.5

Şek. 9.5'e göre vektör potansiyel ifadesi

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-s/2}^{s/2} \frac{-q_0 \omega \sin \omega(t - R/c) \hat{k}}{R} dz \quad (9.28)$$

olur. İntegral sonucunda bir s çarpanı daha gelecektir. s 'ye göre birinci derece terimleri tuttuğumuz için, integrandın $s = 0$ da, yani merkezdeki değerini alabiliriz:

$$\vec{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin \omega(t - r/c) \hat{k} \quad (9.29)$$

Tümüyle küresel koordinatlarda yazılmak istenirse

$$\hat{k} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \quad (9.30)$$

alınır. Buradaki üç yaklaşıklığın birbirleriyle çelişmediğine dikkat edin.

Potansiyeller bilindikten sonra, alanlar doğrudan hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} V &= \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} \\ &= -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \cos \theta \left[-\frac{\sin \omega(t - r/c)}{r^2} - \frac{\omega \cos \omega(t - r/c)}{rc} \right] \hat{r} - \frac{\sin \theta}{r^2} \sin \omega(t - r/c) \hat{\theta} \right\} \\ &= \frac{p_0 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \hat{r} \end{aligned}$$

(Birinci ve üçüncü terimi 3.yaklaşıklıkla göre yok saydım.) Benzer şekilde

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos \omega(t - r/c) (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

Bu iki ifadeden elektrik alan bulunur:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \hat{\theta} \quad (9.31)$$

Öte yandan,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta}) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left[\frac{\omega \sin \theta \cos \omega(t - r/c)}{c} + \frac{\sin \theta \sin \omega(t - r/c)}{r} \right] \hat{\phi}$$

İkinci terim yine 3. yaklaşığa göre atılırsa, magnetik alan bulunur:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \hat{\phi} \quad (9.32)$$

(9.31) ve (9.32) denklemleri radyal doğrultuda c ışık hızıyla ilerleyen ω frekanslı birer enine dalgadır. \vec{E} ve \vec{B} birbirine dik ve aynı fazda olup, genlikleri oranı $E_0/B_0 = c$ dir. Tüm bu özellikler Bölüm 8'de boşlukta elektromagnetik dalgalar için bulunan özellikleri sağlar. (Burada düzlem dalga değil, genliği $1/r$ olarak azalan küresel dalgalar bulduk. Fakat, kaynaktan çok uzakta bunları düzlem dalga olarak alabiliriz.)

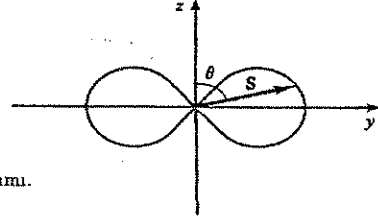
Titreşen elektrik dipolün yaydığı enerji Poynting vektörüyle bulunur:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \right]^2 \hat{r} \quad (9.33)$$

Dalga şiddeti bir periyot üzerinden ortalama alınarak bulunur:

$$\langle \vec{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r} \quad (9.34)$$

Yayılan enerjinin açılal dağılımı Şek. 9.6'da gösterilmiştir. Dipol eksen (burada z -ekseni, yani $\sin \theta = 0$) doğrultusunda enerji radyasyonu olmadığına dikkat edelim. Maksimum radyasyon ekvator düzleminde olur.



Şekil 9.6 Dipol radyasyonunun şiddet dağılımı.

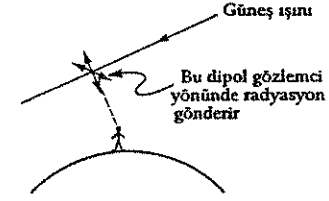
Bu dağılımın r yarıçaplı bir küre yüzeyindeki integrali alınırsa toplam radyasyon gücü bulunur:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \int \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{a} = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ \langle P \rangle &= \left(\frac{\mu_0 p_0^2}{12\pi c} \right) \omega^4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3} \end{aligned} \quad (9.35)$$

Toplam güç, enerji korunumundan beklendiği üzere, küre yarıçapından bağımsız olur.

Örnek 9.2: Gökyüzü neden mavidir? Günbatımında neden kırmızı olur?

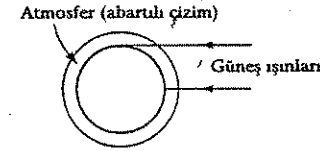
Çözüm: Güç formülünün frekansa hızlı bağımlı oluşu gökyüzünün mavi görünmesine yol açar. Atmosfere giren güneş ışığı nedeniyle atomlar küçük birer dipol gibi titreşmeye başlarlar. Gelen güneş ışığı geniş bir frekans aralığındadır (beyaz ışık), fakat dipollerin soğurduğu ve radyasyon yoluyla yaydıkları enerji, (9.35) formülündeki ω^4 çarpanı nedeniyle, yüksek frekanslarda daha şiddetli olur. Buna göre, atmosfer atomlarından yayınlanan radyasyonun kırmızı renkli bileşeni zayıf, mavi renkli bileşeni daha kuvvetli olur. Gökyüzünün



Şekil 9.7

bir yönüne baktığınızda (tabii, doğrudan güneşe bakmıyorsanız) gördüğünüz bu mavi radyasyon ışığıdır.

Elektromagnetik dalga enine olduğundan, dipoller güneş ışığının geliş yönünde dik doğrultuda titreşirler. Gelen ışınlarla dik bir düzlemde titreşen dipoller, (9.34) denklemindeki $\sin^2 \theta$ çarpanından dolayı, gözlemci yönünde bir radyasyon yapmazlar. Bu açıdan gelen ışık güneş ışığına dik doğrultuda polarize olmuş olur (Şek. 9.7).



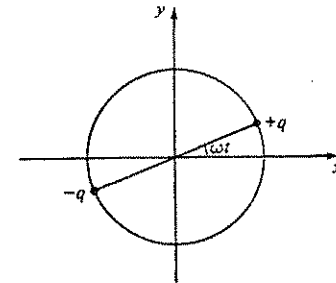
Şekil 9.8

Gün batımında aynı fiziksel olayın başka bir yüzü ortaya çıkar. Günbatımı olan bir yere gelen ışınlar Dünya yüzeyine teğet doğrultuda gelmektedirler. Böylece, tepeden gelen ışığa kıyasla, atmosferde çok daha uzun bir yol katederler (Şek. 9.8). Radyasyon gücü formülüne göre, atmosferdeki dipollerde soğrulma ve saçılma etkisiyle, beyaz ışıktan eksilen mavi ışık oranı çok daha fazla olur.

Problem 9.4 Titreşen dipolün (9.24) ve (9.29) formülleriyle verilen gecikmeli potansiyel ifadelerinin Lorentz ayar koşulunu sağladıklarını gösterin. (3. yaklaşığı yapmayın.)

Problem 9.5 (9.26) formülü, $p_0 \cos \theta = \vec{p}_0 \cdot \hat{r}$ alınarak, koordinat sisteminden bağımsız yazılabilir. Aynı işlemi (9.29), (9.31), (9.32) ve (9.34) formüllerinde yapın.

Problem 9.6 Dipolün iki kutbunu birleştiren telde oluşan radyasyon direncini hesaplayın. (Bu direnç, radyasyon yoluyla dipolün kaybettiği enerjiye eşit miktarda Joule ısı kaybına yol açan dirençtir.) $R = 790(s/\lambda)^2$ ohm olduğunu gösterin. Bir radyo alıcısındaki ($s = 5$ cm olsun) tellerin toplam direnci yanında radyasyon direnci önemli olur mu?



Şekil 9.9

Problem 9.7 Dönen bir elektrik dipolü, biri z -ekseni ve diğeri y -ekseni doğrultusunda

olan ve aralarında 90° faz farkı olan iki dipolün toplamı olarak düşünülebilir (Şek. 9.9):

$$\vec{p} = p_0 (\cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{j})$$

Toplanabilirlik ilkesiyle, (9.31) ve (9.32) formüllerini kullanarak dönen dipolün elektrik ve magnetik alanını bulun. Poynting vektörünü ve radyasyon şiddetini hesaplayın. Radyasyon şiddetinin θ açısına göre dağılım profilini çizin. Toplam radyasyon gücünü hesaplayın. Yanıt mantıklı görünüyor mu? (Güç ifadesi, elektrik alanın karesiyle orantılı olduğundan, toplanabilirlik ilkesine uymaz. Ama burada, uyar gibi görünüyor. Bunu nasıl açıklarsınız?)

9.1.3 Magnetik Dipol Radyasyonu

xy -düzleminde a yarıçaplı bir çemberden ω frekanslı sinüsel bir akım geçtiğini varsayalım:

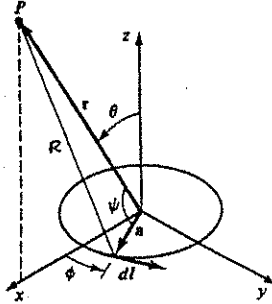
$$I(t) = I_0 \cos \omega t \quad (9.36)$$

Bu, titreşen bir *magnetik* dipol modelidir:

$$\vec{m}(t) = \pi a^2 I(t) \hat{k} = m_0 \cos \omega t \hat{k} \quad (9.37)$$

Burada m_0 dipol momentinin maksimum değeridir:

$$m_0 = \pi a^2 I_0 \quad (9.38)$$



Şekil 9.10

Çember nötr olduğundan skaler potansiyel sıfırdır. Gecikmeli vektör potansiyele bakalım:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega(t - R/c)}{R} d\vec{l} \quad (9.39)$$

xy -düzleminde bir P noktası ele alalım (Şek. 9.10). x -ekseninin iki tarafındaki katkıların simetrisinden dolayı, potansiyelin x -bileşeni sıfır olur; potansiyelin sadece y -bileşeni kalır:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 a \hat{j} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega(t - R/c)}{R} \cos \phi d\phi \quad (9.40)$$

Kosinüs teoremine göre

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \psi}$$

olup \vec{r} ile \vec{a} arasındaki açı ψ ile gösterilmiştir:

$$\vec{r} = r \sin \theta \hat{i} + r \cos \theta \hat{k}, \quad \vec{a} = a \cos \phi \hat{i} + a \sin \phi \hat{j}$$

9.1. DİPOL RADYASYONU

alnırsa, $ra \cos \psi = \vec{r} \cdot \vec{a} = ra \sin \theta \cos \phi$ olur. Buna göre,

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi} \quad (9.41)$$

olur. Noktasal dipol yaklaşımında çember çok küçük alınır:

$$a \ll r \quad (1: \text{noktasal dipol yaklaşımı}) \quad (9.42)$$

O halde, R ifadesinin a 'ya göre seri açılımında ilk terimleri almak yeterlidir:

$$\begin{aligned} R &= r \left(1 - \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi \right) \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi \right) \end{aligned} \quad (9.43)$$

ve kosinüslü terimin içi düzenlenir:

$$\begin{aligned} \cos \omega(t - R/c) &= \cos \left[\omega(t - r/c) \pm \frac{\omega a}{c} \sin \theta \cos \phi \right] \\ &= \cos \omega(t - r/c) \cos \left(\frac{\omega a}{c} \sin \theta \cos \phi \right) - \sin \omega(t - r/c) \sin \left(\frac{\omega a}{c} \sin \theta \cos \phi \right) \end{aligned}$$

Yine, daha önce olduğu gibi, dipol yarıçapının dalgaboyuna göre çok küçük olduğu varsayılır ($\lambda = 2\pi c/\omega$):

$$a \ll \frac{c}{\omega} \quad (2: \text{uzun dalgaboyu yaklaşımı}) \quad (9.44)$$

Buna göre,

$$\cos \omega(t - R/c) = \cos \omega(t - r/c) - \frac{\omega a}{c} \sin \theta \cos \phi \sin \omega(t - r/c) \quad (9.45)$$

(9.43) ve (9.45) ifadeleri (9.40) denkleminde kullanılır ve a 'ya göre ikinci derece terimleri atılırsa

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi r} \hat{j} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos \omega(t - r/c) + a \sin \theta \cos \phi \left[\frac{\cos \omega(t - r/c)}{r} - \frac{\omega \sin \omega(t - r/c)}{c} \right] \right\} \cos \phi d\phi$$

Birinci integral sıfır olur:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$$

İkinci terim kosinüs karesinin integralidir:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \pi$$

Bu sonuçları kullanır ve \vec{A} 'nın $\hat{\phi}$ yönünde olduğuna dikkat edersek

$$\vec{A}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \left[\frac{\cos \omega(t - r/c)}{r} - \frac{\omega}{c} \sin \omega(t - r/c) \right] \hat{\phi} \quad (9.46)$$

bulunur. Bu ifade, statik limitte ($\omega = 0$), magnetik dipolün vektör potansiyeli için bildiğimiz (5.83) formülünü verir:

$$\vec{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi}$$

Radyasyon bölgesindeki potansiyelle ilgilenelim:

$$r \gg \frac{c}{\omega} \quad (3: \text{radyasyon bölgesi yaklaşığı}) \quad (9.47)$$

Bu bölgede \vec{A} 'nın birinci terimi sıfıra gider ve sonuç bulunur:

$$\vec{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \sin \omega(t - r/c) \hat{\phi} \quad (9.48)$$

Şimdi, bu potansiyel kullanılarak elektromagnetik alanlar hesaplanır:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \hat{\phi} \quad (9.49)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \hat{\phi} \quad (9.50)$$

Yine birbirine dik, aynı fazda ve enine birer dalga elde edildi. Genlikler oranı ($E_0/B_0 = c$) da elektromagnetik dalga için beklenen orandır. Aslında, bu yapı *elektrik* dipol radyasyon alanlarına [(9.31) ve (9.32) formülleriyle] çok benzer. Aradaki fark şudur: magnetik dipol radyasyonunda \vec{E} alanı $\hat{\phi}$ yönünde ve \vec{B} alanı $\hat{\theta}$ yönünde, elektrik dipolde ise bunun tam tersidir.

Magnetik dipol radyasyonunda enerji akışı şöyle olur:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \right]^2 \hat{r} \quad (9.51)$$

ve ortalama dalga şiddeti

$$\langle \vec{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r} \quad (9.52)$$

olur. Buradan integral alınarak toplam radyasyon gücü bulunur:

$$\langle P \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2}{32\pi^2 c^3} \right) \omega^4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m_0^2 \omega^4}{3c^5} \quad (9.53)$$

Yine radyasyon şiddetinin açılma dağılımı simit şeklindedir ve toplam radyasyon gücü frekansın dördüncü kuvvetiyle orantılı olur. Fakat, elektrik ve magnetik dipol radyasyonları arasında önemli bir fark vardır. Aynı mertebeden dipoller için, elektrik dipolün yayınladığı güç çok daha büyüktür. (9.35) ile (9.53) formülleri karşılaştırılırsa

$$\frac{P_{\text{magnetik}}}{P_{\text{elektrik}}} = \left(\frac{m_0}{p_0 c} \right)^2 \quad (9.54)$$

Burada $m_0 = \pi a^2 I_0$ ve $p_0 = q_0 s$ dir. Elektrik dipolde üretilen akım (9.27) ifadesinde $I_0 = q_0 \omega$ olarak bulunmuştu. Kıyaslama için $s = \pi a$ olduğunu da varsayarsak

$$\frac{P_{\text{magnetik}}}{P_{\text{elektrik}}} = \left(\frac{a\omega}{c} \right)^2 \quad (9.55)$$

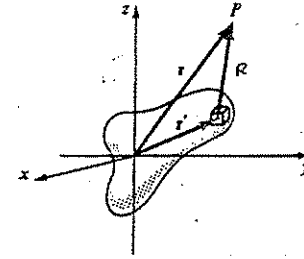
bulunur. Oysa, $(a\omega/c)$ oranı 2. yaklaşıklıkta çok küçük sayılmıştı; bunun karesi çok daha küçük olur. Uygulamada genellikle elektrik dipol radyasyonu daha baskın olur. Fakat, sistem uygun şekilde hazırlanıp elektrik dipol katkısı çok küçük yapılırsa, magnetik dipol radyasyonu gözlenebilir.

Problem 9.8 Titreşen magnetik dipolün elektrik ve magnetik alanlarını 3. yaklaşıklıkla başvurmadan hesaplayın. Poynting vektörünü bulun ve radyasyon şiddeti ifadesinin 3. yaklaşıklıkla bulduğumuz ifadeye eşit olduğunu gösterin. (Neden eşit olsun ki?)

Problem 9.9 Şek. 9.10'daki titreşen magnetik dipolün radyasyon direncini bulun. (Tanım için bkz. Problem 9.6). Yanıtınızı λ ve a cinsinden ifade edin ve elektrik dipolün radyasyon direnciyle karşılaştırın. (Yanıt: $3 \times 10^5 (a/\lambda)^4$ ohm)

9.1.4 Herhangi Bir Yük ve Akım Dağılımının Radyasyonu

Önceki iki kısımda özel iki sistemin (elektrik dipol ve magnetik dipolün) radyasyonunu inceledik. Şimdi aynı incelemeyi herhangi bir yük ve akım dağılımı için genelleştirmek istiyorum. Bu yük ve akım dağılımı yerleşmiş olmalıdır, yani sonlu bir bölgede olmalıdır (Şek. 9.11).



Şekil 9.11

Skaler potansiyel şöyle olur:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} d\tau \quad (9.56)$$

Burada R , hacim elemanı ile P noktası arasındaki uzaklıktır:

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \quad (9.57)$$

Yine, daha önce olduğu gibi, P gözlem noktasının yük dağılımının boyutlarına kıyasla çok uzakta olduğunu varsayalım:

$$r' \ll r \quad (3: \text{radyasyon bölgesi yaklaşığı}) \quad (9.58)$$

Buna göre, \vec{r}' cinsinden seri açılımının ilk terimi alınır

$$R \approx r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \quad (9.59)$$

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \quad (9.60)$$

$$\rho(\vec{r}', t - R/c) = \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{c}\right)$$

olur. Yük dağılımının orijinindeki gecikmeli zaman

$$t_0 = t - \frac{r}{c} \quad (9.61)$$

tanımlanır ve bu nokta etrafında seri açılımı yapılırsa

$$\rho(\vec{r}', t - R/c) = \rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right) + \dots \quad (9.62)$$

Burada noktasal zari zamana göre türevi gösterir. Bu serinin daha sonraki $\frac{1}{2} \ddot{\rho}(\vec{r} \cdot \vec{r}')/c^2, \dots$ vs. terimlerini atabilmek için, r' bunların her birinden çok küçük olmalıdır:

$$r' \ll \frac{c}{|\dot{\rho}/\rho|}, \dots \quad (2. \text{yaklaşıklık}) \quad (9.63)$$

Titreşen bir sistemde bu oranların herbiri (c/ω) mertebesinde. Bu yaklaşıklığı yorumlamak biraz zordur; ama şunu söyleyebiliriz: 1. ve 2. yaklaşıqlığın net sonucu r' nün birinci dereceden terimlerinin alınmasıdır.

(9.62) ve (9.60) ifadeleri (9.56) denkleminde kullanılır ve yine ikinci mertebeden terimler atılırsa

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\int \rho(\vec{r}', t_0) d\tau + \frac{\vec{r}}{r} \cdot \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) d\tau + \frac{\vec{r}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) d\tau \right]$$

Birinci integral t_0 anındaki toplam yüküdür. Yük korunumlu olduğundan Q toplam yükü zamanla değişmez. Diğer iki integral t_0 anındaki elektrik dipol momentidir. Buna göre

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{rc} \right] \quad (9.64)$$

Statik durumda birinci ve ikinci terim, V 'nin multipol açılımındaki monopoll ve dipol katkılarıdır. Üçüncü terim statik durumda sıfır olur.

Şimdi vektör potansiyele bakalım:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - R/c)}{R} d\tau \quad (9.65)$$

Eğer r' ye göre birinci dereceden terimleri tutacaksa, integrand içinde R yerine r almak yeterli olur (tanın nedenini birazdan göreceğiz):

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{J}(\vec{r}', t_0) d\tau \quad (9.66)$$

Problem 5.7'de şöyle bir sonuç ispat edilmişti: \vec{J} 'nin integrali dipol momentinin zaman türevine eşittir. Buna göre

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t_0)}{r} \quad (9.67)$$

Şimdi R açılımını neden sıfırıncı mertebeden ($R = r$) yukarı götürmediğimiz anlaşıyor: Tanım olarak \vec{p} zaten r' ye göre birinci mertebededir, buna eklenecek diğer bir r' katkısı potansiyeli ikinci mertebeden yapar.

Sıra alanları hesaplamaya geldi. Yine, radyasyon bölgesiyle (yani, kaynaktan çok uzak bölgeyle) ilgilenirsek, hesaplarda sadece $1/r$ terimlerini tutmak yeterlidir:

$$\vec{E} \text{ ve } \vec{B} \text{ 'deki } 1/r^2 \text{ terimleri atılır:} \quad (3. \text{yaklaşıklık}) \quad (9.68)$$

Örneğin, (9.64) denklemindeki birinci terim Coulomb alanıdır:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Bu terim radyasyona katkıda bulunmaz. Dikkat edilirse, radyasyona katkı sadece t_0 'ın türevi olan terimlerden gelir:

$$\vec{\nabla} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}}(t_0)}{rc} \right] \vec{\nabla} t_0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}}(t_0)}{r} \hat{r} \quad (9.69)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}}(t_0)}{r} \quad (9.70)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} [\dot{\vec{p}}_\phi(t_0)] \hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial r} [\dot{\vec{p}}_\theta(t_0)] \hat{\phi} \right\} = -\frac{\mu_0}{4\pi cr} (-\ddot{\vec{p}}_\phi \hat{\theta} + \ddot{\vec{p}}_\theta \hat{\phi}) \quad (9.71)$$

Buradan elektrik ve magnetik alan hesaplanır:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[(\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}}(t_0)) \hat{r} - \ddot{\vec{p}}(t_0) \right] \quad (9.72)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi rc} [\hat{r} \times \ddot{\vec{p}}(t_0)] \quad (9.73)$$

Özel olarak, küresel koordinatlarda z -ekseni $\vec{p}(t_0)$ yönünde seçilirse,

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(r, \theta, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \ddot{p}(t_0) \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\theta} \\ \vec{B}(r, \theta, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi c} \ddot{p}(t_0) \hat{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (9.74)$$

Poynting vektörü şöyle olur:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} (\ddot{p}(t_0))^2 \frac{\sin^2 \theta}{r} \hat{r} \quad (9.75)$$

Son olarak, r yarıçaplı küre yüzeyinde toplam güç bulunur:

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0}{6\pi c} (\ddot{p}(t_0))^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} \quad (9.76)$$

Hesaplarda r çarpanlarının birbirini götürdüğüne dikkat edin. Yukarıda \vec{E} ve \vec{B} hesabında $1/r^2$ 'li terimleri tutmuş olsaydık, bunların toplam güce katkısı $1/r^2$ 'li olacaktı ve radyasyon bölgesinde ($r \rightarrow \infty$) sıfır vereceklerdi. "Radyasyon" terimi sonsuza gönderilebilen enerji anlamına gelir. Ancak $1/r$ gibi değişen alanlar radyasyon yapabilir.

Burada da \vec{E} ve \vec{B} alanlarının enine, birbirine dik ve aynı fazda olduklarına, ve $E/B = c$ oranını doğru verdiklerine dikkat edelim.

Örnek 9.3: (a) Herhangi yük dağılımı ifadelerini titreşen elektrik dipole uygulayın ve aynı sonuçları verdiğini sağlayın. (b) a ivmesiyle hareket eden noktasal yükün toplam radyasyon gücünü bulun.

Çözüm : (a) Titreşen elektrik dipol için gerekli zaman türevi hesaplanır:

$$p(t) = p_0 \cos \omega t, \quad \dot{p}(t) = -\omega^2 p_0 \cos \omega t$$

Bu ifade yerine konulursa, Kısım 9.1.2 sonuçları elde edilir.

(b) Konum vektörü $\vec{s}(t)$ olarak değişen noktasal bir yükün elektrik dipol momenti

$$\vec{p}(t) = q \vec{s}(t)$$

olur. Buna göre,

$$\ddot{\vec{p}}(t) = q \ddot{\vec{s}}(t) = q \vec{a}(t)$$

olur. Bu ifade (9.76) formülünde kullanılırsa

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3} \quad (9.77)$$

Bu, meşhur Larmor formülüdür; buna Kısım 9.2'de tekrar döneceğiz. Noktasal yükün radyasyon gücünün ivmenin karesiyle orantılı olduğuna dikkat edelim.

Yukardaki incelememiz aslında gecikmeli potansiyellerin multipol açılımından ibarettir. Bu açılımı r' nün en küçük kuvvetinde tutarak $(1/r)$ 'ye bağımlı alanlar elde ettik ve bunların elektrik dipol radyasyonu yaptığını gördük. Yük korunumlu olduğundan, elektrik *monopol* terimi radyasyon yapmaz. Yük *korunumsuz* olsaydı, (9.64) ifadesindeki birinci terim şöyle olurdu:

$$V_{\text{mono}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(t_0)}{r}$$

ve buradan çıkan elektrik alan $1/r$ bağımlı olurdu:

$$\vec{E}_{\text{mono}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{Q}(t_0)}{r} \hat{r}$$

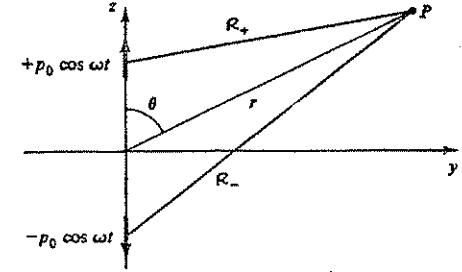
Şimdi, yarıçapı dışarı-ıçeri yönde titreşen yüklü bir kürenin radyasyon yapması gerektiğini düşünebilirsiniz, ama yapmaz—Gauss yasasına göre, küre dışındaki elektrik alan, yarıçap ne olursa olsun, $Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ kadardır. (Oysa, akustik monopoller (örneğin, kurbağa) ses radyasyonu yapabilmektedir.)

Eğer, yük dağılımının özelliğinden dolayı, elektrik dipol momenti (daha doğrusu, ikinci zaman türevi) sıfır oluyorsa, elektrik dipol radyasyonu oluşmaz ve bir üst mertebeden (r^{-2} li) terime bakmak gerekir. Bu terim incelendiğinde iki kısma ayrıldığı görülür: biri *magnetik dipol*, diğeri *elektrik kuadrupol radyasyonuna* karşılık gelir. Bu açılımla daha yüksek mertebeden terimler de hesaplanabilir.

Problem 9.10 (9.75) ve (9.76) formüllerini Problem 9.7'deki dönen dipole uygulayın. Daha önceki yanıtınızla görünürdeki farkı açıklayın.

Problem 9.11 Merkezi orijinde olan R yarıçapı yalıtkan bir halka xy -düzleminde. Halka üzerinde $\lambda = \lambda_0 \sin \phi$ boyca yük yoğunluğu vardır (ϕ boylam açısı). Halka z ekseninde ω açısal hızıyla döndürülüyor. Toplam radyasyon gücünü hesaplayın.

Problem 9.12 Serbest bırakılan bir elektron yerçekimi kuvveti etkisiyle serbest düşme yapıyor. İlk 1 cm'lik düşüşte, potansiyel enerjinin yüzde kaç radyasyon yoluyla kaybedilir?



Şekil 9.12

! Problem 9.13 Elektrik kuadrupol radyasyonu için basit bir model Şek. 9.12'de gösterilen, aralarında d uzaklığı bulunan ve birbirine zıt yönde konulmuş titreşen iki elektrik dipolden oluşur. (Kısım 9.1.2'de bulunan dipol potansiyellerini kullanın, fakat dipolleri orijinde almayın.) Hesaplarda d ye göre birinci dereceden terimleri tutarak

(a) Skaler ve vektör potansiyelleri bulun.

(b) Elektrik ve magnetik alanları bulun.

(c) Poynting vektörünü ve toplam radyasyon gücünü bulun. Şiddetin açısal dağılım profilini θ açısına göre çizin.

! Problem 9.14 Şek. 9.10'daki çemberden $I(t)$ akımı geçmektedir. (9.76) formülüne benzer şekilde, toplam radyasyon gücü ifadesini çıkarın. Yanıtınızı çemberin magnetik dipol momenti (m) cinsinden ifade edin. [Yanıt: $P = (1/4\pi\epsilon_0)(2\dot{m}^2/3c^5)$]

9.2 NOKTASAL YÜKÜN RADYASYONU

9.2.1 Liénard-Wiechert Potansiyelleri

Belirli bir yörünge üzerinde hareket eden noktasal q yükünün elektromagnetik alanını hesaplamak istiyoruz. Yörünge şöyle belirtilmiş olsun:

$$\vec{w}(t) = q \text{ yükünün } t \text{ anındaki konumu} \quad (9.78)$$

$V(\vec{r}, t)$ ve $\vec{A}(\vec{r}, t)$ gecikmeli potansiyelleri elbette yükün t anındaki durumuna değil, sinyalin yükten yola çıktığı daha önceki bir t_r anındaki durumuna bağlı olacaklardır. Bu sinyal ışık hızıyla yol alıp P noktasına t anında varmalıdır. Bu "gecikmeli" zaman şu denklemin çözümünden bulunur:

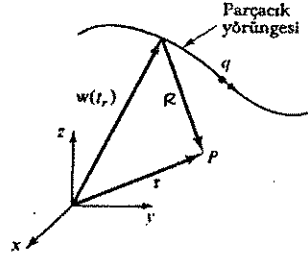
$$|\vec{r} - \vec{w}(t_r)| = c(t - t_r) \quad (9.79)$$

Sol taraf sinyalin aldığı yolu, sağ taraftaki $(t - t_r)$ ise bu yolu gidiş süresini gösterir. $\vec{w}(t_r)$ değerine yükün *gecikmeli konumu* diyoruz. Gecikmeli konumu P noktasına birleştiren vektörü yine \vec{R} ile gösterirsek (Şek. 9.13)

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{w}(t_r) \quad (9.80)$$

Şurası önemlidir: yörünge üzerinde, herhangi bir t anında P noktasıyla "temasta" olan tek bir nokta vardır. Aksi takdirde, örneğin gecikmeli zamanları t_1 ve t_2 olan iki nokta olsaydı:

$$R_1 = c(t - t_1) \quad \text{ve} \quad R_2 = c(t - t_2)$$



Şekil 9.13

Bu durumda $\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2 = c(t_2 - t_1)$ olurdu, yani parçacığın P doğrultusundaki ortalama hızı c olurdu. Yüklü parçacıklar ışık hızıyla gidemeyeceği için, P deki potansiyele herhangi bir anda katkıda bulunan tek bir gecikmeli nokta vardır.³

Yük dağılımı için bulduğumuz skaler potansiyeli tekrar yazalım:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{\mathcal{R}} d\tau \quad (9.81)$$

Bu formüle bakıp noktasal bir yükün potansiyelinin şöyle olacağını sanabilirsiniz:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\mathcal{R}}$$

(Yani, statik ifade gibi, fakat \mathcal{R} yükün gecikmeli konumu olur.) Fakat bu yanlıştır! Nedenini anlamak için iyi dinleyin: Gerçekten de (9.81) formülünde paydadaki \mathcal{R} integralin dışına çıkar, fakat içeride kalan

$$\int \rho(\vec{r}', t_r) d\tau \quad (9.82)$$

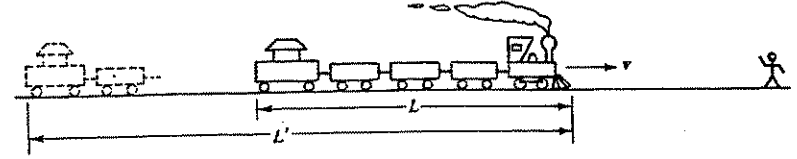
integrali parçacığın yüküne eşit değildir. Bir yük dağılımının toplam yükünü bulmak için tüm uzayda aynı anda dağılımın integrali alınmalıdır. Burada $t_r = t - \mathcal{R}/c$ gecikmesi nedeniyle, uzayın her bölgesi farklı bir zamanda toplama katılmaktadır. Yük dağılımı hareket ediyorsa, bulacağınız toplam gerçeği yansıtmaz. Bu sorunun noktasal yükler için oluşmaması gerektiğini düşünebilirsiniz. Maxwell teorisi elektrodinamiği yük ve akım yoğunlukları cinsinden formüle etmiştir; noktasal yük ancak dağılmış yükün boyutu sıfıra giderken limiti olabilir. Birazdan göreceğimiz gibi, parçacık ne kadar küçük olursa olsun, (9.82) ifadesindeki gecikme nedeniyle, fazladan bir $(1 - \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}/c)^{-1}$ çarpanı daima gelir. (Burada \vec{v} parçacığın t_r gecikmeli zamandaki hızıdır. O halde, yukarıdaki integralin doğru sonucu şöyle olur:

$$\int \rho(\vec{r}', t_r) d\tau = \frac{q}{1 - \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}/c} \quad (9.83)$$

Size doğru yaklaşmakta olan bir trenin gerçekte olduğundan daha uzun görüldüğünü⁴ hiç düşündünüz mü? Gözünüze aynı anda ulaştıkları halde, en arka vagonan gelen ışık lokomotiften gelen ışıktan daha önce, yani tren daha gerideyken yola çıkmıştır (Şek. 9.14). Arka

³ Aynı nedenle, P noktasındaki gözlemci her t anında parçacığı tek bir yerde görür. Buna karşılık, bir cismin sesini iki yerde birden işitmek mümkündür. Uzakta size doğru kükreyen bir aslan ses hızıyla koşup tekrar kükreerse, iki kükremeyi aynı anda işitirsiniz, fakat aslan sayısı birdir.

⁴ Lütfen bunun görellik teorisiyle veya Lorentz kusalmasıyla bir ilgisi olduğunu düşünmeyin; bu tamamen geometrik bir etkidir.



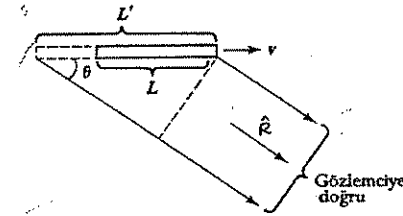
Şekil 9.14

vagonan gelen ışığın aldığı L' yolu sırasında, tren v hızıyla $L' - L$ kadar yer değiştirmiştir. Buna göre

$$\frac{L'}{c} = \frac{L' - L}{v} \quad \text{veya} \quad L' = \frac{L}{(1 - v/c)}$$

olur ve yaklaşan tren olduğundan daha uzun görünür. Buna karşılık, gözlemciden uzaklaşan tren daha kısa görünür. Bunu genelleştirsek, trenin hızı bakış doğrultusuyla θ açısı yapıyorsa, arka vagonan çıkan ışığın aldığı yol $L' \cos \theta$ olacaktır (Şek. 9.15). $L' \cos \theta/c$ süresinde tren $(L' - L)$ yolu alacağından

$$\frac{L' \cos \theta}{c} = \frac{L' - L}{v}, \quad \text{veya} \quad L' = \frac{L}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$



Şekil 9.15

olur. Burada, harekete dik doğrultudaki boyutlarda (yani, trenin yüksekliği veya genişliğinde) bir değişme olmadığina dikkat edin. O halde, trenin görünür τ' hacmi ile gerçek τ hacmi arasında şöyle bir ilişki olur:

$$\tau' = \frac{\tau}{(1 - \frac{\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}}{c})} \quad (9.84)$$

Burada $\vec{\mathcal{R}}$ trenden gözlemciye çizilen birim vektördür.

Trenlerle gecikmeli potansiyellerin ne ilişkisi var diye soracak olursanız, mesele şudur: (9.82) türünden bir integral alınırken, her bölge farklı zamanda hesaba katıldığından yükün etkin hacmi, tıpkı trenin görünür uzunluğu gibi, (9.84) çarpanı kadar değişir. Bu "düzeltme" çarpanında parçacığın boyutuyla ilgili bir bağlantı yoktur; o halde yük dağılımında olduğu gibi, noktasal yük için de geçerlidir:

$$\int \rho(\vec{r}', t_r) d\tau = \frac{q}{(1 - \frac{\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}}{c})} \quad (9.85)$$

O halde, hareketli noktasal yükün skaler potansiyelini yazabiliriz:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(1 - \frac{\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}}{c}) \mathcal{R}} \quad (9.86)$$

Burada \vec{v} yükün gecikmeli zamandaki hızı ve \vec{R} gecikmeli konumdan P noktasına çizilen vektördür.

Bir yük dağılımının akım yoğunluğu $\rho\vec{v}$ şeklinde yazılabileceğinden

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r) \vec{v}(t_r)}{R} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v}}{R} \int \rho(\vec{r}', t_r) d\tau$$

olur. Buna göre, vektör potansiyel yazılabilir:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{\left(1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}\right) R} = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r}, t) \quad (9.87)$$

(9.86) ve (9.87) formüllerine hareketli noktasal yükün Liénard-Wiechert potansiyelleri adı verilir.

Örnek 9.4: Düzgün doğrusal hareket yapan noktasal yükün skaler potansiyelini bulun.

Çözüm: Hesaplarda kolaylık için, $t = 0$ anında yükün orijinden geçtiğini varsayalım. Buna göre, konum vektörü

$$\vec{w}(t) = \vec{v}t$$

olur. Önce, (9.79) formülünden gecikmeli zaman bulunur:

$$|\vec{r} - \vec{v}t_r| = c(t - t_r)$$

Bu ifadenin karesi alınır:

$$r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t^2 - 2tt_r + t_r^2)$$

Bu kuadratik denklem t_r için çözülür:

$$t_r = \frac{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v}) \pm \sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}{(c^2 - v^2)} \quad (9.88)$$

Hangi kökü alacağımızı anlamak için $v = 0$ durumuna bakalım:

$$t_r = t \pm \frac{r}{c}$$

Bu durumda yük orijinde hareketsiz olduğundan, gecikmeli zamanın $(t - r/c)$ olacağı açıktır. O halde, negatif işaretli kök alınır. Şimdi (9.79) ve (9.80) denklemleri kullanılırsa

$$R = c(t - t_r), \quad \text{ve} \quad \vec{R} = \frac{\vec{r} - \vec{v}t_r}{c(t - t_r)}$$

bulunur. Potansiyel ifadesinin paydasını ayrı hesaplayalım:

$$\begin{aligned} R \left(1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}\right) &= c(t - t_r) \left[1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{v}t_r)}{c(t - t_r)}\right] = c(t - t_r) - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} + \frac{v^2}{c}t \\ &= \frac{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v}) - t_r(c^2 - v^2)}{c} = \frac{\sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}{c} \end{aligned}$$

(Son eşitlikte (9.88) formülünü eksi işaretli kullandım.) Buradan skaler potansiyel bulunur:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} \quad (9.89)$$

Problem 9.15 q yüklü bir parçacık R yarıçaplı dairesel yörüngede sabit ω açısal hızıyla dönüyor. (Merkezi orijinde ve xy -düzleminde bir çember alın; $t = 0$ anında yükün pozitif x -ekseni üzerinde $(R, 0)$ konumunda olduğunu varsayın.) z -ekseni üzerinde Liénard-Wiechert potansiyellerini bulun.

Problem 9.16 Düzgün doğrusal hareket yapan noktasal yükün skaler potansiyelinin

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}}$$

şeklinde yazılabileceğini gösterin. Burada $\vec{R} = (\vec{r} - \vec{v}t)$ parçacığın *şimdiki* konumundan P noktasına çizilen vektör, ve θ açısı \vec{R} ile \vec{v} arasındadır (Şek. 9.16). Göreli olmayan hızlarda $v^2 \ll c^2$ olduğundan $V = q/(4\pi\epsilon_0 R)$ bulunur.

Problem 9.17 (9.80) denkleminde sonraki yorumunda, herhangi bir t anında P noktasıyla "temasta" olan tek bir yörünge noktası olduğunu göstermiştik. Bazı durumlarda böyle bir nokta hiç olmayabilir (yani, P 'deki gözlemci henüz yükü görmemiştir). Örnek olarak, x -ekseni boyunca şöyle bir hareketi ele alalım:

$$\vec{w}(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2} \hat{i} \quad (-\infty < t < \infty)$$

(Özel görelilik teorisinde bu, sabit $F = mc^2/b$ kuvveti uygulanan parçacığın hareket denklemleri olur.) w 'nin t 'ye göre grafiğini çizin. Eğri üzerinde uygun dört beş noktada (hem $-x$ ve hem de $+x$ olan taraflarda) yükün gönderdiği sinyalin P noktasına doğru aldıkları yolu gösterin. Grafik üzerinde hangi bölgeler, P noktasından henüz parçacığın görülemeyeceği (x, t) değerlerine karşılık gelir? x noktasında duran bir gözlemci hangi andan itibaren parçacığı görmeye başlar? (Bu andan önce x noktasında potansiyel sıfır olur.) Görünen bir parçacığın gözden kaybolması mümkün müdür?

! Problem 9.18 Bir önceki problemdeki yörüngede hareket eden parçacığın Liénard-Wiechert potansiyellerini bulun. P noktasını x eksteni üzerinde ve yükün sağında alın.

9.2.2 Hareketli Noktasal Yükün Elektromagnetik Alanı

Şimdi hareketli noktasal yükün elektrik ve magnetik alanlarını hesaplayacak durumdayız. Liénard-Wiechert potansiyellerini şöyle yazalım:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r}, t) \quad (9.90)$$

Alanları veren ifadeleri de yazalım:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Bu türevler görüldüğü kadar kolay değildir, çünkü

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{w}(t_r) \quad \text{ve} \quad \vec{v} = \vec{w}(t_r) \quad (9.91)$$

ifadeleri t_r gecikmeli zamanında hesaplanmalıdır. Bu gecikmeli zaman ise

$$|\vec{r} - \vec{w}(t_r)| = c(t - t_r) \quad (9.79)$$

denklemleri çözülerek bulunmalıdır; yani t_r zamanı \vec{r} ve t 'nin fonksiyonudur. O halde, sıkı durun: şimdi uzun bir hesaba girişiyoruz, ama sonuç zahmete değer. Önce V 'nin gradyanıyla başlayalım:

$$\vec{\nabla} V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(\mathcal{R}c - \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v})^2} \vec{\nabla}(\mathcal{R}c - \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}) \quad (9.91)$$

$\mathcal{R} = c(t - t_r)$ olduğundan

$$\vec{\nabla} \mathcal{R} = -v \vec{\nabla} t_r \quad (9.92)$$

olur. Diğer diverjans ise, 4. çarpım kuralına göre hesaplanır:

$$\vec{\nabla}(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}) = (\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{R}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{R}}) \quad (9.93)$$

Bu terimleri teker teker hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} &= \left(\mathcal{R}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{R}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{R}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v}(t_r) = \mathcal{R}_x \frac{d\vec{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + \mathcal{R}_y \frac{d\vec{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + \mathcal{R}_z \frac{d\vec{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \\ &= \vec{a}(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\nabla} t_r) \end{aligned} \quad (9.94)$$

Burada $\vec{a} = \ddot{\vec{v}}$ parçacığın gecikmeli zamandaki ivmesidir. İkinci terime bakalım:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathcal{R}} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} \quad (9.95)$$

Bunun birinci terimi

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \vec{v} \quad (9.96)$$

olur. Diğer terim ise, (9.94) formülündeki düşünce yöntemine göre hesaplanır:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} = \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} t_r)$$

Şimdi (9.93) denklemindeki üçüncü terimi alalım:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \hat{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ &= \hat{i} \left(\frac{dv_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{dv_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{dv_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} - \frac{dv_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{dv_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} - \frac{dv_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} \right) \\ &= -\vec{a} \times \vec{\nabla} t_r \end{aligned} \quad (9.97)$$

Son terimi hesaplayalım:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{R}} = \vec{\nabla} \times \vec{r} - \vec{\nabla} \times \vec{w} \quad (9.98)$$

$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$ dir. (9.97) denklemindeki düşünce yöntemine göre de

$$\vec{\nabla} \times \vec{w} = -(\vec{v} \times \vec{\nabla} t_r) \quad (9.99)$$

bulunur. Tüm bunları (9.93) denkleminde yerine koyar ve $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ özdeşliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}) &= \vec{a}(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\nabla} t_r) + \vec{v} - \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} t_r) - \vec{\mathcal{R}} \times (\vec{a} \times \vec{\nabla} t_r) + \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\nabla} t_r) \\ &= \vec{v} + [(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{a}) - v^2] \vec{\nabla} t_r \end{aligned} \quad (9.100)$$

Bu ve (9.92) ifadesi (9.91) denkleminde yerine konulursa

$$\vec{\nabla} V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\mathcal{R}c - \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v})^2} [\vec{v} + [c^2 - v^2 + (\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{a})] \vec{\nabla} t_r] \quad (9.101)$$

Hesabı tamamlamak için $\vec{\nabla} t_r$ 'yi bilmemiz gerekiyor. Bunun için (9.79) tanımının gradyanını alıp $\vec{\nabla} \mathcal{R}$ cinsinden açarsak

$$-c \vec{\nabla} t_r = \vec{\nabla} \mathcal{R} = \vec{\nabla} \sqrt{\mathcal{R} \cdot \vec{\mathcal{R}}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{R} \cdot \vec{\mathcal{R}}}} \vec{\nabla}(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{R}}) = \frac{(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{R}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{R}})}{\mathcal{R}} \quad (9.102)$$

Payın birinci terimi (9.95) denklemindeki düşünce yöntemine göre

$$(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{R}} - \vec{v}(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\nabla} t_r)$$

Diğer terim, (9.98) ve (9.99) formüllerinde bulunmştı:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{R}} = (\vec{v} \times \vec{\nabla} t_r)$$

Buna göre,

$$\vec{\nabla} \mathcal{R} = \frac{\vec{\mathcal{R}} - \vec{v}(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\nabla} t_r) + \vec{\mathcal{R}} \times (\vec{v} \times \vec{\nabla} t_r)}{\mathcal{R}} = \frac{\vec{\mathcal{R}} - (\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}) \vec{\nabla} t_r}{\mathcal{R}}$$

olur ve buradan $\vec{\nabla} t_r$ çekilir:

$$\vec{\nabla} t_r = \frac{-\vec{\mathcal{R}}}{(\mathcal{R}c - \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v})} \quad (9.103)$$

Bu sonucu (9.101) denkleminde kullandığımızda sonuç bulunur:

$$\vec{\nabla} V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{\mathcal{R}}c - \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v})\vec{v} - [c^2 - v^2 + (\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{a})]\vec{\mathcal{R}}}{(\mathcal{R}c - \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v})^3} \quad (9.104)$$

Aynı yöntemle (bunu size Problem 9.19 olarak bırakıyorum), diğer türev bulunur:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{\mathcal{R}}c - \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v})(-\vec{v} + \frac{\mathcal{R}}{c}\vec{a}) + \frac{\mathcal{R}}{c}[c^2 - v^2 + (\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{a})]\vec{v}}{(\mathcal{R}c - \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{v})^3} \quad (9.105)$$

Bu iki türevi bir araya getirdiğimizde \vec{E} bulunur. Sonucu daha kolay ifade edebilmek için şöyle bir vektör tanımlayalım:

$$\vec{u} = c\vec{\mathcal{R}} - \vec{v} \quad (9.106)$$

Buna göre,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q\mathcal{R}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}(c^2 - v^2) + \vec{\mathcal{R}} \times (\vec{u} \times \vec{a})}{(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{u})^3} \quad (9.107)$$

Öte yandan,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times (\vec{v} V) = \frac{V(\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} V)}{c^2}$$

Buradaki $(\vec{\nabla} \times \vec{v})$ ve $\vec{\nabla} V$ yukarda hesaplanmştı. Bunları bir araya getirdiğimizde şöyle olur:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\vec{\mathcal{R}} \times [v(c^2 - v^2) + \vec{v}(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{a}) + \vec{a}(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{u})]}{(\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{u})^3}$$

Paydaki köşeli parantezin içi (9.107) formülündeki terime çok benzemektedir—tek fark \vec{u} yerine \vec{v} gelmiş olmasıdır. $\vec{u} = c\vec{R} - \vec{v}$ olduğundan ve tüm parantezin \vec{R} ile vektörel çarpımı alındığından, bu \vec{v} 'lerin yerine \vec{u} alırsak sonuç değişmez. O halde, sonucu yazabiliriz:

$$\vec{B} = \frac{\vec{R} \times \vec{E}}{c} \quad (9.108)$$

Noktasal yükün magnetik alanı daima elektrik alana ve gecikmeli noktanın doğrultusuna diktir.

\vec{E} alanındaki $\vec{u}(c^2 - v^2)$ 'li birinci terim parçacıktan uzaklığın karesiyle ters orantılıdır. Parçacığın ivmesi ve hızı sıfır ise, sadece bu terim kalır ve bildiğimiz elektrostatik alanı buluruz:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{R}$$

Bu nedenle, \vec{E} ifadesindeki birinci terime Coulomb alanı veya, ivmeden bağımsız olduğu için, hız alanı adı verilir.

\vec{a} ivmesine bağlı olan ikinci terim $1/R$ olarak azaldığından uzak bölgelerde baskın olur. Radyasyon bu terimden kaynaklandığı için buna radyasyon alanı veya, ivmeyle orantılı olduğu için, ivme alanı adı verilir. Aynı isimler magnetik alan için de kullanılır. Yine, elektrik ve magnetik alanın birbirine ve \vec{R} ilerleme yönüne dik olduğuna ve oranlarının $E_{\text{rad}}/B_{\text{rad}} = c$, yani elektromagnetik dalga oranında olduğuna dikkat edelim.

Bölüm 2'ye başlarken, iki yük arasındaki en genel kuvvet ifadesini hemen yazamıyacağımızı söylemiştim. Bunu şimdi yapabiliyorum. (9.107) ve (9.108) alanlarını Lorentz kuvvet ifadesinde kullanmak yeterlidir. Hızı \vec{v} ve ivmesi \vec{a} olan q yükü ile, hızı \vec{V} olan Q yükü arasındaki kuvvet

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 (\vec{R} \cdot \vec{u})^3} \left\{ [\vec{u}(c^2 - v^2) + \vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a})] + \frac{\vec{V}}{c} \times [\vec{R} \times [\vec{u}(c^2 - v^2) + \vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a})]] \right\}$$

olur. Buradaki \vec{R} , \vec{u} , \vec{v} , \vec{a} gecikmeli zamanda hesaplanmalıdır.

Örnek 9.5: Düzgün doğrusal hareket yapan yükün elektrik ve magnetik alanını bulun.

Çözüm: (9.107) formülünde $\vec{a} = 0$ alınırsa

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c^2 - v^2)}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} \vec{R} \vec{u}$$

Bu harekette konum vektörü $\vec{u} = \vec{v}t$ olduğundan

$$\vec{R} \vec{u} = c\vec{r} - \vec{R} \vec{v} = c(\vec{r} - \vec{v}t_r) - c(t - t_r)\vec{v} = c(\vec{r} - \vec{v}t)$$

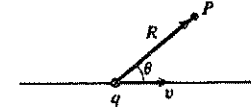
olur. Örnek 9.4'de şöyle bir ifade bulunmuştu:

$$(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}) = (\vec{R} \cdot \vec{u}) = \sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}$$

Problem 9.16'da ise bu karekökün şöyle yazılabileceği gösterilmişti:

$$Rc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}$$

Şekil 9.16

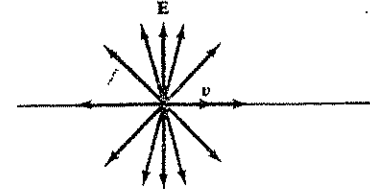


Burada $\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t$, ve θ açısı \vec{R} ile \vec{v} arasındadır (Şek. 9.16). Böylece elektrik alan bulunur:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^2} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (9.109)$$

\vec{E} alanı, parçacığın *şimdiki* konumunu P noktasına birleştiren \vec{R} vektörü yönünde olduğuna dikkat edelim. Bu, ilginç bir rastlantıdır, çünkü sinyal gecikmeli konumdan gönderilmişti.

Hızlı bir yükün elektrik alanı harekete dik yönde yoğunlaşır (Şek. 9.17). İleri ve geri yönlerde \vec{E} alanı, durgun yükün alanına kıyasla, $(1 - v^2/c^2)$ çarpanı kadar azalmış, harekete dik yönde ise $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ kadar artmıştır.



Şekil 9.17

\vec{B} alanına gelince,

$$\hat{R} = \frac{\vec{r} - \vec{v}t_r}{R} = \frac{(\vec{r} - \vec{v}t) + \vec{v}(t - t_r)}{R} = \frac{\vec{R}}{R} + \frac{\vec{v}}{c}$$

ifadesi kullanılırsa

$$\vec{B} = \frac{\vec{R} \times \vec{E}}{c} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \quad (9.110)$$

\vec{B} alan çizgileri yük çevresinde dolanımlı olurlar (Şek. 9.18)

Problem 9.19 (9.105) denkleminde götüren ara hesabı yapın. Bunun için, önce

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{Rc}{(\vec{R} \cdot \vec{u})}$$

olduğunu gösterin.

Problem 9.20 Noktasal bir yük pozitif x-ekseni yönünde hareket ediyor. Eksen üzerinde ve yükün *sağında* bir noktadaki elektrik ve magnetik alanın

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \left(\frac{c+v}{c-v} \right) \hat{i}, \quad \vec{B} = 0$$

olduğunu gösterin. Yükün *solunda* alanlar nasıl olur?

(Burada $\partial t_r / \partial t$ için Problem 9.19'da bulunan ifadeyi kullandım.) Diğer yandan

$$\frac{(\vec{R} \cdot \vec{u})}{Rc} = \left(1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}\right)$$

olur ve yukarda N_i ile N_h arasındaki ilişkiyi veren çarpandır. O halde, küre üzerinde $R^2 \sin \theta d\theta d\phi = R^2 d\Omega$ yüzey elemanından birim zamanda geçen enerji

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{(\vec{R} \cdot \vec{u})}{Rc} \frac{E_{\text{rad}}^2 R^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{4\pi}\right) \frac{[\hat{R} \times (\vec{u} \times \vec{a})]^2}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^5} \quad (9.118)$$

olur. Burada $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ katı açıdır. Bu ifadenin integralini alıp toplam radyasyon gücünü bulmak uzun bir iştir, fakat sonuç oldukça basit çıkar:

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \gamma^6 \left[a^2 - \left(\frac{\vec{v}}{v} \times \vec{a} \right)^2 \right] \quad (9.119)$$

Burada $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ dir. Larmor formülünü genelleştiren bu sonuç **Liénard formülü** olarak bilinir. γ^6 çarpanından dolayı, yük ışık hızına yaklaştıkça radyasyon gücü çok hızlı artar.

Örnek 9.6 : Bir yükün \vec{v} hızı ve \vec{a} ivmesi belli bir anda (t_r anında) aynı doğrultuda oluyorlar (örneğin, doğrusal harekette bu her zaman böyledir). (9.119) formülünden radyasyon gücünün açısal dağılımını ve toplam gücü bulun.

Çözüm : Bu durumda $\vec{u} \times \vec{a} = (c\vec{R} - \vec{v}) \times \vec{a} = c\vec{R} \times \vec{a}$ olur:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{4\pi}\right) c^2 \frac{[\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{a})]^2}{(c - \vec{R} \cdot \vec{v})^5}$$

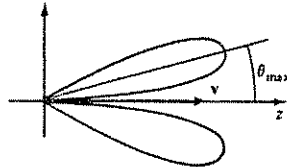
Pay ifadesini sadeleştirelim:

$$\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{a}) = \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{a}) - \vec{a} \quad \text{ve} \quad [\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{a})]^2 = a^2 - (\hat{R} \cdot \vec{a})^2$$

Özel olarak, z-eksenini \vec{v} yönünde seçersek ($\beta = v/c$)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{4\pi c^3}\right) \frac{a^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (9.120)$$

olur. Bu sonuç, $v = 0$ için, (9.115) formülünü doğru olarak verir. Fakat, v çok büyük (yani $\beta \simeq 1$) olduğunda, halka şeklindeki radyasyon dağılımı ön tarafa eğimli olur (Şek. 9.22). Yine tam gidiş yönünde radyasyon oluşmaz, fakat radyasyonun çoğu bu yönde bir koni içinde yer alır.



Şekil 9.22

Toplam radyasyon gücü integral alınarak bulunur:

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a^2}{4\pi c^3} \int \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \sin \theta d\theta d\phi$$

ϕ integrali 2π verir; $x = \cos \theta$ alınırsa, θ integrali sadeleşir:

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a^2}{2c^3} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2) dx}{(1-\beta x)^5}$$

İntegral kısmi integrasyonla alınırsa $\frac{4}{3}(1-\beta^2)^{-3}$ verir. Sonuç olarak

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \left(\frac{q^2 a^2}{c^3}\right) \gamma^6 \quad (9.121)$$

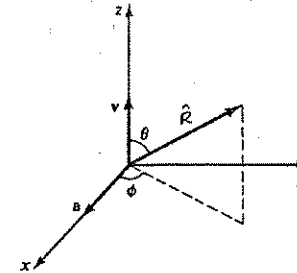
bulunur. Bu sonuç, \vec{v} ile \vec{a} birbirine paralel olduğunda, (9.119) Liénard formülünü doğru olarak verir. İvmeli parçacık hızlanıyor veya yavaşlıyor olsa da, radyasyon dağılımı aynı olur. Yüksek enerjili elektronlar metal bir hedefe çarpıp yavaşladıklarında, **bremstrahlung** veya "frenleme radyasyonu" denilen radyasyon çıkar. Burada size anlattığım klasik bremstrahlung teorisi olur.

Problem 9.24 (a) Bir elektron v_0 ilk hızından itibaren durana kadar sabit a ivmesiyle yavaşlıyor. Başlangıçtaki kinetik enerjisinin yüzde kaçını radyasyon yoluyla kaybeder? (Diğer kısım, elektronu sabit ivmeyle yavaşlatan mekanizma tarafından alınır.) $v_0 \ll c$ varsayın ve Larmor formülünü kullanın.

(b) Sayısal uygulama olarak, normal bir iletken içinde elektronun ilk hızını $\sim 10^5$ m/s alın ve duruncaya kadar 30 Å yol aldığını varsayın. Buna göre, normal bir iletkende radyasyon kayıpları önemli olur mu?

Problem 9.25 Bohr'un hidrojen atomu modelinde, taban durumunda bir elektron 0.5 Å yarıçaplı dairesel bir yörüngede dönmekte ve açısal momentumu \hbar kadar olmaktadır (\hbar Planck sabiti). Bu elektron için $v \ll c$ olduğunu, dolayısıyla Larmor formülünün kullanılabilceğini gösterin. Klasik elektrodinamiğe göre elektronun radyasyon yoluyla kaybettiği gücü hesaplayın. Birim zamanda bu enerji kaybıyla, elektronun ne kadar süre sonra çekirdeğe çarpacağını hesaplayın. (Çekirdek yarıçapını 2×10^{-16} m alın.)

Problem 9.26 Örnek 9.6'da maksimum radyasyonun olduğu θ_{max} açısını bulun (Şek. 9.22). Göreli hızlarda ($v \sim c$), $\theta_{\text{max}} \simeq \sqrt{(1-\beta)/2}$ olduğunu gösterin. Göreli durumda, maksimum doğrultudaki radyasyon şiddetinin, ani hızı sıfır olan parçacığın maksimum radyasyon şiddetine oranı ne olur? Yanıtınızı γ cinsinden ifade edin.



Şekil 9.23

! Problem 9.27 Senkrotron radyasyonu. Hareketli yükün hız ve ivmesinin birbirine dik olduğu durumu inceleyin. Eksenleri Şek. 9.23'deki gibi seçin: \vec{v} hızı z-ekseni yönünde, \vec{a} ivmesi x-ekseni yönünde olsun. Buna göre

$$\vec{v} = v \hat{k}, \quad \vec{a} = a \hat{i}, \quad \hat{R} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

Problem 9.21 (9.107) formülünün daha kısa olarak

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{R} \cdot \vec{u})} \frac{\partial}{\partial t_r} \left(\frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{\vec{R} \cdot \vec{u}} \right)$$

şeklinde ifade edilebileceğini gösterin. (Burada $\partial/\partial t_r$ türevi, \vec{r} ve t sabit tutularak, t_r 'ye göre alınan kısmi türevdir.)

Problem 9.22 (a) Üzerinde düzgün λ yük yoğunluğu bulunan sonsuz doğrusal tel kendi doğrultusunda sabit v hızıyla hareket etmektedir. (9.109) formülünü kullanarak, telden d uzaklıkta bir noktadaki elektrik alanı bulun.

(b) (9.110) formülünü kullanarak magnetik alanı bulun.

Problem 9.23 Problem 9.15'teki yük dağılımının merkezindeki elektrik ve magnetik alanı bulun. \vec{B} için bulduğunuz ifadeyi kullanarak sabit I akımı taşıyan bir çemberin merkezindeki magnetik alanı bulun ve yanıtınızı Örnek 5.6 ile karşılaştırın.

9.2.3 Noktasal Yükün Radyasyon Gücü

Noktasal yükün enerji akısını Poynting vektörüyle hesaplayalım:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \times (\vec{R} \times \vec{E})}{\mu_0 c} = \frac{E^2 \vec{R} - (\vec{E} \cdot \vec{R}) \vec{E}}{\mu_0 c} \quad (9.111)$$

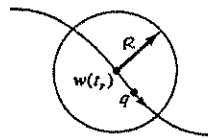
Bu enerji akısı gerçek radyasyon enerjisi değildir; bunun bir kısmını parçacık hareketi sırasında birlikte taşır. Radyasyon enerjisi parçacıktan kopup sonsuza iletilen enerji demektir. Parçacığın toplam radyasyon gücünü bulmak istersek, t_r anında parçacığın merkezde bulunduğu \mathcal{R} yarıçaplı büyük bir küre yüzeyi gözönüne alırsak (Şek. 9.19). Sonra, sinyalin bu yüzeye ulaşması için geçen

$$t - t_r = \frac{\mathcal{R}}{c}$$

süresi kadar bekler ve Poynting vektörünün bu yüzeydeki integralini alırız. (Küre yüzeyindeki her nokta için gecikmeli zamanın t_r olduğuna dikkat edin.) Kürenin yüzey alanı \mathcal{R}^2 ile orantılı olduğundan, $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ limitine geçildiğinde, \vec{S} vektöründe sadece $1/\mathcal{R}^2$ 'li terimler katkıda bulunacak, diğer $1/\mathcal{R}^3$, $1/\mathcal{R}^4$ gibi terimlerin hiçbir katkısı olmayacaktır. Bu nedenle *ivme alanı* terimi gerçek radyasyonu temsil eder:

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} [\vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a})] \quad (9.112)$$

(Hız alanı da enerji taşır; fakat bu enerji, parçacıkla birlikte gider ve sonsuza iletilmediği için radyasyon sayılmaz. O halde, bir yükün radyasyon yapabilmesi için *ivmelenmesi gerekir*.)



Şekil 9.19

Radyasyon alanları \vec{R} yönüne dik olduklarından, (9.111) denklemindeki ikinci terim sıfır olur:

$$\vec{S}_{\text{rad}} = \frac{E_{\text{rad}}^2}{\mu_0 c} \vec{R} \quad (9.113)$$

9.2. NOKTASAL YÜKÜN RADYASYONU

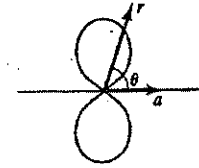
Parçacığın t_r anında, bir an için durgun olduğunu varsayalım. Bu takdirde (9.106) tanımına göre $\vec{u} = c\vec{R}$ olur ve

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{R} \times (\vec{R} \times \vec{a})}{\mathcal{R}} \quad (9.114)$$

bulunur. Böylece

$$\vec{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{a^2 - (\vec{a} \cdot \vec{R})^2}{\mathcal{R}^2} \vec{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{4\pi c^3} \right) \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{R}^2} \vec{R} \quad (9.115)$$

olup, θ açısı \vec{R} ile \vec{a} arasındaki açıdır. Bu gücün açısal dağılımı Şek. 9.20'de gösterilmiştir. İleri veya geri yönde enerji radyasyonu olmadığına, dağılımın gidiş yönüne dik bir halka içinde yoğunlaştığına dikkat edin.



Şekil 9.20

Toplam radyasyon gücü hesaplanırsa

$$P = \int \vec{S}_{\text{rad}} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0 c} \left(\frac{q}{4\pi c} \right)^2 a^2 \int \frac{\sin^2 \theta}{\mathcal{R}^2} \mathcal{R}^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

veya

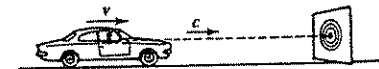
$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3} \quad (9.116)$$

olur. Bu, daha önce başka yöntemle bulduğumuz Larmor formülüdür.

Bu sonuca varırken $v = 0$ olduğunu varsaydım, fakat aynı ifade $v \ll c$ olduğunda da iyi bir yaklaşıklık olur. $v \neq 0$ durumunun tam çözümü, iki nedenle çok zordur: birincisi, \vec{E}_{rad} ifadesi daha karmaşıktır. İkincisi daha ince bir zorluktur: yüzeyden geçen enerji akısı (yani, \vec{S}_{rad}) parçacıktan yola çıkan enerji akısı olmaz. Hareketli bir arabadan duran bir hedefe mermi yağdırıldığını düşünün (Şek. 9.21). Duran hedefe birim zamanda çarpan mermi sayısı (N_h) ile, tabancadan birim zamanda çıkan mermi sayısı (N_t) aynı değildir. Bu, bir tür Doppler olayıdır. Araba hedefe doğru yaklaşıyorsa, $N_t = (1 - v/c)N_h$ olur (burada v arabanın hızı ve c mermi hızıdır). Herhangi bir açıda \vec{v} hızıyla yaklaşan araba için bu ilişki

$$N_t = \left(1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c} \right) N_h$$

olur; burada \vec{R} arabadan hedefe çizilen birim vektördür.



Şekil 9.21

Bu genel problemde, \mathcal{R} yarıçaplı küreyi birim zamanda geçen enerji dW/dt ise, gecikmeli zamanda yükten ayrılan enerji şöyle olur:

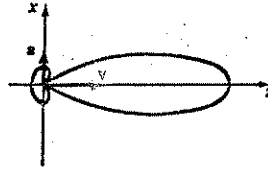
$$\frac{dW}{dt_r} = \frac{dW}{dt} \left(\frac{\partial t_r}{\partial t} \right) = \frac{(\vec{R} \cdot \vec{u})}{\mathcal{R}c} \frac{dW}{dt} \quad (9.117)$$

olur. Radyasyon gücünün açısal dağılımını ve toplam güç ifadesini çıkarın.

$$\left(\text{Yanıt: } \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a^2}{4\pi c^3} \frac{[(1-\beta \cos \theta)^2 - (1-\beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi]}{(1-\beta \cos \theta)^5} \right)$$

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3} \gamma^4$$

İrdeleme: Göreli hızlarda ($\beta \approx 1$) radyasyon ileri doğrultuda maksimum olur (Şek. 9.24). Bu durumun en önemli uygulaması *dairesel* hareket yapan yükün radyasyonudur; buna senkrotron radyasyonu denir. Bir hızlandırıcıda dönen elektronun radyasyonu, tıpkı gece giden bir lokomotif ışığı gibi, daima ileri yönde olur.



Şekil 9.24

9.3 RADYASYON TEPKİSİ

9.3.1 Abraham-Lorentz Formülü

Klasik elektrodinamik yasalarına göre, ivmelenen bir yük radyasyon yayar. Bu radyasyonun alıp götürdüğü enerji parçacığın kinetik enerjisinde azalmaya yol açar. O halde yüklü bir parçacık, aynı kuvvetin etkisi altında ivmelenen aynı kütleli nötr bir parçacığa göre, *daha az* ivmeleneyecektir. Buna başka bir açıdan bakarsak, radyasyon sanki parçacığa bir tür *geri tepme* kuvveti (reaksiyon kuvveti) uyguluyor gibidir—ateşlenen silahın geri tepmesi gibi. Bu kısımda \vec{F}_{rad} radyasyon tepkisi denilen bu kuvveti, enerji korunumuyla hesaplayacağız. Sonra, bu kuvvetin fiziksel kaynağını basit bir modelle açıklamaya çalışacağız.

Görelî olmayan ($v \ll c$) bir parçacığın toplam radyasyon gücü (9.116) Larmor formülüyle verilir:

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3} \quad (9.122)$$

Enerji korunumuna göre bunun, parçacığın \vec{F}_{rad} kuvveti etkisiyle birim zamanda kaybettiği enerjiye eşit olduğu düşünülebilir. Klasik mekanikte, \vec{v} hızıyla giden parçacığa etkiyen \vec{F} kuvvetinin gücü $\vec{F} \cdot \vec{v}$ olur. Buna göre

$$\vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3} \quad (9.123)$$

olur. Burada “düşünülebilir” dedim, çünkü bu ifade aslında *yanlıştır*. Hatırlarsanız, radyasyon gücünü sonsuz yarıçaplı bir küre yüzeyinden geçen enerji akısı olarak hesapladık, ve bu hesap sırasında $1/r^2$, $1/r^3$, $1/r^4$ gibi değişen terimlerden, sadece *ivme alanı* katkısını hesaba kattık, *hız alanı* katkısı daha hızlı sıfıra gittiği için gözönüne almadık. Oysa, parçacığın yakınında bulunuyorsak, hız alanı da enerji taşır—sadece onu sonsuza göndermez. Parçacık hızlanır veya yavaşlarken, hız alanıyla da enerji alışverişi olur. O halde, doğru enerji korunumunu yazacaksa, radyasyon enerjisi ve hız alanına verilen enerjiyi birlikte gözönüne almalıyız.

9.3. RADYASYON TEPKİSİ

Fakat, parçacığın ilk ve son durumlarının aynı olduğuna karar verirse (periyodik hareket), hız alanına verilen net enerji sıfır olur ve sadece radyasyon kaybı vardır. Buna göre, (9.123) denklemi herhangi bir anda yanlış olsa da, ortalama olarak doğru olur:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{v} dt = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt \quad (9.124)$$

Örneğin, periyodik harekette bu integral bir periyodun tamamı olan zaman aralığında alınmalıdır. Bu denklemin sağ tarafında kısmi integrasyon alalım:

$$\int_{t_1}^{t_2} a^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) dt = \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \cdot \vec{v} dt$$

Birinci terim, başlangıç ve son durumlar özdeş olduğundan, sıfır olur. Buna göre,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\vec{F}_{\text{rad}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \right] \cdot \vec{v} dt = 0 \quad (9.125)$$

yazılır. Bu denklemin sağlanması için

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \quad (9.126)$$

Radyasyon tepki kuvvetini veren bu ifadeye **Abraham-Lorentz formülü** denir.

Ashında bu formülü ispat etmiş değiliz; (9.125) denklemi \vec{v} vektörüne dik doğrultudaki kuvvetin ne olduğunu söylemiyor, sadece paralel kuvvetin özel seçilmiş bir zaman aralığında ortalamasını veriyor. Birazdan göreceğimiz üzere, Abraham-Lorentz formülünün doğru olduğuna inanmak için başka kanıtlar da vardır. Bu aşamada sadece, enerji korunumuna uyan en basit tepki kuvveti ifadesi olduğunu söyleyebiliriz.

Abraham-Lorentz formülü kafa karıştırıcı bazı sorulara yol açar, ilk bulunduğu bu yana geçen 80 küsur yıl içinde kimse bu formülü tam anlamış değildir. Örneğin, üzerine hiçbir dış kuvvet etkimeyen bir parçacık gözönüne alalım. Newton hareket yasasına göre

$$F_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} a = ma$$

olmalıdır. Bu denklemin çözümü

$$a = a_0 e^{t/\tau} \quad (9.127)$$

olup, τ sabiti

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{mc^3} \quad (9.128)$$

olur. (Elektron için $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s dir.) Yani parçacık, hiçbir dış kuvvetin yardımı olmadan, üstel olarak ivmelenmektedir! Bu saçma sonuçtan kurtuluş yolu $a_0 = 0$ almaktır. Bu tür tuhafıkların diğer tatsu bir sonucu da şudur: Eğer bir dış kuvvet uygulanacaksa, *daha kuvvet uygulanmadan* parçacık yanıt vermeye başlar (bkz. Problem 9.30). Bu ön ivmelenme τ kadar çok kısa bir süre önce olur, ama nedensellik ilkesine aykırı olduğundan, teorik açıdan mide bulandırır.

Örnek 9.7: Radyasyondan kaynaklanan sönüm. Doğal frekansı ω_0 olan bir yaya bağlı yüklü parçacık, dışardan uygulanan ω frekansı ile zorlamalı harmonik hareket yapıyor. γ sönüm katsayısını bulun.

Çözüm : Hareket denklemi şöyle olur:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{\text{toplam}} = F_{\text{yay}} + F_{\text{rad}} + F_{\text{dış}} \\ &= -m\omega_0^2 x + m\tau\dot{x} + F_{\text{dış}} \end{aligned}$$

Sistem ω frekansı ile salındığına göre

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \delta)$$

çözümünü kullanırsak

$$\dot{x} = -\omega x$$

olur. Bu değeri hareket denkleminde kullandığımızda

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F_{\text{dış}} \quad (9.129)$$

bulunur. Burada sönüm katsayısı

$$\gamma = \omega^2 \tau \quad (9.130)$$

olur. Bölüm 8'de $F_{\text{sürtünme}} = -\gamma m v$ yazdığımızda [(8.175) denklemi], sürtünmenin hızla orantılı olduğunu varsaydım. Burada, radyasyondan kaynaklanan sönüm kuvveti \tilde{v} ile orantılı olmaktadır.

Problem 9.28 (a) q yüklü bir parçacık R yarıçaplı dairesel bir yörüngede sabit v hızıyla dönmektedir. Hareketi sürdürülebilmek için mv^2/R kadar bir merkezci kuvvet uygulanması gerektiğini biliyoruz. Buna ek olarak, radyasyon kuvvetini karşılayacak \vec{F}_e kuvveti ne kadar olmalıdır? (Yanıtı ani \tilde{v} hızıyla ifade etmek kolaylık sağlar.) Bu ek kuvvetin harcadığı güç ne kadardır? Bu gücü toplam radyasyon gücü (Larmor formülü) ile karşılaştırın.

(b) Aynı soruyu, genliği A ve frekansı ω olan basit harmonik hareket için yanıtlayın [$\vec{w}(t) = A \cos(\omega t) \hat{k}$]. Aradaki farkı açıklayın.

(c) Sabit g yerçekimi ivmesiyle serbest düşme yapan bir parçacığa uygulanan radyasyon tepki kuvvetini hesaplayın. Toplam radyasyon gücü ne kadardır? Sonucu irdileyin.

Problem 9.29 (a) γ sönüm katsayısının tümüyle radyasyondan kaynaklandığını [(9.130) denklemi] varsayıp, optik dispersiyon durumunda sönümün çok küçük ($\gamma \ll \omega_0$) olduğunu gösterin. (Optik dispersiyonda doğal frekanslar görünür ışık bölgesinde yer alır.)

(b) Problem 8.26 sonucunu kullanarak, Problem 8.25'teki modelin anormal dispersiyon bölgesinin yaklaşık genişliğini hesaplayın.

! Problem 9.30 Radyasyon tepki kuvveti için (9.126) formülünü de katarsak, bir F dış kuvveti uygulanan yüklü bir parçacığın Newton hareket yasası şöyle olur:

$$a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m}$$

(a) Yüksüz parçacık durumunda ($a = F/m$), kuvvet zaman içinde süreksiz olduğunda ivme de süreksiz olur, fakat hız ve konum süreklidir. Yüklü parçacık için, kuvvet süreksiz olsa bile, ivme de (hız ve konum gibi) zamanın *sürekli* bir fonksiyonu olacaktır (Fiziksel olarak, radyasyon etkisi a ivmesindeki ani değişikliğe engel olur.) Hareket denkleminin $t_0 - \epsilon_0$ 'dan $t_0 + \epsilon_0$ 'ya kadar integralini alıp, daha sonra $\epsilon \rightarrow 0$ limitine geçerek, a ivmesinin t_0 anında sürekli olduğunu ispatlayın.

(b) Bir parçacık üzerine, $t = 0$ anında başlayıp T anına kadar süren sabit bir F kuvveti uygulanıyor. Hareket denkleminin şu üç aralıkta en genel $a(t)$ çözümlerini bulun: (i) $t < 0$; (ii) $0 < t < T$; (iii) $t > T$.

(c) (a) şıkta bulduğunuz süreklilik koşulunu $t = 0$ ve $t = T$ anlarında uygulayın. (iii) aralığındaki ıraksak çözümden veya (i) aralığındaki ön ivmelenmeden kurtulabileceğinizi, fakat ikisinden birden kurtulmadığınızı gösterin.

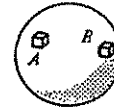
(d) ıraksak çözümden kurtulmayı seçerseniz, hızın zamana göre fonksiyonu ne olur? (Hız elbette $t = 0$ ve $t = T$ 'de süreklidir.) Parçacığın başlangıçta hareketsiz olduğunu varsayın: $v(-\infty) = 0$.

(e) $a(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonlarının hem yüksüz parçacık ve hem de yüklü parçacığın ıraksak çözümünü için grafiğini çizin.

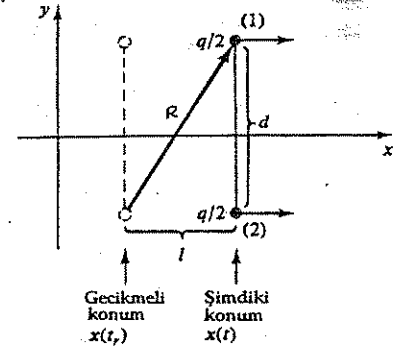
9.3.2 Radyasyon Tepkisinin Fiziksel Kökeni

Yukarda radyasyon tepki kuvvetini veren Abraham-Lorentz formülünü enerji korunumu yoluyla elde ettik. Bu kuvvetten sorumlu olan *mekanizmanın* ne olduğunu pek düşünmedik, sadece parçacığın hareketine karşı koyan bir tepki kuvveti olduğunu belirttik. Oysa, noktasal bir parçacığın kendi elektromagnetik alanı, parçacığın kendi üzerinde sonsuza gittiğinden, bunun uyguladığı kuvvetin nasıl hesaplanacağı pek açık değildir. Bu problemi yaşamamak için, parçacığı sonlu bir yük dağılımı olarak alırsak, elektrik alan her yerinde sonlu olur; kuvveti hesapladıktan sonra da parçacığın çapını sıfıra götürürüz. Bu yapılsa, sonlu parçacığın bir yarısının (A) diğer yarısına (B) uyguladığı kuvvetin, B yarısının A -yarısına uyguladığı kuvvete eşit ve zıt *olmadığı* görülür. Yük dağılımı çok küçük parçalara bölünür ve bu parçaların ikiserli kuvvetleri toplandığında, parçacığın kendi üzerine net bir kuvvet uyguladığı görülür. İşte, parçacığın iç yapısında Newton'un etki-tepki yasasına aykırı olarak oluşan bu kuvvet radyasyon tepkisidir.

Bu konuda ilk hesap Lorentz tarafından küresel bir parçacık için yapıldı; bu seçim uygun olmakla beraber, matematiksel olarak zordur. Ben burada olayın kökenini aradığım için, daha az gerçekçi bir model önereceğim: Bir halter gibi düşünülen parçacığın toplam q yükü, aralarında sabit d uzaklığı olan iki halter topu arasında eşit paylaşılmış olsun (Şek. 9.25). Bu, pek gerçekçi bir temel parçacık modeli olmaz; fakat noktasal parçacık ($d \rightarrow 0$) limitine geçildiğinde her model Abraham-Lorentz formülünü vermelidir, çünkü sonuç enerji korunumuyla bulunacaktır.



Şekil 9.25



Şekil 9.26

Bu halterin z -yönünde hareket ettiğini ve gecikmeli t_g anında bir an için hareketsiz

olduğunu varsayalım. 2. topun 1.konumdaki elektrik alanı şöyle olur [(9.107) formülü]:

$$\vec{E}_1 = \frac{(q/2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{R}}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} [\vec{u}(c^2 - \vec{R} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{R} \cdot \vec{u})] \quad (9.131)$$

Burada

$$\vec{u} = c\hat{R}, \quad \text{ve} \quad \vec{R} = l\hat{i} = d\hat{j} \quad (9.132)$$

olduğundan

$$\vec{R} \cdot \vec{u} = cR, \quad \vec{R} \cdot \vec{a} = la, \quad R = \sqrt{l^2 + d^2} \quad (9.133)$$

yazılır. İki uçtaki kuvvetleri sonunda topladığımızda, y -bileşenleri birbirini sıfırlayacağından, \vec{E}_1 alanının sadece x -bileşeniyle ilgilenebiliriz. (Aynı nedenle, magnetik kuvvetle ilgilenmeye gerek kalmaz.) Buna göre

$$u_x = cl/R \quad (9.134)$$

olduğundan

$$E_{1x} = \frac{(q/2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{(l - ad^2/c^2)}{(l^2 + d^2)^{3/2}} \quad (9.135)$$

olur. Simetri dolayısıyla $E_{2x} = E_{1x}$ olacaktır. O halde, halter üzerindeki net kuvvet

$$\vec{F}_{\text{self}} = \frac{q}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \frac{2(q/2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{(l - ad^2/c^2)}{(l^2 + d^2)^{3/2}} \hat{i} \quad (9.136)$$

Buraya kadar yaklaşık birşey yoktur. Şimdi bu ifadeyi d 'nin kuvvet serisi olarak açalım. "Parçacığın" boyu sıfıra gittiğinde, d 'nin tüm pozitif kuvvetleri sıfır olacaktır. Taylor açılımına göre

$$x(t) = x(t_r) + \dot{x}(t_r)(t - t_r) + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_r)(t - t_r)^2 + \dots \quad (9.137)$$

ifadesi kullanılır ve $t - t_r = T$ ile gösterilirse

$$l = x(t) - x(t_r) = \frac{1}{2}aT^2 + \frac{1}{6}\dot{a}T^3 + \dots \quad (9.138)$$

olur. Burada T süresi gecikmeli zaman koşulundan bulunur:

$$l^2 + d^2 = (cT)^2 \quad (9.139)$$

Buna göre

$$T = \frac{d}{c} + \left(\frac{1}{c}\right)d^3 + \dots \quad (9.140)$$

ve dolayısıyla,

$$l = \frac{a}{2c^2}d^2 + \frac{\dot{a}}{6c^3}d^3 + \left(\frac{1}{c}\right)d^4 + \dots \quad (9.141)$$

yazılır. Bu ifade (9.136) denkleminde kullanılırsa

$$\vec{F}_{\text{self}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{a}{4c^2d} + \frac{\dot{a}}{12c^3} + \left(\frac{1}{c}\right)d + \dots \right) \hat{i} \quad (9.142)$$

bulunur. Burada a ve \dot{a} gecikmeli t_r anında hesaplanmışlardır, fakat bunları *şimdiki* t anında yazmak kolaydır:

$$a(t_r) = a(t) + \dot{a}(t)(t_r - t) + \dots = a(t) - \dot{a}(t)T + \dots = a(t) - \dot{a}(t)\frac{d}{c} + \dots \quad (9.143)$$

Bu t zamanındaki ifade şöyle olur:

$$\vec{F}_{\text{self}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a(t)}{4c^2d} + \frac{\dot{a}(t)}{3c^3} + \left(\frac{1}{c}\right)d + \dots \right] \hat{i} \quad (9.144)$$

Birinci terim yükün ivmesiyle orantılıdır; bunu denklemin sol tarafına alırsak, halterin kütlesine eklenen bir terim olur. Bu durumda, yüklü halterin eylemsizlik kütlesi şöyle tanımlanır:

$$m = 2m_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4dc^2} \quad (9.145)$$

Burada m_0 halter toptarından birinin kütlesidir. Görelî mekanikte, yükler arasındaki itici elektriksel kuvvetin kütleyi artırıyor olması doğaldır. Çünkü bu sistemin potansiyel enerjisi (statik durumda)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q/2)^2}{d} \quad (9.146)$$

olduğundan, Einstein'ın $E = mc^2$ formülüne göre, bu enerji cismin kütlesini artırır.

(9.144) denklemindeki ikinci terim aradığımız radyasyon tepkisidir:

$$F_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{3c^3} \dot{a} \quad (9.147)$$

$d \rightarrow 0$ limitinde (kütle terimini saymazsak) sadece bu terim sıfırdan farklı kalır. Fakat bu ifade Abraham-Lorentz formülünden 2 çarpanıyla farklıdır. Durun bakalım: bu kuvvet halter toptarından birinin diğerine uyguladığı kuvvetti— "ara" indisini bunun için kullandım. Her topun *kendi kendine* uyguladığı kuvveti katmadık. Bunu da hesaba katarsak (bkz. Problem 9.31) sonuç bulunur:

$$F_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{3c^3} \dot{a} \quad (9.148)$$

Bu, Abraham-Lorentz formülüdür. *Sonuç: Radyasyon tepki kuvveti yükün kendi üzerine uyguladığı kuvvettir—veya, daha ayrıntılı söylesek, yük dağılımının farklı kısımlarının oluşturduğu alanların uyguladığı net kuvvettir.*

Problem 9.31 (9.147) denkleminden (9.148) formülüne geçmek için şu yolu izleyin:

(a) Herbir halter topunun kendi üzerindeki radyasyon tepki kuvvetini Abraham-Lorentz formülüyle hesaplayın, (9.147) terimine ekleyin ve (9.148) formülünü elde edin. (Bu yöntem, aranan Abraham-Lorentz formülünü baştan kullandığı için, hoş değildir.)

(b) Toplam yükü hareket doğrultusuna dik L uzunluğunda bir çubuk olarak alın; böylece $\lambda = q/L$ olur. Her iki tarafta dy_1 ve dy_2 uzunluktaki tüm çiftlerin birbirine uyguladığı kuvvetleri (9.147) formülüyle hesaplayıp toplayın. (Bir uçta $q/2 \rightarrow \lambda dy_1$ ve diğer uçta $q/2 \rightarrow \lambda dy_2$ olur.) Aynı çifti birden fazla saymamaya dikkat edin.

BÖLÜM 9 ÜZERİNE EK PROBLEMLER

Problem 9.32 R yarıçaplı yalıtkan halka üzerinde boyca yük yoğunluğu $\lambda = \lambda_0 |\sin(\theta/2)|$ olarak veriliyor. Halka kendi eksenî etrafında ω açısal hızıyla döndürülüyor. Halka merkezindeki skaler ve vektör potansiyelin tam çözümünü bulun.

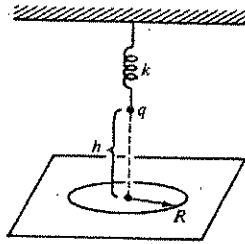
$$\left(\text{Yanıt: } \vec{A} = -\frac{\mu_0 \lambda_0 \omega R}{3\pi} \left\{ \sin[\omega(t - R/c)] \hat{i} + \cos[\omega(t - R/c)] \hat{j} \right\} \right)$$

- Problem 9.33** (a) Üçüncü ve dördüncü Maxwell denklemlerinin rotasyonelini alarak, \vec{E} ve \vec{B} alanlarının homojen olmayan dalga denklemini sağladıklarını gösterin.
- (b) Homojen olmayan dalga denklemini çözümünün (9.8) ifadesi olduğunu biliyoruz. Buna göre, \vec{E} ve \vec{B} 'yi ρ ve \vec{J} cinsinden ifade eden genel formülleri yazın.
- (c) Statik durumda bu ifadelerin Coulomb yasası ve Biot-Savart yasasına dönüştüğünü gösterin.

$$\left(\text{Yanıt: } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[-\epsilon_0\mu_0\vec{J} - \vec{\nabla}\rho](\vec{r}', t_r)}{R} d\tau; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{\nabla} \times \vec{J}](\vec{r}', t_r)}{R} d\tau \right)$$

Problem 9.34 Şek. 2.35'te elektrostatiğin temel denklemleri, kaynak (ρ), alan (\vec{E}) ve potansiyel (V) arasındaki bağıntılarla, bir diyagram halinde gösterilmiştir. Şek. 5.46 'da aynı diyagram magnetostatik için, \vec{J} kaynağı, \vec{B} alanı ve \vec{A} potansiyeli arasındaki bağıntıları gösteriyordu. Elektrodinamikte benzer bir diyagram kurun: kaynaklar (ρ ve \vec{J}), alanlar (\vec{E} ve \vec{B}) ve potansiyeller (V ve \vec{A}) arasındaki bağıntıları, Lorentz ayar koşuluyla birlikte gösterin. Problem 9.33 sonuçlarını da kullanın, fakat V ile \vec{A} 'nın \vec{E} ve \vec{B} cinsinden yazıldığı formülleri katmayın.

Problem 9.35 m kütleli ve q yüklü bir parçacık, kuvvet sabiti k olan tavana asılı bir yayın ucuna bağlanmıştır (Şek. 9.27). Denge konumu yerden h yüksekliktedir. Yük denge konumundan d kadar aşağı çekilip $t = 0$ anında bırakılıyor.



Şekil 9.27

- (a) Radyasyon yaklaşıklığında (yani, $d \ll \lambda \ll h$) zemine ulaşan radyasyon şiddetini, q yükünün tabandaki izdüşüm noktasından R uzaklığının fonksiyonu olarak bulun. (Not: Şiddet, zeminin birim yüzeyine düşen ortalama güçtür.) Hangi R değerinde şiddet maksimum olur? (Salıncının radyasyon sönümünü yok sayın.)
- (b) Formülünüzü kontrol etmek için, zeminin boyutlarını sonsuz varsayın ve üzerine düşen toplam gücü hesaplayın. Sonuç beklediğiniz gibi midir?
- (c) Radyasyon yoluyla enerji kaybeden salıncının genliği giderek azalacaktır. Genliğin d/e değerine azalması için geçen τ süresi ne kadardır? (Bir periyotta kaybedilen toplam enerjinin küçük olduğunu varsayın.)

$$\left(\text{Yanıt: } I(R) = \left(\frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{R^2 h}{(R^2 + h^2)^{5/2}} \right)$$

Problem 9.36 Yerkürenin magnetik kuzey kutbu coğrafi kuzey kutbuyla tam çakışık olmayıp 11° kadar açı yapmaktadır. O halde, sabit dönme eksenine göre, yerkürenin dipol moment vektörü zaman içinde değişmektedir ve magnetik dipol radyasyonu yaymalıdır.

PROBLEMLER

- (a) Toplam radyasyon gücü ifadesini şu parametreler cinsinden bulun:

Ψ	(coğrafi ve magnetik kutuplar arasındaki açı)
M	(yerkürenin magnetik dipol momentini)
ω	(yerkürenin kendi ekseninde açışal hızı)

(b) Yerkürenin ekvatordaki magnetik alan şiddeti $\frac{1}{2}$ gauss olduğuna göre, M magnetik dipol momentini hesaplayın.

(c) Toplam radyasyon gücünü watt biriminde hesaplayın.

(d) Pulsar adı verilen nötron yıldızlarının yaklaşık 10 km yarıçaplı olup 10^{-3} s periyotla döndükleri ve yüzeylerinde magnetik alan şiddetinin 10^8 T kadar olduğu sanılmaktadır. Böyle bir yıldızın toplam radyasyon gücü ne kadar olur? (Yanıtlar: (c) 4×10^{-5} W; (d) 2×10^{36} W)

Problem 9.37 q_1 yüklü bir parçacık orijinde hareketsizdir. Yükü q_2 olan diğer bir parçacık x -ekseni boyunca şöyle bir hareket yapıyor:

$$x(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}$$

(Bu harekette parçacık $t = 0$ anında orijine en yakın olduğu b noktasına gelir ve sonsuza geri döner.)

- (a) q_1 yükünün t anında q_2 'ye uyguladığı F_2 kuvveti ne olur?
- (b) q_1 yükünün t anında q_2 'ye uyguladığı toplam impuls ($I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_2 dt$) ne olur?
- (c) q_2 yükünün t anında q_1 'e uyguladığı kuvvet ne olur?
- (d) q_2 yükünün t anında q_1 'e uyguladığı toplam impuls ($I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1 dt$) ne olur? (Bu integrali almadan önce Problem 9.17'ye bir göz atmak yararlı olur.) [Yanıt: $I_2 = I_1 = -q_1 q_2 / (4\epsilon_0 bc)$]

Problem 9.38 Elektriksel olarak nötr olan yz düzleminde düzgün fakat zamana bağımlı bir yüzey akım yoğunluğu $\vec{K} = K(t)\hat{k}$ olarak veriliyor.

- (a) Şu iki akım yoğunluğu için, düzlemden x yükseklikte elektrik ve magnetik alanı bulun:

$$(i) \quad K(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ K_0 & (t > 0) \end{cases} \quad (ii) \quad K(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ \alpha t & (t > 0) \end{cases}$$

- (b) Gecikmeli vektör potansiyelin

$$\vec{A}(x, t) = \frac{\mu_0 c}{2} \int_0^\infty K(t - x/c - u) du$$

şeklinde yazılabileceğini gösterin ve buradan \vec{E} , \vec{B} alanlarını bulun. Birim yüzeyden yayılan toplam radyasyon gücünün

$$\frac{\mu_0 c}{2} [K(t)]^2$$

olduğunu gösterin.

! Problem 9.39 (a) Bir doğru üzerinde herhangi bir hızla hareket eden parçacık üzerindeki radyasyon tepkisini, Kısım 9.3.2'deki düşünce yöntemiyle, fakat $v(t_r) = 0$ olduğunu varsaymadan, bulun.

$$\left(\text{Yanıt: } F_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 \left(\dot{a} + \frac{3\gamma^2 a^2 v}{c^2} \right) \right)$$

(b) Bu sonucun parçacığın toplam radyasyon gücü [(9.121) formülü] ifadesiyle tutarlı olduğunu gösterin.

! **Problem 9.40** (a) $x(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}$ hareketi yapan bir parçacık radyasyon yayınlar mı? Güç hesabı için (9.121) tam formülünü kullanın.)

(b) Bu hareketi yapan bir parçacık üzerinde radyasyon tepkisi oluşur mu? (Tepki kuvvetini hesaplamak için Problem 9.39'daki tam formülü kullanın.)

Yorum: Bu meşhur sorular görelilik teorisinin temelindeki Eşdeğerlik İlkesinin anlaşılmasında önemli rol oynamışlardır. bkz. R. Peierls, *Surprises in Theoretical Physics* (Princeton University Press, 1979); T. Fulton ve F. Rorlich, *Annals of Physics* 9, 499 (1960).

10

GÖRELİ ELEKTRODİNAMİK

10.1 ÖZEL GÖRELİLİK TEORİSİ

10.1.1 Einstein Postülatları

Aristoteles'in öğretisinde, kendi haline bırakılan bir cismin duracağı belirtilmişti. Sanıyorum, bundan daha akla ve deneyimlere uygun bir fizik yasası bulunamaz. Masa üzerinde ittiğim bir blok, elimi çektiğim zaman durur. Fakat bilimsel gelişme bazan apaçık ortada olan şeyi sorgulamakla olur. Galileo blok yüzeyini parlattığımızda daha uzağa gidebildiğini farketti. Ayrıca, masanın kendisi hareketli ise, bloğun sonunda yere göre değil masaya göre durduğunu gözledi. Galileo buradan giderek, bloğun durmasının masa ile blok arasındaki sürtünmeden kaynaklandığı sonucuna vardı—yüzeyleri parlatarak tüm sürtünmeyi yok edebilirsek, bloğun hiç durmadan gideceğini ileri sürdü. Newton bu düşünceyi birinci hareket yasası olarak aldı. Aristoteles'in düşüncesi yanlış: Kendi haline bırakılan cisimler durmazlar—hareketi sürdürürler. Pratikte mutlaka biraz sürtünme vardır; fakat bu sürtünme cismi "mutlak durgun" yapmaz, sürtündüğü yüzeye göre durgun yapar.

Galileo'nun bu düşüncesi daha derin bir soruya götürüyor: Cisimlerin "mutlak durgun" oldukları bir durum var mıdır, yoksa daima başka bir cisme göre durgunluktan mı söz edebiliriz? Aristoteles'in düşündüğü gibi, fizik yasaları mutlak bir referans sisteminin varlığını öngörüyor mu, yoksa hareketli bir referans sisteminde çalışabilir miyiz? Bir bilardo masasını bir vagona yüklediğimizi düşünelim (rayların sürtünmesiz ve tren hızının sabit olduğunu varsayalım). Vagon içindeki bilardo oyununu gözleyerek trenin hareket halinde olup olmadığını tayin edebilir miyiz? Veya, oyuncular atış yaparken trenin hareketini hesaba katarlar mı, yoksa normal bir oyun mu sürdürürler?

Önce, bilardo topunun trene göre u' hızıyla ileri yönde atıldığını ve trenin yere göre hızının da v olduğunu varsayalım. Buna göre, topun yere göre hızı (klasik mekaniğe göre)

$$u = u' + v \quad (10.1)$$

olur. Sürtünmeyi yok sayarsak, Newton'un birinci hareket yasası şunu verir:

$$u = \text{sabit}$$

Trenin hızı da sabit kalıyorsa

$$u' = \text{sabit}$$

olur. Yani, Newton'un birinci yasası hem yere bağlı sistemde ve hem de trene bağlı sistemde geçerlidir. Sayısal hız değerleri elbette farklı olacaktır (top trene göre 20 km/saat hızla ve yere göre 110 km/saat hızla gidiyor olabilir), fakat hareketi veren *fiziksel yasa* (hızın sabit oluşu) her iki sistemde aynıdır. O halde, masada yuvarlanan bir topa bakarak trenin hareket halinde olup olmadığını söyleyemeyiz. Buna karşılık, tren *ivmeleniyorsa* bunu hemen farkederiz: top yavaşlar gibi olur veya, tren bir virajı dönüyorsa, eğri bir yörünge izler—kendiniz de yana savrulduğunuzu hissedersiniz. Newton'un birinci yasasının geçerli olduğu *ivmelenmeyen referans sistemlerine eylemsiz referans sistemi* adı verilir.



Şekil 10.1

Madem ki serbest hareket eden cisimler “mutlak durgun” sistemi bulmamıza yardımcı olamıyorlar, acaba etkileşen cisimler işe yarar mı? Örneğin, tren içindeki masada A topu ile B topunun kafa-kafaya çarpıştığını düşünelim (Şek. 10.1). Çarpışmanın esnek olduğunu kabul edersek, ilk ve son kinetik enerji eşit olur. Fakat kütleleri eşit almayalım; hatta çarpışma sırasında A'nın kütlesinden birazı B üzerine yapışıyor olabilir. Böylece, çarpışma sonunda ayrılan C ve D toplarının kütleleri A ve B'den farklı olabilir. Fakat toplam kütle değişmez:

$$m_A + m_B = m_C + m_D \quad (\text{kütle korunumu}) \quad (10.2)$$

Çarpışma momentum ve enerjinin korunduğu bir etkileşimdir:

$$m_A u_A + m_B u_B = m_C u_C + m_D u_D \quad (\text{momentum korunumu}) \quad (10.3)$$

$$\frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 = \frac{1}{2} m_C u_C^2 + \frac{1}{2} m_D u_D^2 \quad (\text{enerji korunumu}) \quad (10.4)$$

Böylece, kütleleri ve başlangıçtaki hızları ölçersem, son hızları bulabilirim. Korunum yasalarını yerdeki gözlemciye göre yazdım, çünkü mekanik yasalarının bu sistemde geçerli olduğunu biliyorum. Peki, trendeki referans sistemine göre korunum yasaları geçerli olur mu? Yanıt evettir; gerçekten de (10.1) formülünü (10.3) denkleminde kullanırsak

$$m_A(u'_A + v) + m_B(u'_B + v) = m_C(u'_C + v) + m_D(u'_D + v)$$

ve (10.2) kütle korunumuyla v'li terimleri elersek

$$m_A u'_A + m_B u'_B = m_C u'_C + m_D u'_D$$

olup, trendeki sisteme göre momentumun korunduğunu gösterir. (Enerjinin de korunduğunu göstermeyi size bırakıyorum.) O halde, enerji ve momentum yere göre korunuyorsa, trendeki sisteme göre de korunmalıdırlar—yine sayısal değerler değişik olabilir, fakat fizik yasaları aynıdır.

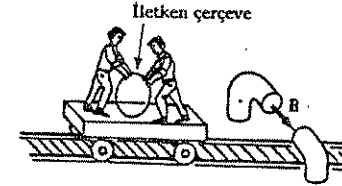
Gerçekte tüm klasik mekanik yasaları, “durgun” sistemde olduğu gibi, sabit hızla hareket eden (eylemsiz) sistemlerde de geçerlidirler. Burada “durgun” terimini tırnak içine aldım, çünkü klasik mekanikte belli bir eylemsiz referans sisteminin gerçekten durgun olup olmadığını bilemiyoruz, yani mutlak durgun bir sistem yoktur. Bunu şöyle ifade edebiliriz:

Klasik mekanik yasaları tüm eylemsiz referans sistemlerinde geçerlidirler.

Buna Galileo görelilik ilkesi denir. Einstein'dan çok önce bilinen bu ilke, Copernic'in gezegenler teorisini doğrulamakta kullanılmıştır. (Copernic'e karşı çıkanlar Dünya'nın hareketli olması gerektiğini, aksi takdirde düşen bir cismin dimdik inmek yerine, Dünya'nın hareketinin gerisinde kalıp eğri bir yörüngeyle düşeceğini ileri sürüyorlardı. Galileo'nun, hareketli bir geminin direğinden bir taş bırakarak bu düşüncüyü çürüttüğü söylenir. Taş, durgun bir gemide olduğu gibi, direğin dibine düşer. Taşın yere dimdik düşüyor olması, deney yaptığımız sistemin hızı hakkında bilgi vermez; ancak *ivmelenen* bir sistemde taş eğri bir yörüngeyle düşer.)

O halde, klasik mekanik söz konusu ise, konum ve hızları yere göre veya trene göre belirtmek fark etmez; fizik yasaları her ikisinde de geçerlidir. Peki elektrodinamikte durum nasıldır? Burada da aynı serbestliğe sahip miyiz? İlk bakışta yanıtın hayır olacağı görünüyor. Örneğin, hareketli bir yük magnetik alan oluşturur, durgun yük oluşturmaz. Trende giden

bir yük, yerdeki gözlemciye göre magnetik alan oluşturur, fakat trendeki gözlemci elektrodinamik yasalarını kendi sisteminde uyguladığında magnetik alanın olmayacağını söyler. Diğer bir çok elektrodinamik yasası (örneğin, Lorentz kuvveti ve Biot-Savart yasası) ifadelerinde yükün hızı açıkça yer alır. O halde klasik elektromagnetik teori, hızların ölçülmesi gereken mutlak durgun bir referans sistemi olduğunu kabul ediyor gibidir.



Şekil 10.2

Ama öyle bir etki vardır ki bu düşüncüyü kökünden sarsar. Tren içinde iletken bir çerçeve olduğunu ve trenin dev bir mıknatısın kutupları arasından geçtiğini varsayalım (Şek. 10.2). Mıknatısın kutupları arasından geçen çerçevede hareketten kaynaklanan bir emk oluşur [(7.13) denklemi]:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Bu emk'nın trenle birlikte hareket eden çerçevedeki yüklere uygulanan magnetik kuvvetten kaynaklandığını biliyoruz. Öte yandan, trendeki bir gözlemci kendi sisteminde elektrodinamik yasalarını nasıl uygular? Bu sistemde çerçeve hareketsiz olduğundan gözlemci magnetik kuvvet beklemeyecektir. Fakat, yerdeki mıknatıs yanından geçerken magnetik akının değiştiğini gözleyecek ve, Faraday yasasına göre, oluşan elektrik alanından kaynaklanan bir indüksiyon emk'sı ölçecektir. Bundan kaynaklanan emk, (7.14) denkleminde göre

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

olur. Faraday yasasından veya hareketten kaynaklanan emk aynı olduğundan, trendeki gözlemcinin fiziksel yorumu yanlış olduğu halde doğru yanıtı bulacaktır.

Gerçekten böyle mi? Einstein bunun bir rastlantı olduğuna inanamıyordu. Bu olayı, mekanik olaylar gibi elektromagnetik olayların da görelilik ilkesine uyacağını bir ipucu olarak algıladı. Ona göre, trendeki gözlemcinin düşünce yöntemi yerdeki kadar geçerli olmahydı. Eğer bu iki gözlemcinin yorumları farklı (biri magnetik kuvvet, diğeri elektrik alan) oluyorsa, varsın olsun; *öngördükleri* sonucun aynı olması yeterlidir. Einstein 1905'de Görelilik Teorisini açıklayan makalesinin ilk sayfasında şöyle yazıyordu:

Hareketli Cisimlerin Elektrodinamiği Üzerine A. Einstein

Günümüzde anlaşıldığı şekliyle Maxwell elektrodinamiği, hareketli cisimlere uygulandığında, olaya özgün olmayan asimetrilere yol açmaktadır. Örneğin, bir mıknatıs ile iletken bir çerçeveye bakalım. Burada gözlenen etki sadece mıknatıs ve çerçevenin görelî hareketine bağlıdır; oysa günümüzdeki bakış açısına göre, bu iki cisimden hangisinin hareketli oluşuna göre, farklı bir açıklama yapılmaktadır. Eğer mıknatıs hareketli ve çerçeve durgun ise, mıknatıs çevresinde bir elektrik alan oluşur... çerçevenin bulunduğu yerde akıma yol açar. Fakat mıknatıs durgun ve çerçeve hareketli ise, mıknatıs çevresinde elektrik alan oluşmaz. Buna rağmen çerçevede bir emk gözlenir... buna bağlı olarak, birinci durumdakine eşit bir akım gözlenir.

Bu tür örnekler, Dünya'nın "ışık ortamı" denilen sisteme göre hareketini bulmak için yapılan girişimlerin başarısız oluşuna eklenirse, mekanik gibi elektrodinamik olaylarının da mutlak durgunluk kavramına dayalı özellikleri olmadığını düşündürmektedir.

Einstein'dan önceki bilim adamlarına göre her iki emk'nın eşit oluşu bir rastlantıydı— gözlemcilerden birinin yorumunun doğru ve diğerinin yanlış olduğuna kuşku duymuyorlardı. Mutlak durgun bir sistemin varlığına inanıyor veya görellilik ilkesini reddediyor değillerdi. Sadece, o zamanki görüşe göre, esir denilen ve tüm evreni kaplayan görünmez bir maddenin gerilme ve genlemeleri (stress, strain) elektrik ve magnetik alanları oluşturuyordu. Bu nedenle, bir yükün hızı esire göre ölçüldüğünde elektrodinamik yasaları geçerli olurdu. Trendeki gözlemcinin yorumu yanlış, çünkü esire göre hareket ediyordu. Ama durun bakalım: Yerdeki gözlemcinin esire göre hareket edip etmediğini nereden biliyoruz? Böylece esir referans sistemini bulmak önem kazanıyordu, aksi takdirde tüm hesaplar yanlış olacaktı.

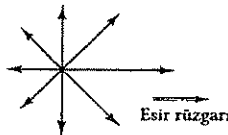
Biraz düşünersek, yeryüzünün esire göre durgun olamayacağını anlarız. Dünya kendi eksenini çevresinde ve Güneş çevresinde dairesel hareket yapmakta, Güneş sistemi de galaksi çevresinde hareket etmektedir. Bunun sonucu yerdeki bir gözlemcinin esire göre yaklaşık 50 km/s hızla gittiğini söyleyebiliriz. Fırtınalı havada giden bir motosikletli gibi, sürekli bir esir rüzgarı içinde yaşamaktayız; veya, Dünya kendi çevresindeki esiri de birlikte sürüklediği için şanslıyız.

O halde sorun, esire göre hareketimizi tayin etmek, "esir rüzgarı"nın hızını ve yönünü bilmeye gelip dayanıyor. Bunu nasıl yaparız? İlk bakışta herhangi bir elektromagnetik deneyin bu işi göreceği düşünülebilir: Maxwell denklemleri esir referans sistemine göre geçerliyse, deneyle hesap arasındaki fark esir rüzgarından kaynaklanıyor demektir. Ne yazık ki, ondokuzuncu yüzyıl fizikçilerinin gördüğü gibi, böyle bir farklılık v^2/c^2 mertebesinde olur; v Dünya'nın esire göre hızıdır. O halde, yapılacak deney oldukça duyarlı olmalıdır.

Öte yandan, klasik elektromagnetik teoremin öngördüğü sonuçlardan biri de elektromagnetik dalgaların boşlukta, esire göre

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

ışık hızıyla yayıldıklarıdır. O halde, değişik doğrultularda ışık hızını ölçerek esir rüzgarına göre hızımızı bulabiliriz. Nehirde giden bir kayıkta olduğu gibi, rüzgar yönünde gittiğimizde ışık hızı maksimum, ters yönde gittiğimizde ise minimum olmalıdır (Şek. 10.3). Bu deney düşüncesi çok basit olduğu halde, ışık hızı çok büyük olduğundan, uygulaması biraz zordu. Nitekim Michelson ve Morley adındaki fizikçiler olağanüstü duyarlılıkta bir optik interferometre kullanarak bu deneyi yaptılar. Burada deneyin ayrıntılarına girmek istemiyorum, çünkü dikkatinizi önemli şu iki noktaya yöneltmenizi istiyorum: (1) Michelson ve Morley'in tüm amacı farklı doğrultulardaki ışık hızlarını karşılaştırmaktı; (2) buldukları sonuç ise, ışık hızının her doğrultuda aynı değerde olduğuydu.



Şekil 10.3

Bugün öğrencilere esir modelinin ne kadar saçma olduğunu öğretiyoruz; ama o zamanlar böyle bir sonucun nasıl karşılandığını düşünmek gerekir. Diğer tüm dalgalar (su dalgaları,

ses dalgaları veya gerili teldeki dalgalar) bulundukları ortama göre belirli bir hızda ilerlemektedirler; bu ortam gözlemciye göre hareket ediyorsa, dalganın net hızı gidiş yönüne bağlı olarak daha az veya daha çok olmaktadır. Michelson-Morley deneyinden sonra geçen 20 küsur yılda bu deneyin başarısız oluşunu açıklamaya yönelik birçok düşünce ileri sürüldü. Michelson ve Morley Dünya'nın esiri birlikte sürüklediğini düşünüyorlardı. Diğer bazı teoriler Maxwell denklemlerinde değişiklik öneriyorlardı. Tüm bunların doğru olmadığı diğer gözlemlerle (özellikle, güneş sistemi dışından gelen ışığı kullanan deneylerle) ortaya kondu.

Sonunda, bu deney sonucunu kabullenen tek kişi olan Einstein ışık hızının, gözlemci veya kaynağın hızına bakılmaksızın tüm doğrultularda aynı olan evrensel bir sabit olduğunu ileri sürdü. Esir rüzgarı oluşmuyordu, çünkü esir yoktu. Maxwell denklemleri eylemsiz her referans sisteminde geçerlidir ve bir yükün hızı, varolmayan mutlak esir sistemine göre değil, eylemsiz bir referans sistemine göre ölçülmelidir.

Böylece, deneysel kanıtları (Michelson-Morley deneyi) ve teorik ipuçlarını (elektrodinamik yasalarının "yanlış" sistemde doğru sonuç vermesi) birleştiren Einstein meşhur iki postülayı öne sürdü:

1. Görellilik ilkesi. Fizik yasaları tüm eylemsiz referans sistemlerinde geçerlidir.
2. Evrensel ışık hızı. Boşlukta ışık hızı, kaynak veya gözlemcinin hızına veya varsayılan bir ortama bakılmaksızın, tüm eylemsiz gözlemcilere göre aynıdır.

Özel görellilik teorisi bu iki postüladan yola çıkar. Birinci postüla, Galileo'nun mekanik için bulduğu gözlemi, tüm fizikte geçerli bir yasa statüsüne çıkarır. Buna göre, mutlak referans sistemi yoktur. İkinci postüla, Michelson-Morley deneyine Einstein'ın yanıtı gibidir. Görellilik ilkesi yıllar öncesinden biliniyordu, fakat ışık hızının evrensel oluşu günlük sezgilerimize uymayan tümüyle radikal bir düşünce oldu. Örneğin, 60 km/saat hızla giden bir trende öne doğru 5 km/saat hızla yürüdüğümde, yere göre net hızım 65 km/saat olacaktır. Benim (A) yere (C) göre hızım, trene (B) göre hızımla trenin yere göre hızının toplamı olur:

$$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC} \quad (10.5)$$

Oysa, A bir ışık sinyali ise, Einstein'a göre bunun yere göre veya trene göre hızı aynı olmalıdır:

$$v_{AC} = v_{AB} = c \quad (10.6)$$

Galileo hız toplama kuralı denilen yukardaki (10.5) ifadesi görelliliğin ikinci postülasıyla çelişmektedir. Daha sonra göreceğimiz gibi, doğru kural Einstein hız toplama kuralıdır:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + \frac{v_{AB}v_{BC}}{c^2}} \quad (10.7)$$

Normal hızlarda ($v_{AB} \ll c$, $v_{BC} \ll c$), payda o kadar 1'e yakın olur ki Galileo kuralıyla Einstein kuralı arasındaki fark yok sayılabilir. Ama Einstein kuralı ikinci postülanın istediği özelliğe sahiptir; nitekim $v_{AB} = c$ olduğunda,

$$v_{AC} = \frac{c + v_{BC}}{1 + \frac{cv_{BC}}{c^2}} = c$$

bulunur. Peki, en basit uzay geometrisine dayanan Galileo kuralı neden yanlıştır? Eğer yanlışsa klasik fiziğin hali ne olacaktır? Birinci soruya görellilik teorisinin yanıtı, uzay ve

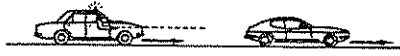
zaman kavramlarımızın değişmesi gerektiğidir. Buna bağlı olarak hız, momentum, enerji gibi kavramlar da değişecektir. Einstein klasik elektrodinamikten yola çıkarak görelilik teorisini geliştirdi, ama bunun sonuçları tüm fizik dallarını, uzay ve zaman arenasında olan biten herşeyi kapsar. İkinci postüla ışık hızından sözettiği halde, göreliliğin ışıkla özel bir ilgisi yoktur. Işık hızıyla giden diğer parçacıklar (nötrinolar, belki de gravitonlar) için, veya henüz keşfedilmemiş fiziksel olaylar için dahi görelilik ilkesi geçerli olacaktır. Kant yaşıyaydı, göreliliğin "gelecekteki fiziğin prolegomenonu" olduğunu söylerdi.

Problem 10.1 (a) $v_{AB} = 5$ km/saat, $v_{BC} = 60$ km/saat olduğunda, Einstein hız toplama kuralı yerine Galileo kuralı kullanmış olsak, sonuç yüzde kaç hatalı olurdu?

(b) $\frac{3}{4}c$ hızıyla giden bir trende ileri doğru $c/2$ hızıyla koşuyor olsaydınız, yere göre hızınız ne kadar olurdu?

(c) (10.7) denklemini kullanarak, $v_{AB} < c$ ve $v_{BC} < c$ ise, $v_{AC} < c$ olacağını ispatlayın. Bu sonucu irdeleyin.

Problem 10.2 Bir arabada $\frac{3}{4}c$ hızıyla kaçan hırsızların peşinden $\frac{1}{2}c$ hızıyla kovalayan polisler ateş açıyorlar (Şek. 10.4). Merminin tabancaya göre hızı $\frac{1}{3}c$ dir. (a) Galileo'ya göre, (b) Einstein'a göre, mermi hedefe ulaşır mı?



Şekil 10.4

10.1.2 Göreliliğin Geometrisi

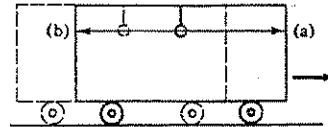
Bu kısımda hayali bazı deneyler üzerinde Einstein postülalarının en çarpıcı geometrik sonuçlarını ele alacağız: bunlar zaman genişlemesi, Lorentz boy kısalması ve eşzamanlılığın göreliliği. Aynı sonuçları daha sonra Lorentz dönüşümü ile sistematik olarak elde edeceğiz.

(i) **Eşzamanlılığın göreliliği.** Yatay ve sürtünmesiz raylar üzerinde sabit hızla giden bir tren vagonu düşünelim (Şek. 10.5). Vagonun tam ortasında ve tavanında bir lamba asılıdır. Düğme açıldığında ışık her yöne c hızıyla yayılır. Lamba iki uca eşit uzaklıkta olduğundan, trendeki bir gözlemci ışığın ön ve arka duvara aynı zamanda geldiğini ölçer. Bu iki olay, yani (a) ışığın ön duvara gelişi ve (b) ışığın arka duvara gelişi, *eşzamanlı* iki olaydır. Fakat, *yerdeki* bir gözlemciye göre bu iki olay eşzamanlı *değildir*. Çünkü ışık lambadan yola çıktığında, trenin hareketinden dolayı, arka duvara giden ışık ön duvara gidenden daha kısa bir yol alır (Şek. 10.6). O halde, yerdeki gözlemciye göre (b) olayı (a) olayından daha önce olur. *Sonuç:*

Eylemsiz bir referans sisteminde eşzamanlı olan iki olay, başka bir sistemde genel olarak eşzamanlı değildir.



Şekil 10.5



Şekil 10.6

Bu, klasik fizikte hiç akla gelmeyecek göreliliği bir sorundur ve Einstein'ın ikinci postülasından kaynaklanır. Bu etkinin gözlenebilmesi için elbette tren oldukça hızlı gidiyor olmalıdır.

10.1. ÖZEL GÖRELİLİK TEORİSİ

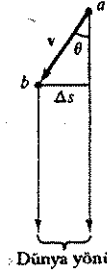
Eşzamanlık deyince ne anladığımıza dikkat etmeliyiz. Örneğin, şimşek çaktıktan kısa bir süre sonra gökgürültüsünü duyan saf bir gözlemci, ışık kaynağı ile ses kaynağının eşzamanlı olmadığını sanabilir. Fakat bu kolay açıklanabilecek bir hata olup, hareketli gözlemciler veya görelilikle bir ilgisi yoktur. Gözlem sırasında sinyalin (ses, ışık, posta güvercini, vb. nin) size ulaşması için gerekli süreyi de hesaba katmalısınız. Burada "gözlemci" terimi bu düzeltmeyi yapabilen kişi, ve "gözlem" de zaman düzeltmesi yapılmış olaydır. O halde, *görülen şey gözlenen şey değildir*. Bir fotoğraf makinasıyla gözlem yapılmaz—olay bittikten ve tüm veriler alınıp düzeltildikten sonra gözlem olur. Örneğin, akıllı bir gözlemci olay bölgesinin her yerine yardımcıları gönderip, onlara kendi kronometresiyle senkronize edilmiş kronometreler verir. Böylece, olay yerindeki yardımcı kendi kronometresiyle ölçümü yapar ve merkezdeki gözlemciye gönderir. Gözlemci, sinyalin kendisine ulaşması için geçen zamanı da hesaba katarak gerekli düzeltmeyi yaptıktan sonra gözlem yapılmış demektir.

Problem 10.3 Bir doğru üzerinde 1 milyon km aralıklarla eşzamanlı kronometreler konulmuştur. Yanbaşımızdaki kronometre saat öğle 12 'yi gösterdiği anda

(a) Doğru üzerindeki 90. kronometrede saat kaç *görürsünüz*?

(b) Bu 90. kronometredeki saatin kaç olduğunu *gözlemlersiniz*?

Problem 10.4 New York Times gazetesinde yaklaşık her iki yılda bir, ışık hızından daha hızlı giden bir cisim gözlemlendiği bildirilen makaleler çıkar. Bu iddiaların çoğu, *görülen* ile *gözlenen* arasındaki farkı bilmemekten kaynaklanır. İşte bir örnek:



Şekil 10.7

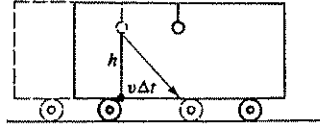
Bir yıldız bakış açımızla θ açısı yapacak şekilde v hızıyla hareket etmektedir (Şek. 10.7). Yıldızın gökyüzünde görünür hızı ne kadardır? (b noktasındaki ışık sinyalinin Dünya'ya a 'dakinden Δt kadar zaman önce ulaştığını, bu süre içinde yıldızın Δs yolu aldığını düşünürsek, "görünür hız" $\Delta s/\Delta t$ olur.) Görünür hızı maksimum yapan θ açısı ne olur? $v < c$ olsa bile, görünür hızın c den kat kat büyük olabileceğini gösterin.

(ii) **Zaman genişlemesi.** Şimdi trendeki lambadan çıkan bir ışık ışını dümdük aşağı inip vagon zeminine çarpsın. *Soru:* Işık bu yolu ne kadar sürede alır? Trendeki gözlemciye göre hesap kolaydır: Lambanın zeminden yüksekliği h ise

$$\Delta t' = \frac{h}{c} \quad (10.8)$$

olur (trende yapılan gözlemleri üslü (') göstereceğim). Öte yandan, yerdeki bir gözlemciye göre, tren hareketli olduğundan, bu ışın zemine ulaşmak için daha uzun bir yol katedecektir. Şek. 10.8'den görüldüğü gibi, bu uzaklık $\sqrt{h^2 + (v \Delta t)^2}$ olur. Buna göre,

$$\Delta t = \frac{\sqrt{h^2 + (v \Delta t)^2}}{c}$$



Şekil 10.8

olur ve bu denklem Δt için çözülürse

$$\Delta t = \frac{h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

bulunur. O halde, iki süre arasında şöyle bir ilişki vardır:

$$\Delta t' = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t \quad (10.9)$$

Bu sonuç, aynı iki olay—(a) ışının lambadan çıkışı ve (b) ışının zemine gelişi—arasında geçen zamanın iki gözlemciye göre farklı olduğunu gösterir. Trendeki kronometrede ölçülen $\Delta t'$ zamanı şöyle bir çarpan kadar daha küçüktür:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.10)$$

Sonuç:

Hareketli kronometre yavaşlar.

Bu etkiye zaman genişmesi denir. Bu, kronometrenin mekanizmasından kaynaklanmaz; zaman kavramının özünde olan bir özelliktir ve tüm zamanölçer aygıtları kapsar.

Einstein'in öngörülleri arasında deneysel kanıtı en bol olanı zaman genişmesidir. Temel parçacıkların çoğu kararsız olup, belirli bir ömür sonunda bozunurlar. Nötronun ömrü 15 dakika, müonunki 2×10^{-6} s, yüksüz pionunki ise 9×10^{-17} s dir. Bu değerler, durgun parçacığın ömürleridir. Parçacıklar c ışık hızına yakın hızlarda giderken, laboratuvarda gözlenen ömürleri daha fazla ve dolayısıyla, gittikleri yol daha uzun olur.

Örnek 10.1: Laboratuvarda $\frac{3}{5}c$ hızıyla gitmekte olan bir müon ne kadar süre yaşar?

Çözüm: γ çarpanı hesaplanır:

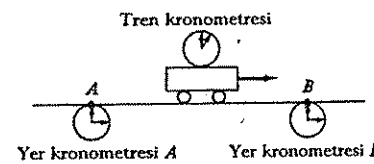
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2}} = \frac{5}{4}$$

Durgun parçacığın ömrü 2×10^{-6} s iken, laboratuvardaki ömrü $5/4$ kez daha uzun olur:

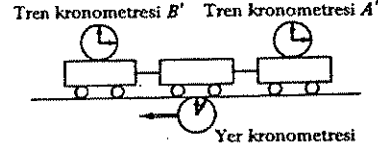
$$\frac{5}{4} \times (2 \times 10^{-6}) \text{ s} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Zaman genişmesinin görellilik ilkesiyle çeliştiği sanılabilir. Nitekim, yerdeki gözlemci trendeki kronometreyi daha yavaş tıklıyor gibi gözlüyorsa, trendeki gözlemci de yerdeki kronometrenin daha yavaş çalıştığını iddia edecektir—çünkü ona göre yer hareketlidir. Kim haklıdır? **Yanıt:** İkisi de haklıdır! Dikkatli bir inceleme bu “çelişki”nin var olmadığını ortaya koyar: Trendeki kronometrenin çalışmasını gözlemek isteyen yerdeki gözlemci raylar

boyunca sıraladığı iki kronometre kullanır (Şek. 10.9); tren A noktasından geçerken oradaki kronometre bir tıklamayı, B noktasından geçerken de oradaki diğer kronometre diğer bir tıklamayı ölçer. Örneğin, trendeki kronometrede geçen süre 3 dakika ise, yerdeki iki kronometrede ölçülen zaman farkı 5 dakika olur. (Yerdeki gözlemci bu iki kronometreyi önceden senkronize etmiş olmalıdır.) Buna göre, yerdeki gözlemci trendeki kronometrenin yavaş çalıştığını gözler.



Şekil 10.9



Şekil 10.10

Öte yandan, trendeki gözlemci de yerdeki bir kronometrenin çalışmasını aynı yöntemle ölçer: Trende senkronize edilmiş iki kronometre sırayla yerdeki kronometrenin yanından geçerken ölçüm yaparlar (Şek. 10.10). Onun ölçümüne göre, yerdeki kronometrede 3 dakika süre geçtiğinde, kendi iki kronometresi arasındaki fark 5 dakika olur. Buradan, yerdeki kronometrenin daha yavaş tıkladığı sonucuna varır. Burada bir çelişki var mıdır?—Hayır, çünkü iki gözlemci farklı şeyleri ölçmüşlerdir. Yerdeki gözlemci, trendeki bir kronometreyi yerdeki iki kronometreyle karşılaştırıyor; trendeki gözlemci ise yerdeki bir kronometreyi trendeki iki kronometreyle karşılaştırmaktadır. Her iki gözlemci de kendilerine göre durgun ve önceden senkronize edilmiş iki kronometre kullandılar. Sorun şuradan kaynaklanıyor: Bir sistemde eşzamanlı olan kronometreler başka bir sistemde eşzamanlı olarak gözlenmezler. Bir gözlemciye göre eşzamanlı olan iki olayın başka bir gözlemciye göre böyle olmayacağını daha önce gördük. O halde, her bir gözlemci kendine göre tutarlı bir şekilde ölçüm yaptığı halde, diğer gözlemcinin referans sisteminde bu ölçüm geçersizdir, çünkü diğer gözlemciye göre eşzamanlı olmayan iki kronometre kullanılmaktadır.

Hareketli kronometreler senkronize olmadıktan, zaman genişmesini test ederken bir tane hareketli kronometre kullanmak gerekir. Hareket eden tüm kronometreler aynı miktarda yavaşlar; fakat siz süreyi birinde başlattıktan sonra diğerine geçip süre sonunu ölçemezsiniz, çünkü bunlar daha baştan size göre eşzamanlı değildi. Yapılacak iş, yol boyunca dizilmiş ve size göre durgun kronometreler kullanmaktır.

Örnek 10.2: İkizler paradoksu. 21 yaşına basan bir astronot roketle binip $\frac{12}{13}c$ hızıyla uzay yolculuğuna çıkıyor. 5 yıl geçtikten sonra roketin yönünü geri çevirip aynı hızla yerdeki kardeşinin yanına dönüyor. Soru: İkizlerin herbirinin yaşı ne olur?

Çözüm: Hareket eden ikiz 10 yıl yaşlanmıştır (5 yıl gidiş, 5 yıl geliş); evine döndüğünde 31. doğumgünü kutlamaya hazırdır. Fakat Dünya'dan yapılan gözleme göre, roket içindeki saat daha yavaş tıklar. γ çarpanı hesaplanırsa

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{12}{13})^2}} = \frac{13}{5}$$

bulunur; yani yerdeki kronometreye göre bu yolculuk $\frac{13}{5} \times 10 = 26$ yıl sürmüştür. Yerdeki ikiz 47 yaşında, yani kardeşinden 16 yaş daha büyüktür! Fakat gençlik formülünü bulduğunuzı sanmayın: astronot ikiz belki kardeşinden daha sonra ölecektir, ama daha fazla yaşamış değildir, sadece daha yavaş yaşamıştır. Uçuş sırasında tüm biyolojik fonksiyonları—metabolizma, nabız, düşünme—kronometresiyle aynı zaman genişmesine tabi olmuşlardır.

Bu olayı hareketli kardeşin bakış açısından anlatmak istediğinizde ikizler paradoksu ortaya çıkar. Ona göre, yerküre $\frac{1}{13}c$ hızıyla uzaklaşmakta, 5 yıl sonra da geri dönmektedir. Onun bakış açısında, kendisi durgun ve kardeşi hareketli olduğundan, buluştukları anda kendisi daha yaşlı olmalıdır. İkizler paradoksu üzerine tonlarca yazı yazılmıştır, ama gerçekte bir paradoks yoktur. İki kardeş eşdeğer konumda değildirler. Astronot kardeşin analizi *yanlıştır*. Hareketli kardeş yolda durup geri döndüğünde *ivmeli* hareket yapmıştır, ve dolayısıyla, eylemsiz bir referans sisteminde değildir—daha açıkçası, giderken bir eylemsiz sistemde, dönerken *diğer* bir eylemsiz sistemdedir. Hareketli ikiz *durgun* bir gözlemci olduğunu iddia edemez, çünkü ivmelenirken durgun kalamazsınız. Hareketli kardeşin bu durumu nasıl doğru hesaplayabileceğini Kısım 10.1.3'te göreceğiz;

Problem 10.5 Bir laboratuvar deneyinde müon parçacığı 800 m yol aldıktan sonra bozunuyor. Müon ömrünün 2×10^{-6} s olduğunu duyan bir öğrenci müon hızının

$$v = \frac{800 \text{ m}}{2 \times 10^{-6} \text{ s}} = 4 \times 10^8 \text{ m/s}$$

yani, ışık hızından daha büyük olduğunu hesaplıyor. Öğrencinin nerede hata yaptığını açıklayın ve müonun gerçek hızını bulun.

Problem 10.6 Bir roket Dünya'dan $\frac{3}{5}c$ hızıyla yola çıkıyor. Roket içindeki bir kronometrede 1 saat süre geçtikten sonra Dünya'ya bir ışık sinyali gönderiliyor.

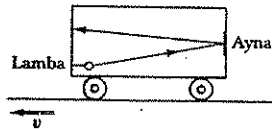
- Dünyadaki kronometreye göre sinyal ne zaman gönderilmiştir?
- Dünyadaki kronometreye göre, roket yola çıktıktan ne kadar sonra sinyal alınır?
- Roketteki gözlemciye göre, roket yola çıktıktan ne kadar sonra sinyal yerine ulaşır?

(iii) **Lorentz kısılması.** Üçüncü hayali deneyimizde vagonun arka duvarında bir lamba ve ön duvarında bir ayna vardır. Böylece, giden ışık sinyali geri gelebilir (Şek. 10.11). Soru: Işık sinyalinin bir gidiş-gelişi ne kadar sürer? Trendeki gözlemciye göre hesap kolaydır:

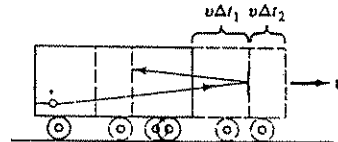
$$\Delta t' = 2 \frac{\Delta x'}{c} \quad (10.11)$$

Burada $\Delta x'$ vagonun boy uzunluğudur (yine, üslü semboller trende ölçüldüğünü gösterir). Yerdeki gözlemciye göre, tren hareket ettiği için hesap biraz daha karışıktır. Sinyalin öndeki aynaya gidiş süresi Δt_1 ve geri geliş süresi Δt_2 ise, Şek. 10.12'ye göre,

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x + v \Delta t_1}{c}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x - v \Delta t_2}{c}$$



Şekil 10.11



Şekil 10.12

olur. Burada Δx vagonun yerden gözlenen boyudur. Bu iki denklem çözülür:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{c - v}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{c + v}$$

10.1. ÖZEL GÖRELİLİK TEORİSİ

ve gidiş-geliş süresi bulunur:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2 \frac{\Delta x}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} \quad (10.12)$$

Öte yandan, iki gözlemcinin ölçtüğü süreler arasındaki ilişkiyi biliyoruz [(10.9) formülü]:

$$\Delta t' = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t$$

Bu ifade (10.11) ve (10.12) denklemlerinde kullanılırsa

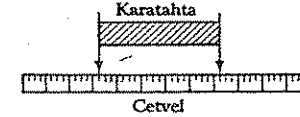
$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta x \quad (10.13)$$

Vagonun boyu yerdeki gözlemciye veya trendeki gözlemciye göre aynı değildir—yerdeki gözlemci vagonun boyunu *daha kısa* gözler. Sonuç:

Hareketli cisimlerin boyu kısalmır.

Buna Lorentz kısılması denir. Aynı $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ çarpanının hem zaman genişlemesi ve hem de boy kısılmasında kullanıldığına dikkat edelim. Böylece hatırdı tutmak kolay olur: Hareketli kronometre daha yavaş tıklar, hareketli çubuğun boyu kısalmır aynı γ çarpanı/kullanılır.

Şekil 10.13



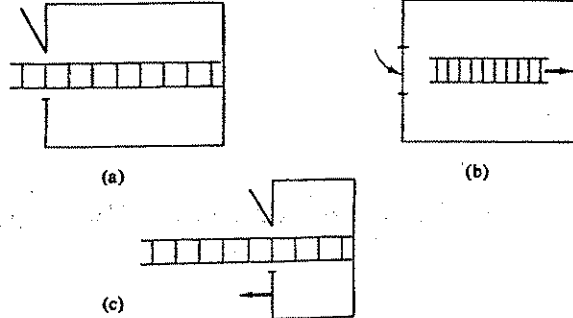
Elbette trendeki gözlemci vagonun boyunu kısalmış görmeyecektir—onun kullandığı metre çubuğunun da boyu kısaldığından, tüm ölçümleri durgun bir trendekiyle aynı olacaktır. Aşında, onun bakış açısında *yerdeki* cisimlerin boyu kısalmıştır. Burada yine aynı paradoksla karşılaşırız: A gözlemcisi B'nin boyunu kısalmış, B gözlemcisi de A'nın boyunu kısalmış olarak gözlüyorsa, kim haklıdır? Yanıt: Her ikisi de haklıdır! Fakat bu karşıt iddiaları bağdaştırmak için, uzunluk ölçişine daha dikkatle eğilelim. Bir karatahtanın boyunu ölçmek istiyorsunuz; eğer tahta size göre durgunsa, cetvelinizi onun yanına uzatır ve tahtanın iki ucuna karşılık gelen değerleri okursunuz (Şek. 10.13). Aradaki fark tahtanın boyudur. Peki tahta hareketliyse ne yapmalı? Yine aynı işlemi, fakat bu kez cetvelin *her iki ucundaki ölçmeyi aynı anda yapmalısınız*. Aksi takdirde, iki ölçüm arasında tahta yer değiştirecektir ve yanlış sonuç bulursunuz. İşte sorun bu "aynı anda" sözcüğünden kaynaklanıyor: bir gözlemciye göre eşzamanlı olan iki olay, diğer bir gözlemciye göre eşzamanlı değildir. Yerdeki gözlemci cetvelin iki ucunu *kendi sisteminde* eşzamanlı ölçmüştür; fakat trendeki gözlemci bu iki okumanın eşzamanlı olmadığını gözler. O halde, her iki gözlemci kendi sisteminde doğru ölçüm yapar, diğer gözlemciyi hatalı bulur. Fakat, bunda bir tutarsızlık yoktur, çünkü farklı ölçüm işlemlerinden söz etmektedirler.

Örnek 10.3 : Merdiven-ahır paradoksu. Zaman genişlemesinin tersine, Lorentz kısılmasının doğrudan deneysel bir kanıtı yoktur, çünkü ölçülecek boyutlarda bir cismin ışık hızına yaklaştırmak mümkün değildir. Aşağıdaki paradoks ancak ışık hızına yakın gidilebilen bir çiftlikte olabilecek tuhaf durumu anlatır.

Vaktiyle bir çiftçinin ahıra sığmayan boyda uzun bir merdiveni varmış (Şek. 10.14a). Birgün tesadüfen görelilik teorisi kitabı okuduktan sonra aklına bir fikir gelir. Oğluna merdiveni alıp ahır kapısına doğru hızla koşmasını söyler. Hareketli merdiven Lorentz kısılması

sonucu ahıra sığacak boyuta gelecek ve çiftçi merdivenin arkasından kapıyı kapatabilecektir (Şek. 10.14b). Fakat oğlu işten pek hoşlanmaz ve görelilik kitabından birkaç sayfa daha fazla okur. Babasına, kendi bakış açısına göre merdivenin değil, kendisine yaklaşmakta olan ahırın boyunun kılalacağını söyleyerek karşı çıkar (Şek. 10.14c).

Soru: Kim haklıdır, merdiven ahıra sığar mı sığmaz mı?



Şekil 10.14

Çözüm : Her ikisi de haklıdır. “Merdiven ahırın içinde” deyimi ile “merdivenin iki ucunun aynı anda ahırın içinde” olmasını anlıyorsanız, eşzamanlılık kavramının gözlemciye bağlı oluşu nedeniyle, bu gözlemciye bağlı bir durum olur. Burada iki olay söz konusudur:

- Merdivenin arka ucunun ahır kapısından girişi.
- Merdivenin ön ucunun ahırın dip duvarına dayanması.

Çiftçi *A* olayının *B* den önce olduğunu, dolayısıyla merdivenin tümüyle ahırın içinde olacağını iddia ediyor. Oğlu ise *B* olayının *A* dan önce olduğunu, dolayısıyla merdivenin ahıra sığmayacağını söylüyor. Çelişki var mı? Hayır, sadece bakış açısı farklıdır.

Şimdi “Yahu, kafamızı karıştırma; merdiven ya tümüyle ahırın içindedir, yahut da değildir.” diyebilirsiniz. Bu konuda kuşkunuz olmasın: merdiven tümüyle ahırın içine girer. Fakat, sorun başka yerdedir: merdiven ahırın içinde durduğunda ne olacaktır? Diyelim ki çiftçi kapıyı kapatırken bir yandan da merdivenin son basamağını tutup durdursun. Merdivenin parçalanmadığını düşünürsek, merdiven hemen durgun boyuna genişleyecektir. Merdivenin arka ucu durduktan sonra diğer kısımları bir süre daha gideceklerdir. (Görelilik teorisinde katı cisim kavramı anlamsızdır; cismin her parçası eşzamanlı ivmelenmez—cisim yeni hızına uygun boyuta genişler veya kısalır.) Böylece bir teleskop gibi genişleyen merdiven ahır duvarına çarpacaktır. Merdiven durduğunda ahırın içinde olur mu olmaz mı? Yanıt: içerde sağlam bir merdiven olmaz; ya içerde kırık bir merdiven, yahut da bir ucu ahır duvarındaki delikten dışarda kalan bir merdiven bulunur.

Lorentz kısalması üzerine son bir noktayı daha belirtelim. Hareketli bir cismin sadece hareket yönündeki boyutu kısalır:

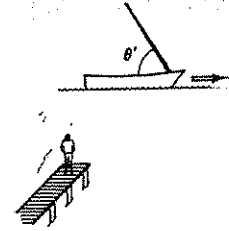
Hıza dik doğrultudaki boyutlar kısalmaz.

Nitekim, zaman genişmesi formülünü çıkarırken trenin yüksekliğini her iki gözlemciye göre aynı aldım. Şimdi bunu ispat edeyim. Tren yoluna paralel bir duvar olduğunu varsayalım. Bu duvarın üzerine yerden 1 m yükseklikte mavi bir çizgi çəkelim. Şimdi tren içindeki bir yolcu eline kırmızı bir fırça alıp pencereden dışarı eğilsin ve fırçayı *trendeki ölçüme göre* yerden 1 m yükseklikte duvara değdirtsin. Soru: Yolcunun kırmızı çizgisi mavi çizginin üstünde mi, altında mı olur? Eğer harekete dik yönde boy kısalması ola-

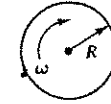
caksa, yerdeki gözlemci kırmızı çizginin daha aşağıda olacağını hesaplar; trendeki gözlemci de hareketli duvardaki mavi çizginin daha aşağıda olacağını söyler. Bu durumda eşzamanlılık, senkronizasyon gibi incelikler olmadığından, ikisi birden doğru olamaz: her iki gözlemcinin doğru olması ancak bir şekilde mümkündür: *iki çizginin aynı yükseklikte olması*. O halde, harekete dik doğrultuda boy kısalması olamaz.

Problem 10.7 Hareketsiz bir Volkswagen ile onun iki katı uzunlukta bir Lincoln otomobil yarışa çıkıyor. Yol kenarındaki bir gözlemci yarış sırasında her iki arabanın eşit uzunlukta olduğunu gözlüyor. Volkswagen ışık hızının yarısı hızda gittiğine göre Lincoln arabanın hızı ne kadardır? (Yanıtınızı *c*’nin kesri olarak ifade edin.)

Problem 10.8 Bir yelkenlinin direği yatayla θ açısı yapacak şekilde inşa edilmiştir. Sahildeki bir gözlemci yelkenlinin v hızıyla gittiğini ölçüyor (Şek. 10.15). Bu gözlemci direğin yatayla yaptığı açıyı ne kadar bulur?



Şekil 10.15



Şekil 10.16

Problem 10.9 Ehrenfest paradoksu. *R* yarıçaplı bir disk ω açısal hızıyla dönmektedir (Şek. 10.16). Diskin yarıçapı hıza dik olduğu için değişmez, fakat çevresi hız doğrultusunda olduğundan kısalması gerekir. Dönen diskin çevresinin çapına oranı ω ve *R* cinsinden ne kadardır? Geometri kurallarına göre bu oranın π olması gerekir. Ne oluyor? Açıklayın.

10.1.3 Lorentz Dönüşümleri

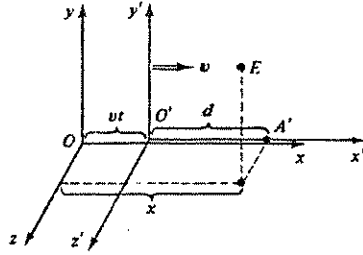
Buraya kadarki kısımlarda Lorentz kısalması, zaman genişmesi, eşzamanlılığın göreliliği gibi kavramları birtakım hayali deneyler üzerinde inceledim. Einstein ve diğer araştırmacılar tarafından ustaca hazırlanmış bu örnekler görelilik teorisindeki zor kavramları belirgin hale getirmeyi amaçlar. Şimdi farklı referans sistemlerinde yapılan gözlemleri karşılaştırmak için gerekli matematiksel formalizmi anlatmak istiyorum.

Her fiziksel süreç bir veya çok sayıda olay içerir. “Olay” belirli bir (x, y, z) konumunda belirli *t* anında meydana gelir. Bir flaş patlaması olaydır, fakat *Ay*’a yolculuk olayı değildir. Şimdi bir *E* olayının eylemsiz *S* sistemindeki (x, y, z, t) koordinatlarının bilindiğini varsayalım; *S*’ye göre hareketli olan bir *S'* sisteminde *aynı olayın* (x', y', z', t') koordinatlarını arayalım.

Eksenleri Şek. 10.17’deki gibi, *S'* sisteminin *x*-ekseni boyunca *v* hızıyla gidecek şekilde seçelim. Kronometreyi çalıştırdığımızda (*t* = 0), her iki sistemin orijini çakışık olsun. Buna göre, *t* anında *O'* orijini *O*’dan *vt* kadar uzakta olacaktır. Böylece

$$x = d + vt \quad (10.14)$$

yazılabilir; burada *d* = *O'A'* uzaklığı ve *A'* noktası *E* olayının *x'*-ekseni boyunca izdüşümü



Şekil 10.17

noktasıdır. Einstein'dan önce kime sorsanız

$$d = x' \quad (10.15)$$

olduğuna karar verecek ve dönüşüm bağıntılarını şöyle yazacaktı:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & x' = x - vt \\ \text{(ii)} & y' = y \\ \text{(iii)} & z' = z \\ \text{(iv)} & t' = t \end{array} \right\} \quad (10.16)$$

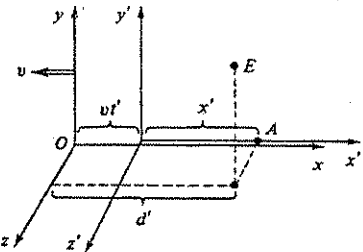
Bu denklemlere Galileo dönüşümleri denir. Einstein'dan önce bunların doğruluğu o kadar açıktı ki, hele (iv) numaralıсын, kimse yazmaya zahmet etmiyordu. Fakat görellilik çerçevesinde (iv) denklemi zaman genişlemesini hesaba katacak şekilde değişmelidir. Benzer şekilde (i) denklemi Lorentz kısalmasını verecek şekilde değişmelidir. Harekete dik doğrultudaki boyutlar değişmediği için, görellilik teorisinde (ii) ve (iii) denklemleri aynı kalacaktır.

(i) denkleminin çıkarılışı nerede görelliliğe aykırıdır? Yanıt: (10.15) denkleminde. Bu d uzaklığı S sisteminde ölçülen O'A' uzaklığıdır, oysa x' koordinatı O'A' uzaklığının S' sisteminde ölçülen uzaklığı olmalıdır. O'A' uzunluğu S' sisteminde durgun olduğuna göre, S sisteminde gözlenen d uzunluğu, Lorentz kısalmasına göre, daha kısa olacaktır:

$$d = \frac{1}{\gamma} x' \quad (10.17)$$

Bu ifade (10.14) denkleminde kullanılırsa, (i) denkleminin görelî versiyonu şöyle olur:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (10.18)$$



Şekil 10.18

Aynı düşünce yöntemini S' gözlemcisine göre tekrar edebiliriz. Şek. 10.17 t anında çizilmişti, bu kez aynı durumu Şek. 10.18'de S' gözlemcisinin t' anına göre çizelim. Yine

10.1. ÖZEL GÖRELİLİK TEORİSİ

t' = 0 anında iki sistemin orijini çakışıyorsa, t' anında O noktası O' noktasından vt' kadar geride olacaktır. Buna göre

$$x' = d' - vt' \quad (10.19)$$

Burada d' = OA, t' anındaki uzaklık ve A noktası E olayının x-ekseni üzerindeki izdüşümüdür. Yine klasik fizikçi d' = x olduğunu ileri sürecek ve Galileo dönüşümünü bulacaktır. Oysa, görellilik teorisinde ince bir fark vardır: x uzaklığı OA'nın S sisteminde ölçülen değeri, d' ise S' sisteminde ölçülen OA uzaklığıdır. Bu kez OA uzaklığı S sisteminde durgun olduğundan,

$$d' = \frac{1}{\gamma} x \quad (10.20)$$

olur ve

$$x = \gamma(x' + vt') \quad (10.21)$$

bulunur. Bu sonucu tahmin edebiliriz: olayın simetrisi nedeniyle, S sisteminde S' 'ye geçiş veya bunun tersi dönüşüm yapılırken, indisler değiştirilir ve v hızı yerine -v hızı alınır. Bu denklemden x' yerine (10.18) ifadesini kullanır ve t' için çözersek, görelî dönüşüm formüllerini bulmuş oluruz:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & x' = \gamma(x - vt) \\ \text{(ii)} & y' = y \\ \text{(iii)} & z' = z \\ \text{(iv)} & t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \end{array} \right\} \quad (10.22)$$

Bu formüller, Einstein'ın Galileo dönüşümleri yerine önerdiği Lorentz dönüşümleridir. Özel görellilik teorisinin tüm kinematik içeriği, aşağıdaki örneklerde görüleceği üzere, bu formüllerde saklıdır.

Ters dönüşüm, yani S' sisteminde S sistemine geçiş formülleri, (i) ve (iv) denklemlerini x ve t için çözersek buluruz. Veya, daha kısa olarak, indisleri yer değiştirir ve v'nin işaretini değiştiririz:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i')} & x = \gamma(x' + vt') \\ \text{(ii')} & y = y' \\ \text{(iii')} & z = z' \\ \text{(iv')} & t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right) \end{array} \right\} \quad (10.23)$$

Örnek 10.4: Eşzamanlılık ve zaman genişlemesi

Bir A olayının x = 0 ve t = 0 da, diğer bir B olayında x = a ve t = 0'da olduğunu varsayalım. Bu iki olay S sisteminde eşzamanlı demektir: İkisi de aynı t = 0 anında meydana gelirler. Fakat bu ikisi S' sisteminde eşzamanlı değildirler. Nitekim, (10.22) dönüşüm formülleriyle S' deki koordinatları hesaplanırsa:

$$A \text{ için : } x' = 0 \text{ ve } t' = 0$$

$$B \text{ için : } x' = \gamma a \text{ ve } t' = -\gamma(v/c^2)a$$

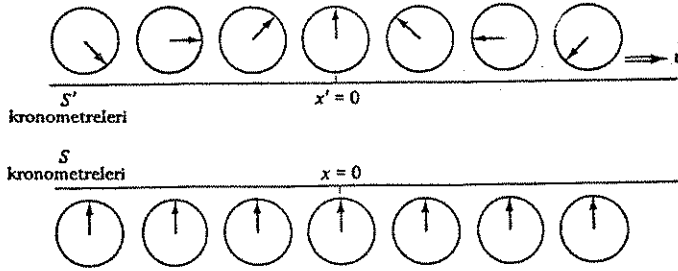
bulunur, yani S' gözlemcisine göre B olayı A'dan önce meydana gelir. Bu sonucu daha önceden biliyorduk, sadece Lorentz dönüşümlerinden nasıl kolayca elde edildiğini göstermek istedim.

Şimdi S gözlemcisinin t = 0 anında S' sistemindeki tüm kronometreleri test etmek istediğini düşünelim. Bu kronometrelerin herbiri, bulunduğu konuma göre farklı zamanları

gösterecektir. (iv) dönüşümüne göre

$$t' = -\gamma \frac{v}{c^2} x$$

olur; yani, bulundukları x konumuna orantılı miktarda olmak üzere, orijinin sol tarafındaki ($-x$ yönündeki) kronometreler *ileri gider*, sağ taraftakiler ise *geri kalırlar* (Şek. 10.19). Sadece orijindeki kronometre $t' = 0$ gösterir. O halde, hareketli kronometrelerin senkronize olmadığı Lorentz dönüşümüyle doğrudan görülür. Aynı durum elbette S' sisteminden gözlenen S sisteminin kronometreleri için geçerlidir; (iv') denklemine $t' = 0$ alınarak böyle olduğu görülebilir.



Şekil 10.19

Son olarak, S gözlemcisinin S' deki belirli bir kronometreye (örneğin, $x' = b$ deki) bakıp Δt süresince onu gözlediğini varsayalım. Bu süre boyunca hareketli kronometre ne kadar tıklayacaktır? x' aynı kaldığından, (iv') denkleminden $\Delta t = \gamma \Delta t'$, veya

$$\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t$$

bulunur. Bu, bildiğimiz zaman genişmesi formülüdür. Burada *aynı bir hareketli kronometreyi gözlediğimizden*, x' değerini sabit tuttuğumuza dikkat edin. Eğer, x sabit tutulsaydı, bu noktadan geçen bir sürü farklı kronometre gözlemiş olurduk ve hangisinin yavaşladığına karar veremezdik.

Örnek 10.5: Lorentz kısalması.

$+x$ eksen yönünde v hızıyla giden bir cetvel gözönüne alalım. Cetvelin durgun (yani, S sistemindeki) boyu $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ olur (cetvelin sol ve sağ uçlarının koordinatları x'_1 ve x'_2 ile gösterilmiştir). S sistemindeki bir gözlemci bu cetvelin boyunu ölçmek isterse, iki ucun *aynı t anındaki* koordinatlarını ölçüp farkını almalıdır: $\Delta x = x_2 - x_1$. (i) formülüne göre,

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x'$$

olur. Bu da, bildiğimiz Lorentz kısalmasıdır. Burada her iki uçta t zamanının aynı alındığına dikkat edelim; çünkü ölçümü yapan S gözlemcisidir.

Örnek 10.6: Einstein hız toplama kuralı

Bir parçacık S sisteminde dt zaman aralığında ds yolu alıyor. Parçacığın hızı

$$u = \frac{dx}{dt}$$

10.1. ÖZEL GÖRELİLİK TEORİSİ

olur. Öte yandan, S' sisteminde bu parçacığın aldığı yol [(10.22) denklemine (i) formülünden]

$$dx' = \gamma(dx - v dt)$$

ve bu yolu alış süresi [(iv) formülü]

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)$$

olur. Buna göre, parçacığın S' sistemindeki hızı şöyle olur:

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)} = \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (10.24)$$

Böylece Einstein hız toplama kuralı Lorentz dönüşümlerinden doğrudan bulunur. (10.7) denklemine açıklığıyla yazmak istersek, parçacığı A , S gözlemcisini B ve S' gözlemcisini C ile gösteririz; buna göre (10.24) denklemi şöyle olur:

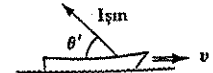
$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + \frac{v_{AB}v_{BC}}{c^2}} \quad (10.7)$$

Problem 10.10 (10.22) denklemlerini (x, y, z, t) için çözüp (10.23) denklemlerinin doğru olduğunu gösterin.

Problem 10.11 Medyum Sophia, 500 km ötedeki ikiz kardeşinin ayağına diken battığı anda acıyla haykırıyor. Bir bilim adamı her iki olayı (kardeşin ayağına diken batışı, Sophia'nın bağırmasını) bir uçaktan gözlemlemektedir. Uçak sağa doğru $\frac{12}{13}c$ hızıyla gitmektedir (Şek. 10.20). Bilim adamına göre hangi olay ne kadar süre önce meydana gelmiştir?



Şekil 10.20



Şekil 10.21

Problem 10.12 (a) Örnek 10.6'da x -yönündeki hızların S sisteminde S' sistemine dönüşüm formülünü bulmuştuk. Aynı yolu izleyerek, hareket doğrultusuna dik y - ve z -hız bileşenlerinin dönüşüm bağıntılarını çıkarın.

(b) Bir kayıktaki el lambasının ışığı yatayla θ açısı yapacak şekilde tutulmaktadır (Şek. 10.21). Kayık v hızıyla giderken, kıyıdaki bir gözlemci ışığın hangi θ' açısında yayıldığını görür? Yanıtınızı Problem 10.8 ile karşılaştırın ve aradaki farkı açıklayın.

Problem 10.13 10.2 problemini herhalde *yerdeki* bir gözlemciye göre çözmüştünüz. Şimdi aynı problemi polis arabası, hırsızlar ve merminin hareketsiz olduğu sistemlerde çözün. Aşağıdaki tablonun boş yerlerini doldurun:

Gözlemci ↓	Yer	Polis	Hırsız	Mermi	Hırsız kurtulur mu?
Yer	0	$\frac{1}{2}c$	$\frac{3}{4}c$		
Polis				$\frac{1}{3}c$	
Hırsız					
Mermi					

Problem 10.14 (İkizler paradoksuna yeni bir bakış). 21. yaşgünlerinde ikizlerden biri yürüyen bir merdivene atlayıp $\frac{4}{5}c$ hızıyla X yıldızına gidiyor; diğer kardeşi Dünya'da kalıyor. Gezgin kardeş X yıldızına vardığında, hemen geri giden merdivene atlayıp, yine $\frac{4}{5}c$ hızıyla Dünya'ya geri dönüyor. Kendi kronometresine göre 39. yaşgününe eve dönüyor.

- Dünya'da kalan kardeşi kaç yaşındadır?
 - X yıldızının uzaklığı nedir? (Yanıtınızı ışık-yıl biriminde ifade edin.)
- Dünyadan uzaklaşan merdivene S' , geri getiren merdivene S'' sistemi deyin (S sistemi Dünya olur). Yola çıkış anında her üç sistemin orijini çakışık olsun: yani, $x = x' = x'' = 0$ ve $t = t' = t'' = 0$.
- Atlama noktasının S sistemindeki (x, t) koordinatları ne olur?
 - Atlama noktasının S' sistemindeki (x', t') koordinatları ne olur?
 - Atlama noktasının S'' sistemindeki (x'', t'') koordinatları ne olur?
 - Gezgin kardeş geri dönen merdivene atladığı anda kronometresini S'' sistemine ayarlamak için ne yapmalıdır? Bunu yaptıktan sonra, eve döndüğü anda kronometresi ne gösterir? (Bu işlem onun yaşını değiştirmeyecektir, yine 39 yaşındadır, fakat artık zaman ölçümünü S'' sisteminde yapmaktadır.)
 - Gezgin kardeşe “*Şu anda* kardeşin kaç yaşında, ve hanginiz daha gençsiniz?” diye sorulsa, (i) Atlamadan hemen önce, (ii) atladıktan hemen sonra, doğru yanıt ne olur? (Atlama önce ve sonrasında, evdeki kardeşe bir şey olduğu yoktur, sadece gezgin kardeşin “*şu anda*” kavramı değişmiştir.)

10.1.4 Uzay-zaman Yapısı

(i) Dört-vektörler Lorentz dönüşümlerini daha sade gösterebilmek için yeni büyüklükler tanımlayalım:

$$x^0 = ct, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (10.25)$$

t yerine x^0 ve v yerine β alınması, zaman birimini *saniye* yerine *metre* yapar— 1 m'lik x^0 uzunluğu, ışığın 1 metre gitmesi için gerekli zaman olur. Buna eş olarak, x, y, z koordinatlarını yeniden adlandıralım:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (10.26)$$

10.1. ÖZEL GÖRELİLİK TEORİSİ

Bu durumda, Lorentz dönüşümleri şöyle yazılır:

$$\left. \begin{aligned} (x^0)' &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ (x^1)' &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ (x^2)' &= x^2 \\ (x^3)' &= x^3 \end{aligned} \right\} \quad (10.27)$$

veya, matris gösterimiyle

$$\begin{pmatrix} x^0' \\ x^1' \\ x^2' \\ x^3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (10.28)$$

Bunu bir satırda şöyle yazabiliriz:

$$(x^\mu)' = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^\mu_\nu) x^\nu \quad (10.29)$$

Buradaki Λ Lorentz dönüşüm matrisi olur. Yunan harfli indisler 0'dan 3'e kadar değerler alır; μ indisi satırları, ν indisi de sütunları gösterir. Dönüşümü böyle soyut bir şekilde yazmanın bir yararı şudur: Görelî hareket ortak $x - x'$ eksenî doğrultusunda olmayıp daha genel bir doğrultuda olduğunda, aynı formalizm uygulanabilir. Bu genel durumda Λ matrisi daha karmaşık olur, fakat (10.29) ifadesi değişmez.

Bu yapı size Bölüm 1'de gördüğümüz *dönme* dönüşüm matrisini hatırlatıyorsa, pek haksız sayılmazsınız. Orada koordinat sistemi döndürüldüğünde (x^1, x^2, x^3) bileşenlerinin nasıl değiştiği R dönme matrisiyle belirleniyordu. Burada *hareketli* koordinat sistemine geçildiğinde, Λ matrisi (x^0, x^1, x^2, x^3) bileşenleri hep birlikte değişir. Ashında, hem dönme ve hem de “saf” Lorentz dönüşümünü birlikte temsil eden genel bir Lorentz dönüşü de düşünülebilir.

Üç boyutlu vektörlere benzer şekilde, (a^0, a^1, a^2, a^3) gibi dört elemanlı bir **4-vektör** tanımlayabiliriz. Bunun için, 4-vektörün bileşenleri, yukardaki Lorentz dönüşümü altında (x^0, x^1, x^2, x^3) gibi davranmalıdır:

$$(a^\mu)' = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^\mu_\nu) a^\nu \quad (10.30)$$

Özel olarak, x -ekseni boyunca bir dönüşüm altında

$$\left. \begin{aligned} (a^0)' &= \gamma(a^0 - \beta a^1) \\ (a^1)' &= \gamma(a^1 - \beta a^0) \\ (a^2)' &= a^2 \\ (a^3)' &= a^3 \end{aligned} \right\} \quad (10.31)$$

Üç boyuttaki $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ skaler çarpım dört boyuta genişletilebilir; ancak sıfırıncı bileşenlerin çarpımı eksi işaretli olur:

$$-a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

Böyle tanımlanan skaler çarpımın S ve S' sistemlerinde aynı ifade edildiği, yani

$$-a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 = -a'^0b'^0 + a'^1b'^1 + a'^2b'^2 + a'^3b'^3 \quad (10.32)$$

olduğu gösterilebilir (Problem 10.15). Nasıl ki üç boyutlu skaler çarpım dönme altında *değişmez* (invariant) oluyorsa, dört boyutlu skaler çarpım da Lorentz dönüşümü altında *değişmez* kalır.

Skaler çarpımdaki eksi işaretiyle başedebilmek için şöyle bir yol izlenir: Yukarıda tanımladığımız a^μ 4-vektörünün kontravariant türde olduğunu belirterek, aynı vektörün a_μ ile gösterilen kovariant türü şöyle tanımlanır:

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a^0, a^1, a^2, a^3) \quad (10.33)$$

(Bu meslekte indisleri nereye koyacağınıza çok dikkat etmelisiniz.) İndisleri *yukarıda* olan *kontravariant* vektör, *aşağıda* olan da *kovariant* türde vektördür. Zaman indisini alt-üst ettiğinizde işaret değiştirmelisiniz ($a_0 = -a^0$). Uzay indislerini alt-üst ederken işaret *değişmez* ($a_1 = a^1, a_2 = a^2, a_3 = a^3$). Bu tanıma göre, skaler çarpım şöyle yazılabilir:

$$\sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu \quad (10.34)$$

veya, daha kısa olarak

$$a_\mu b^\mu \quad (10.35)$$

yazılırsa, *biri kovariant ve diğeri kontravariant olarak iki kez yazılan indis üzerinden toplama yapıldığı* kararlaştırılır. Bu kabule Einstein toplama kuralı denilir. Buna göre, skaler çarpımda hangi vektörün kovariant olacağı önemsizdir:

$$a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = -a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 \quad (10.36)$$

• **Problem 10.15** (10.31) dönüşümünü kullanarak, (10.32) eşitliğinin doğruluğunu gösterin. (Bu işlem, sadece x -yönündeki dönüşüm altında invariant olduğunu gösterir. Fakat (10.32) ifadesi *dönme* altında da invariant kalır; çünkü birinci terim dönmeden etkilenmez, son üç terim ise üç boyutlu $\vec{a} \cdot \vec{b}$ çarpımı demektir. O halde, uygun bir dönme altında, x -yönü istenilen doğrultuya getirileceğinden, (10.32) ifadesi *herhangi* bir Lorentz dönüşümü altında invariant olur.)

Problem 10.16 (a) (10.16) Galileo dönüşümünü temsil eden matrisi yazın.

(b) y -yönünde Lorentz dönüşüm matrisini yazın.

(c) Önce x -yönünde v hızıyla ve bunu takiben y yönünde \bar{v} hızıyla bir Lorentz dönüşümünün temsil eden matrisi yazın. Dönüşümlerin hangi sırayla yapıldığı önemli olur mu?

Problem 10.17 Üç boyutlu dönme ile Lorentz dönüşümü arasındaki paralellliği daha belirgin hale getirmek için şöyle bir büyüklük tanımlanır:

$$\frac{v}{c} = \tanh \theta \quad (10.37)$$

(a) A Lorentz dönüşüm matrisini [(10.28) denklemi] θ cinsinden ifade edin ve (1.19) denklemiyle karşılaştırın. θ büyüklüğüne *hızalma* (rapidity) adı verilir; hareketi belirtme açısından v 'ye kıyasla çok daha uygun bir parametredir. Örneğin, v hızı $[-c, +c]$ aralığında, θ ise

$[-\infty, +\infty]$ aralığında değişir. Daha da önemlisi hızlar toplanabilir olmadığı halde, hızalmalar toplanabilir:

(b) Einstein hız toplama kuralını hızalma cinsinden ifade edin.

(ii) **Değişmez interval.** Bir A olayının $(x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3)$ koordinatlarında ve diğer bir B olayının $(x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3)$ koordinatlarında meydana geldiğini düşünelim. **Yerdeğiştirme 4-vektörü** şöyle tanımlanır:

$$\Delta x^\mu = x_A^\mu - x_B^\mu \quad (10.38)$$

Δx^μ 4-vektörünün kendisiyle skaler çarpımı *değişmez* olup, görelilik teorisinde önemli bir yeri vardır:

$$I = \Delta x_\mu \Delta x^\mu = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -c^2 t^2 + d^2 \quad (10.39)$$

Bu büyüklüğe iki olay arasındaki **interval** adı verilir. Burada d iki olay arasındaki uzay uzaklığıdır. Gözlemci değiştirdiğinizde, A ile B arasındaki t zaman aralığı *değişebilir* ($t \neq t'$); uzay aralığı da *değişebilir* ($d \neq d'$); fakat I intervali *değişmez*.

Intervalin pozitif, negatif veya sıfır olabileceğine dikkat edelim. Bunlar şöyle sınıflandırılır:

1. $I < 0$ ise, intervalin **zamansal** olduğu söylenir. Nitekim, *aynı yerde* ($d = 0$) olan iki olay için I daima eksi işaretli olacaktır.

2. $I > 0$ ise, interval **uzaysaldır**. İki olay *aynı anda* ($t = 0$) ve farklı yerlerde oluyorsa, I daima artı işaretli olur.

3. $I = 0$ ise, interval **ışıksal** olur. İki olay arasında geçen sürede bir noktadan diğerine ancak ışık hızıyla gidilebiliyorsa, I sıfır olur.

İki olay arasında **zamansal interval** varsa, ikisinin *aynı yerde* *gözlemlendiği* ve bir Lorentz dönüşümüyle geçilebilen eylemsiz bir referans sistemi vardır. Nitekim, $v = d/t$ hızıyla A 'dan B 'ye giden bir trene binsem ve A olayı olduğu sırada yola çıksam, B olayının gerçekleştiği anda orada olurum; yani, trendeki gözlemciye göre, A ve B olayları aynı yerde meydana gelir. Uzaysal bir interval için bu mümkün değildir: Çünkü v hızının c 'den büyük olmasını gerektirir ve hiçbir gözlemci ışık hızından büyük hızla gidemez. Fakat, uzaysal intervalle sahip iki olay, uygun bir Lorentz dönüşümüyle *aynı anda* gözlenebilir (bkz. Problem 10.19).

Problem 10.18 (a) S referans sisteminde A olayı ($x = 5, y = 3, z = 0$) ve $ct = 15$ noktasında, B olayı ise $(10, 8, 0)$ ve $ct = 5$ noktasında meydana geliyor.

(i) A ile B olayları arasındaki *değişmez interval* ne kadardır?

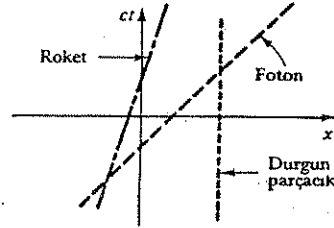
(ii) Bu iki olayın *eşzamanlı* gözlemlendiği eylemsiz bir referans sistemi var mıdır? Varsa, bu sistemin S 'ye göre hızını ve yönünü bulun.

(iii) Bu iki olayın *aynı yerde* gözlemlendiği eylemsiz bir referans sistemi var mıdır? Varsa, bu sistemin S 'ye göre hızını ve yönünü bulun.

(b) $A = (2, 0, 0)$ ve $ct = 1$; $B = (5, 0, 0)$ ve $ct = 3$ için aynı hesabı tekrarlayın.

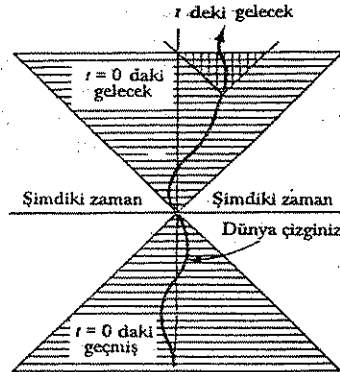
Problem 10.19 A olayının koordinatları (x_A, t_A) ve B olayının koordinatları (x_B, t_B) dir. Bu iki olay arasında uzaysal bir interval olduğu varsayılıyor. İki olayın *eşzamanlı* olduğu referans sisteminin hızını bulun.

(iii) Uzak-zaman diyagramları. Bir parçacığın hareketini grafikte göstermek istediğimizde, yatay eksen t zamanını ve dikey eksen x konumunu gösteririz. Böyle bir grafikte parçacığın hızı eğrinin eğimi olarak hesaplanabilir. Nedendir bilinmez ama, görelilik teorisinde buna ters bir kabul yapılmıştır: konum yatay eksen ve zaman (daha doğrusu $x^0 = ct$) dikey eksen alınır. Buna göre, hareketsiz parçacığın grafiği dikey bir doğru olur; ışık hızıyla giden bir foton 45° eğimli bir doğru, daha küçük bir v hızıyla giden cisim ise eğimi $c/v = 1/\beta$ olan bir doğru ile temsil edilir. Böyle bir uzak-zaman diyagramında bir parçacığın izlediği yola dünya çizgisi denir (Şek. 10.22).



Şekil 10.22

Şimdi $t = 0$ anında $x = 0$ orijininden yola çıktığımızı düşünelim. Hiçbir cisim ışık hızından daha hızlı gidemeyeceği için, dünya çizginizin eğimi asla 1'den küçük olamaz. Buna göre, hareketin iki 45° eğimli doğru arasındaki bölgede ve orijinden yukarıda olacaktır. Bu sizin "gelecek" bölgenizdir, yani yola çıktığınızda gidebileceğiniz noktaların geometrik yeridir. Zaman ilerleyip siz dünya çizginiz boyunca ilerledikçe, size açık olan seçenekler de azalacaktır. Herhangi bir andaki "geleceğiniz", bulunduğunuz noktadan çizilen üçgenin üst tarafında olur (Şek. 10.23). Öte yandan, geri taraftaki üçgen bölge sizin "geçmiş" bölgenizdir, yani buraya gelebilme olanağı olan noktaların geometrik yeridir. Bunun dışında kalan (ileri ve geri üçgenlerin dışında kalan) bölgeler "şimdiki zaman" olur; bu bölgeye giremezsiniz, oradan da gelmiş olamazsınız. Diğer bir deyişle, şimdiki zamandaki hiçbir olayı etkileyemezsiniz, çünkü ışık hızından daha hızlı sinyal göndermeniz gerekir.



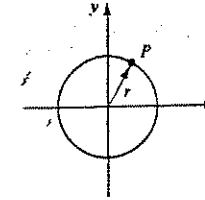
Şekil 10.23

Bu grafiğe y - ve z eksenlerini de katabiliriz. y -eksenini sayfa düzleminin dışına doğru seçersek, üçgen yerine koni şeklinde bölgeler oluşur. Bu konilerin yüzeyi sadece ışığın gidebildiği yollar olduğu için, bunlara ileri ışık konisi ve geri ışık konisi denir. Diğer bir deyişle, geleceğiniz ileri ışık konisi içinde, geçmişiniz ise geri ışık konisi içinde yer alır.

Dikkat edilirse, uzak-zaman diyagramında iki olayı birleştiren doğruya bakarak bunlar

arasındaki intervalin hangi türden olduğunu hemen söyleyebiliriz. Eğim 1'den büyükse zamansal interval, 1 ise ışık ve 1'den küçükse uzaysal interval olur. Örneğin, bulunduğunuz yerin geçmiş ile geleceği arasındaki iki noktanın intervali zamansal olur; ışık konisi üzerindeki iki olayın intervali ışıkaldır.

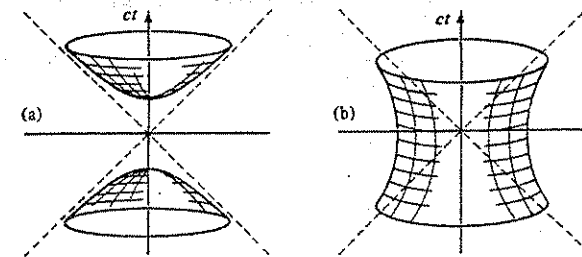
Özel göreliliğin bu geometrik özelliklerini ilk farkeden kişi olan Hermann Minkowski bir makalesine şöyle başlıyordu: "Bundan böyle, yalnız başına zaman veya yalnız başına uzay kavramları anlamını yitirecek, ikisinin birliği bağımsız bir gerçeklik kazanacaktır." Bu, güzel bir düşüncedir ama fazla abartmayalım. "Zaman da x, y, z 'den farksız bir koordinattır," diyebilir miyiz? Hayır. Zaman diğer üç koordinattan hem doğası ve hem de değişmez intervaldeki eksi işareti nedeniyle farklıdır. Uzak-zaman geometrisine hiperbolik karakteri veren bu eksi işarettir, ve üç boyutlu uzaydan daha zengin bir geometriye yolaçar.



Şekil 10.24

Üç boyutlu uzayda z -ekseni etrafındaki dönüşlerde, orijinden sabit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ uzaklıktaki noktaların geometrik yeri bir çemberdir (Şek. 10.24). Uzak-zamanda Lorentz dönüşümü altında ise, $I = (x^2 - c^2t^2)$ intervali değişmez kalır ve bu noktaların geometrik yeri bir hiperbol—veya, y -eksenini de katarsak, *eksenel hiperboloid* olur.

Interval zamansal türden ise, hiperboloid "iki yapraklı" oluşur (Şek. 10.25a). Uzaysal intervaller "tek yapraklı" hiperboloid verirler (Şek. 10.25b). Lorentz dönüşümü yapıldığında (yani, hareketli bir eylemsiz sisteme geçildiğinde) bir olayın (x, t) koordinatları (x', t') olarak değişebilir, fakat yeni koordinatlar da aynı hiperbol üzerinde olacaktır. Lorentz dönüşümü ile uzay dönmesi birlikte kullanılarak bir nokta hiperboloid üzerinde istenilen yere getirilebilir, fakat hiçbir dönüşüm onu, örneğin zamansal bir hiperboloidin üst yaprağından alt yaprağına getiremez.



Şekil 10.25

Eşzamanlılığın incelenirken, iki olayın zaman sırasının gözlemciye göre değişebileceğini, hatta bazı durumlarda ters-yüz olacağını söylemiştik. Şimdi bunun her zaman mümkün olamayacağını görebiliriz: İki olay arasındaki interval zamansal ise, sıralamaları asla değişmez; ancak uzaysal türden intervallerin zaman sıralaması gözlenen eylemsiz sisteme bağlı olur. Uzak-zaman diyagramında uzaysal bir hiperboloid üzerindeki bir olay, gözlemciye bağlı olarak, pozitif veya negatif t bölgesine getirilebilir. Fakat, zamansal hiperboloidin üst

yaprağındaki bir olay kesinlikle $(0, 0)$ 'dan sonra, alt yapraktaki bir olay ise kesinlikle bundan önce olmuştur. Bu gözlemler sadece merak konusu olmayıp, tüm fizikğin temeli olan *nedensellik ilkesini* kurtarmaktadır. Eğer iki olayın zaman sırasını her durumda değiştirebilseydik, artık hiçbir zaman "A olayı B 'den önce oldu." diyemiyecdik, çünkü rakip bir gözlemci çıkıp "B olayı A 'dan önce oldu." diyebilecekti. Olaylar arasındaki interval zamansal ise, bu kusur giderilmiş olur. *Sonuç: Neden-sonuç ilişkili olaylar arasındaki interval daima zamansal türden olur, ve zaman sıralaması tüm eylemsiz gözlemciler için aynıdır.*

Problem 10.20 (a) Birbirinden 10 m uzakta duran iki kişi arasındaki top oyununu (veya, haberleşmeyi) uzay-zaman diyagramında gösterin. Bu iki kişinin intervali uzaysal türden olduğu halde haberleşmeleri nasıl mümkün olmaktadır?

(b) Bir bilim-kurgu romanında "ışık hızından hızlı giden bir adamın, bulunduğu yere bir gün önceden geri geldiği" yazılmıştır. Bu mümkün müdür? Işık hızından daha hızlı gidebileceğini kabul etsek bile, yine de mümkün müdür? Bu yolculuğu uzay-zaman diyagramında gösterin.

Problem 10.21 S sistemine göre x -ekseni yönünde $\frac{3}{5}c$ hızıyla hareket eden S' sistemi gözönüne alınır. (Yine, $t = t' = 0$ anında orijinler çakışmıştır.)

(a) Bir milimetrik kağıt üzerinde, eksenleri x ve ct olan dik koordinat sistemi kurun. $x' = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ olan doğruları gösterin. Yine, $ct' = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ doğruları çizip işaretleyin.

(b) S' sisteminde serbest bir parçacık, $ct' = -2$ anında $x' = 0$ noktasından hareket edip $ct' = +3$ anında $x' = 2$ noktasına varıyor. Bu yer değiştirmeyi grafikte gösterin. Bu doğrunun eğiminden parçacığın S sistemindeki hızını hesaplayın.

(c) Parçacığın hızını cebirsel olarak hız toplama kuralından bulun ve (b) deki grafik çözümle aynı olduğunu gösterin.

10.2 GÖRELİ MEKANİK

10.2.1 Öz Zaman ve Öz Hız

Dünya çizginiz boyunca ilerledikçe, belli bir referans sistemine göre kronometreniz yavaşlar. Zaman genişmesi u hızınıza bağlıdır. (Referans sisteminin hızını v ile gösterdiğim için, cisimlerin hızını u ile gösteriyorum.) Yani, referans sisteminin kronometresi dt aralıklarla tıklarken, sizin kronometrenizin tıklama aralığı

$$d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2} dt \quad (10.40)$$

olacaktır. Kendi kronometrenizin gösterdiği τ zamanına **öz zaman** denir. Birçok durumda τ öz zamanı, referans sisteminin t zamanından daha kullanışlı olur.

Uçakla Ankara'ya giderken pilot hızın $\frac{4}{5}c$ olduğunu söylerse, "hız" sözcüğünden ne anlarız? Tabii ki birim zamanda alınan yolu; vektör olarak

$$\vec{u} = \frac{d\vec{l}}{d\tau} \quad (10.41)$$

şeklinde tanımlarız. Eğer, yere göre hızdan söz ediyorsak, \vec{l} ve t yerdeki gözlemciye göre ölçülmelidir. Ankara'da bir toplantıya yetişecekseniz, önemli olan büyüklük budur. Fakat, varışta karnızın aç olup olmayacağını merak ediyorsanız, birim öz zamanınızda alınan yolu bilmek sizin için daha önemli olabilir:

$$\vec{\eta} = \frac{d\vec{l}}{d\tau} \quad (10.42)$$

10.2. GÖRELİ MEKANİK

Payı yerdeki gözlemciye, paydası uçağa göre ölçülen bu melez büyüklüğe **öz hız** adı verilir; bildiğimiz \vec{u} hızına da **klasik hız** diyeceğiz. İkisi arasındaki ilişki (10.40), (10.41) ve (10.42) bağlantılarına göre şöyle olur:

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.43)$$

Işık hızından çok küçük değerlerde öz hız klasik tanıma yaklaşıp.

Matematiksel açıdan öz hızın önemli özelliği şudur: Bir referans sisteminden diğerine geçerken, öz hızın dönüşümü konum 4-vektörü gibi olur. Uzay kısmı $\vec{\eta}$ olan bir 4-vektör

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (10.44)$$

olarak tanımlanırsa, bunun sıfırıncı bileşeni

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.45)$$

olur. Pay dx^μ yer değiştirme 4-vektörü ve payda invariant olduğundan, S sistemine göre x -ekseni boyunca v hızıyla giden S' sistemine geçildiğinde

$$\left. \begin{aligned} \eta^{0'} &= \gamma(\eta^0 - \beta\eta^1) \\ \eta^{1'} &= \gamma(\eta^1 - \beta\eta^0) \\ \eta^{2'} &= \eta^2 \\ \eta^{3'} &= \eta^3 \end{aligned} \right\} \quad (10.46)$$

veya, daha genel olarak

$$\eta^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \eta^\mu \quad (10.47)$$

η^μ **öz hız 4-vektörü**, veya daha kısa olarak, **4-hız** olur.

Buna karşılık, klasik hızın dönüşüm formüllerinin çok daha karmaşık olduğunu Örnek 10.6 ve Problem 10.12'de görmüştük:

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{u_y}{1 - vu_x/c^2} \right) \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{u_z}{1 - vu_x/c^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10.48)$$

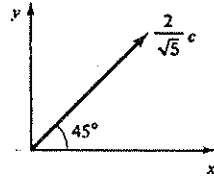
Bu dönüşümün neden daha karmaşık olduğu açıktır: hem $d\vec{l}$ payını ve hem de dt paydasını dönüştürmek gerekir; oysa öz hızın $d\tau$ paydası invariant olduğundan, kesrin dönüşümü sadece payın dönüşüm kuralını izler.

Problem 10.22 (a) (10.43) denklemi öz hızı klasik hız cinsinden ifade eder. Bu formülün tersini, yani \vec{u} hızını $\vec{\eta}$ cinsinden bulun.

(b) Öz hız ile *hızalma* arasındaki ilişki nedir? (Hızalma Problem 10.17'de tanımlanmıştı.) Hızı x -yönünde alıp η öz hızını θ cinsinden bulun.

Problem 10.23 Bir araba Şek. 10.26'da gösterildiği gibi, 45° açısı altında $(2/\sqrt{5})c$ klasik hızıyla gitmektedir.

(a) Klasik hızın u_x ve u_y bileşenlerini bulun.



Şekil 10.26

(b) Öz hızın η_x ve η_y bileşenlerini bulun.

(c) 4-hız vektörünün η^0 bileşenini bulun.

Bir S' sistemi x -yönünde klasik $(2/\sqrt{5})c$ hızıyla hareket etmektedir. Uygun dönüşüm formüllerini kullanarak:

(d) S' sisteminde klasik hızın u'_x ve u'_y bileşenlerini bulun.

(e) S' sisteminde öz hızın η'_x ve η'_y bileşenlerini bulun.

(f) Yanıtlarınızın şu bağıntıyı sağladığını görün:

$$\bar{\eta}' = \frac{\bar{u}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}$$

Problem 10.24 4-hız vektörünün kendisiyle invariant çarpımını, yani $\eta^\mu \eta_\mu$ çarpımını hesaplayın.

Problem 10.25 Bir parçacığın hareketi $x(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}$, $y = z = 0$ olarak veriliyor.

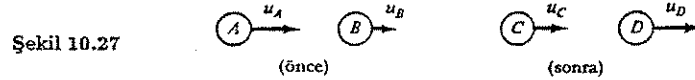
(a) Başlangıçta $t = \tau = 0$ olduğunu kabul ederek, τ öz zamanını t 'nin fonksiyonu olarak bulun. (Not: (10.40) denkleminin integralini almahsınız.)

(b) x konumu ve v klasik hızını τ 'nin fonksiyonu olarak bulun.

(c) η^μ öz hız 4-vektörünü t 'nin fonksiyonu olarak bulun.

10.2.2 Görelî Enerji ve Momentum

Klasik mekanikte momentum, kütle×hız olarak tanımlanır. Bu kavramı görelî mekaniğe taşımak istediğimizde şöyle bir soruyla karşılaşırız: klasik hız mı yoksa öz hız mı kullanmalıyız? Klasik fizikte τ ve t zamanları özdeş olduğundan, hangisini seçersek farketmez. Fakat görelî mekanikte öz hızın kullanılması zorunludur, aksi takdirde momentum korunumu yasası görelîlik ilkesiyle çelişir. Bunu açıklayalım.



Bu bölümün başında incelediğimiz, iki cisim arasındaki kafa-kafaya çarpışmaya tekrar dönelim (Şek. 10.27). Bu çarpışmada momentum korunuyordu:

$$m_A u_A + m_B u_B = m_C u_C + m_D u_D \quad (10.49)$$

Aynı çarpışmaya hareketli bir gözlemciden bakar ve

$$u' = u - v \quad (10.50)$$

Galileo hız dönüşüm formülünü kullanırsak, bu sistemde de momentum korunur:

$$m_A u'_A + m_B u'_B = m_C u'_C + m_D u'_D \quad (10.51)$$

10.2. GÖRELİ MEKANİK

Bunun doğru olabilmesi için kütle korunumu olmalıdır:

$$m_A + m_B = m_C + m_D \quad (10.52)$$

Şimdi, hızların dönüşümü için Galileo yerine Einstein formülünü kullanalım:

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \quad (10.53)$$

Bu ifadeyi u' 'ya göre çözelim:

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad (10.54)$$

Bu dönüşümü (10.49) denkleminde kullanırsak

$$m_A \left(\frac{u'_A + v}{1 + u'_A v/c^2} \right) + m_B \left(\frac{u'_B + v}{1 + u'_B v/c^2} \right) = m_C \left(\frac{u'_C + v}{1 + u'_C v/c^2} \right) + m_D \left(\frac{u'_D + v}{1 + u'_D v/c^2} \right) \quad (10.55)$$

olur, yani hareketli sistemde momentum korunmaz. Sonuç: Momentum $m\bar{u}$ olarak tanımlanırsa momentum korunumu fiziksel bir yasa olmaz—bir sistemde doğru, diğerinde yanlış bir ifade olur.

Şimdi öz hızları kullandığımızda ne olduğuna bakalım. S sisteminde momentum korunumu geçerli olsun:

$$m_A \eta_A + m_B \eta_B = m_C \eta_C + m_D \eta_D \quad (10.56)$$

(10.46) denkleminde göre

$$\begin{aligned} \eta' &= \gamma \eta - \gamma \beta \eta^0 \\ \text{veya} \quad \eta &= \frac{1}{\gamma} \eta' + \beta \eta^0 \end{aligned}$$

olur (hareket x -yönünde olduğundan, kısaca $\eta^1 = \eta$ yazdım). Buna göre, (10.56) denklemini şöyle dönüştür:

$$m_A \left(\frac{\eta'_A}{\gamma} + \beta \eta^0_A \right) + m_B \left(\frac{\eta'_B}{\gamma} + \beta \eta^0_B \right) = m_C \left(\frac{\eta'_C}{\gamma} + \beta \eta^0_C \right) + m_D \left(\frac{\eta'_D}{\gamma} + \beta \eta^0_D \right) \quad (10.57)$$

Bu sistemde momentumun korunması, yani

$$m_A \eta'_A + m_B \eta'_B = m_C \eta'_C + m_D \eta'_D$$

olabilmesi için, şu terimlerin toplamı sıfır olmalıdır:

$$m_A \eta^0_A + m_B \eta^0_B = m_C \eta^0_C + m_D \eta^0_D \quad (10.58)$$

Nedir bu denklem? Klasik momentum korunumunda, kütle korunumu koşulu nasıl geldiyse, bu denklem de aynı şekilde ortaya çıktı. Fakat bu, $\eta^0 = c/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ çarpanından dolayı, kütle korunumu değildir. O halde, görelilikte $m\bar{\eta}$ momentumuyla birlikte, şöyle bir büyüklük daha korunuyor:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.59)$$

Bu büyüklük, klasik limitte kütleyle indirgendiğinden, Einstein buna **görelî kütle** adını verdi. (Buna göre m durgun kütle olur.) Günümüzde ise, bunu c^2 ile çarpıp görelî enerji tanımlanır:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.60)$$

Korunumlu bu büyüklüğe enerji adı verilmesinin nedeni, klasik limite gidildiğinde anlaşılır. $u \ll c$ olduğunda, paydanın seri açılımı yapılırsa,

$$E = mc^2 + \frac{1}{2} mu^2 + \frac{3}{8} m \frac{u^4}{c^2} + \dots \quad (10.61)$$

İlk terim sabittir; fakat ikinci terim bildiğimiz kinetik enerji olur. Görelilik teorisinde E toplam enerji, mc^2 durgun enerji ve $(E - mc^2)$ kinetik enerji olarak bilinir.

Sonuç: Momentumu $m\vec{\eta}$ olarak tanımlarsak, görelilik teorisinde momentum korunumu ve (10.60) denklemiyle tanımlanan enerji korunumu birlikte geçerli olurlar. O halde, görelî momentum ve enerji şöyle tanımlanır:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{\eta} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ E &= mc\eta^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned} \quad (10.62)$$

Tabii ki bir yasanın görelilikle bağdaşması *doğru* olduğunu göstermez—bunun doğruluğu laboratuvarda *deney*sel olarak tayin edilecektir. Şunu söyleyebilirim ki, **görelî enerji ve momentum korunumu yasası** kadar deneyel ispatı sağlam başka fizik yasası yoktur:

Kapalı bir sistemde, toplam görelî momentum ve enerji korunumludur.

Dış kuvvetler varsa, klasik mekanikte olduğu gibi, sistemin enerji ve momentumu korunmaz. Durgun kütlelerin korunumlu olmadığı, 1945 yılından itibaren herkesin acı bir şekilde bildiği bir konudur. Sırası gelmişken değişmez (invariant, her sistemde aynı) büyüklük ile korunumlu (bir etkileşmeden önce ve sonra aynı) büyüklük arasındaki farka dikkatinizi çekmek isterim. Kütle değişmezdir, ama korunumlu değildir; enerji korunumludur fakat değişmez değildir. Elektrik yükü (daha sonra göreceğiz) hem korunumlu hem de değişmezdir. Hız ne değişmez ne de korunumludur.

Görelî enerji ve momentum tanımlarında $\vec{\eta}$ ve η^0 olduğuna dikkat edersek, şöyle bir 4-vektör tanımlayabiliriz:

$$p^\mu = m\eta^\mu \quad (10.63)$$

(m nin invariant olduğuna dikkat edelim.) Bunun sıfırıncı bileşeni

$$p^0 = m\eta^0 = \frac{E}{c} \quad (10.64)$$

şeklinde enerjiyle orantılı olduğundan, p^μ **enerji-momentum 4-vektörü** olarak bilinir. Lorentz dönüşümü altında diğer 4-vektörler gibi değişir:

$$\left. \begin{aligned} p^{0'} &= \gamma(p^0 - \beta p^1) \\ p^{1'} &= \gamma(p^1 - \beta p^0) \\ p^{2'} &= p^2 \\ p^{3'} &= p^3 \end{aligned} \right\} \quad (10.65)$$

veya, daha genel olarak

$$p^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$$

olur. Bu 4-vektörün kendisiyle skaler çarpımı invariant olur [(10.62) tanımları kullanılırsa]:

$$p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + (\vec{p} \cdot \vec{p}) = -m^2 c^2$$

Bunu enerji cinsinden yazarsak

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (10.66)$$

Bu formül çok kullanışlıdır: E biliniyorsa p , veya p biliniyorsa E , hızı hesaplamaya gerek kalmadan, kolayca bulunabilir.

Problem 10.26 Görelî enerji korunumunun görelilik ilkesiyle tutarlı olduğunu gösterin. Yani, eylemsiz bir sistemde korunuyorsa, diğer bir sistemde de korunduğunu gösterin.

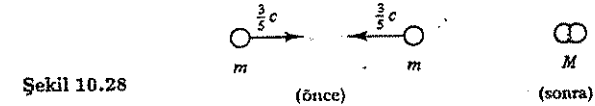
Problem 10.27 Bir parçacığın kinetik enerjisi durgun enerjisinin n katı ise, hızı ne olur?

Problem 10.28 Herbiri x -yönünde hareket eden çok sayıda parçacığın görelî enerji ve momentumları (E_1, E_2, E_3, \dots) ve (p_1, p_2, p_3, \dots) olsun. Toplam momentumun sıfır olduğu kütle merkezî sisteminin hızını bulun.

10.2.3 Görelî Kinematik

Şimdi burada biraz ara verip görelî korunum yasalarının bazı uygulamalarını gözden geçirmek istiyorum.

Örnek 10.7: *Herbirinin durgun kütlesi m ve hızları $\frac{3}{5}c$ olan iki cisim çarpıştıktan sonra birbirine yapışıyorlar (Şek. 10.28). Bileşik cismin M kütlesi ne olur?*



Şekil 10.28

Çözüm: Bu durumda momentum korunumu, başta ve sonda sıfır olduğundan, işimize yaramaz. Herbir cismin çarpışmadan önceki enerjisi ise

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2}} = \frac{5}{4} mc^2$$

ve, bileşik cisim durgun olduğundan, son enerji Mc^2 olur. Buna göre, enerji korunumunu yazarsak

$$\frac{5}{4} mc^2 + \frac{5}{4} mc^2 = Mc^2$$

veya

$$M = \frac{5}{2} m$$

Yani, son kütle ilk iki kütlelerin toplamından *daha büyük* olur! Bu çarpışmada kütle korunmaz, kinetik enerji tümüyle durgun kütleye dönüşeceğinden durgun kütle artar.

Böyle bir çarpışmanın klasik incelemesinde, kinetik enerji ısıya dönüştü deriz—bileşik cisim daha sıcak olur. Bu, görelî mekanikte de doğrudur. Fakat, nedir ısısal enerji? Cisim içindeki atom ve moleküllerin rastgele hareketinin kinetik ve potansiyel enerjileri toplamıdır. Görelilik teorisi bize bu enerjinin cismin *kütlesi* olacağını söyler: sıcak bir patates soğuk

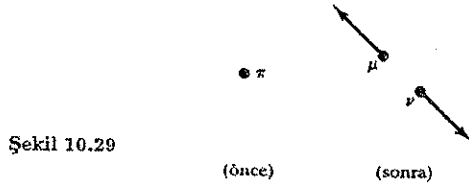
halindekinden *daha ağır*, sıkıştırılmış bir yay serbest durumundan *daha ağır* demektir. Tabii ki fark çok küçüktür: U iç enerjisinin kütleye katkısı U/c^2 ve c^2 çok büyük olduğundan, bu katkı günlük yaşamda yok sayılabilir. İki bilardo topunu ne kadar hızlandırırsanız bu kütle farkını ölçemezsiniz. Fakat temel parçacıklar dünyasında bu etki çok çarpıcı bir şekilde ortaya çıkar. Örneğin, kütlesi 2.4×10^{-28} kg olan yüksüz pi mezonu kendiliğinden bozunup iki fotona dönüştüğünde, durgun kütlesi kinetik enerjiye dönüşüp tamamen yok olur.

Yukarda foton kütlesinin sıfır olduğunu söyledim. Bu, klasik mekanikte işitilmedik bir şeydir. Eğer bir parçacığın kütlesi sıfırsa, kinetik enerjisi ($\frac{1}{2}mu^2$) ve momentumu ($m\vec{u}$) sıfır olur; $F = ma$ hareket yasasına göre, bu cisme bir kuvvet uygulamazsınız ve Newton'un üçüncü yasasına göre, cisim de başkalarına kuvvet uygulayamaz; yani klasik fiziğe göre bu parçacık yok demektir. Görelilik teorisinde ilk bakışta durumun aynı olduğu sanılabilir; hem \vec{p} ve hem de E enerjisi m ile orantılıdır. Fakat, (10.62) denklemi daha dikkatle incelenirse, $u = c$ olduğunda pay ve payda sıfır olacağından, \vec{p} ve E nin belirsiz kaldığı görülür (sıfır/sıfır). Buna göre, kütsüz bir parçacık, *ışık hızıyla gitmek koşuluyla* enerji ve momentum taşıyabilir. Artık E ve p (10.62) denklemiyle bulunamaz, fakat (10.66) denklemine göre bu iki büyüklük arasında şöyle bir ilişki olur:

$$E = pc \quad (10.67)$$

Bu düşünce yöntemi pek inandırıcı olmayabilir, ama doğada en az iki tane kütsüz parçacık (foton ve nötrino) gözlemlendiği de bir gerçektir. Bu iki parçacık ışık hızıyla giderler ve (10.67) denklemine uyarlar. Bu nedenle, yukardaki açıklamayı ciddiye almak zorundayız. Fakat, bazı sorular yanıtızsız kalacaktır. Örneğin, bir fotonun diğerinden daha enerjik olması nasıl anlaşılır? Her ikisinin de kütlesi aynı (sıfır) ve hızı aynıdır (c). Görelilik teorisi bu soruya yanıt veremez, fakat kuantum mekaniği verir: $E = h\nu$ Planck formülüne göre (h Planck sabiti ve ν frekans), frekansı daha büyük olan fotonun enerjisi daha büyük olur. Yani, *mavi* foton *kırmızı* fotondan daha enerjiktir.

Örnek 10.8: Durgun bir pion bozunarak bir müon ve bir nötrinoya dönüşüyor (Şek. 10.29). Giden müonun momentumunu m_μ ve m_π kütleleri cinsinden bulun ($m_\nu = 0$).



Çözüm :

$$\begin{aligned} E_{\text{önce}} &= m_\pi c^2 & \vec{p}_{\text{önce}} &= 0 \\ E_{\text{sonra}} &= E_\mu + E_\nu & \vec{p}_{\text{sonra}} &= \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu \end{aligned}$$

Momentum korunumu $\vec{p}_\nu = -\vec{p}_\mu$ verir. Enerji korunumu ise

$$E_\mu + E_\nu = m_\pi c^2$$

verir. Nötrino için, (10.67) denklemine göre, $E_\nu = p_\nu c$ alınır ve müon için (10.66) denklemi $E_\mu = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2}$ kullanılırsa

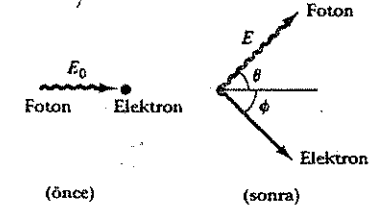
$$\sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2} + p_\mu c = m_\pi c^2$$

olur. Buradan müon momentumu bulunur:

$$p_\mu = |\vec{p}_\mu| = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c}{2m_\pi}$$

Klasik bir çarpışmada momentum ve kütle daima korunur, ama kinetik enerji korunmayabilir. İnelastik bir çarpışmada kinetik enerji kaybı ısıya dönüşür; veya, bir patlamada kimyasal enerji kinetik enerjiye dönüşebilir. Kinetik enerji korunuyorsa, buna *elastik* çarpışma denir. Görelî çarpışmalarda, momentum ve toplam enerji daima korunur, fakat kütle ve kinetik enerji korunmaz. Yine, kinetik enerji de korunuyorsa, buna *elastik* çarpışma denir. Bu durumda *durgun* (toplam eksi kinetik) enerji, dolayısıyla kütle de korunur. Örnek 10.7 ve 10.8 inelastik örneklerdir. Şimdi *elastik* bir örneğe bakalım.

Örnek 10.9: Compton saçılması. E_0 enerjili bir foton, durgun bir elektrona çarpıyor (Şek. 10.30). Giden fotonun E enerjisini θ "saçılma açısı"nın fonksiyonu olarak bulun.



Şekil 10.30

Çözüm : Geliş doğrultusuna dik yönde momentum korunumu

$$p_e \sin \phi = p_f \sin \theta$$

veya, $p_f = E/c$ olduğundan,

$$\sin \phi = \frac{E}{p_e c} \sin \theta$$

yazılabilir. Geliş doğrultusunda momentum korunumu yazılırsa

$$\frac{E_0}{c} = p_f \cos \theta + p_e \cos \phi = \frac{E}{c} \cos \theta + p_e \sqrt{1 - \left(\frac{E}{p_e c} \sin \theta\right)^2}$$

veya,

$$p_e^2 c^2 = (E_0 - E \cos \theta)^2 + E^2 \sin^2 \theta = E_0^2 - 2E_0 E \cos \theta + E^2$$

Son olarak, enerji korunumu yazılır:

$$E_0 + m_e c^2 = E + E_e = E + \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} = E + \sqrt{m_e^2 c^4 + E_0^2 - 2E_0 E \cos \theta + E^2}$$

Bu denklem E 'ye göre çözülürse

$$E = \frac{1}{\frac{1 - \cos \theta}{m_e c^2} + \frac{1}{E_0}} \quad (10.68)$$

Sonucu daha yalın ifade edebilmek için foton dalgaboylarını kullanalım:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Buna göre,

$$\lambda = \lambda_0 + \left(\frac{h}{m_e c} \right) (1 - \cos \theta) \quad (10.69)$$

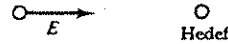
Buradaki $(h/m_e c)$ sabitine elektronun Compton dalgaboyu denir.

Problem 10.29 Örnek 10.8'deki müonun enerji ve hızını bulun.

Problem 10.30 Kütlesi m olan bir parçacığın toplam enerjisi durgun enerjisinin iki katıdır. Bu parçacık durgun bir özdeş parçacığa çarpıyor. İki parçacık birbirine yapışıyor, bileşik parçacığın kütlesi ne olur? Hızı ne olur?

Problem 10.31 Durgun kütlesi m ve görelî momentumu $p = \frac{3}{4}mc$ olan yüksüz bir pion iki fotona bozunuyor. (Fotonlar kütesizdir.) Fotonlardan biri ilk pionun gidiş yönünde, diğeri ters yönde yayıldığına göre, her bir fotonun enerjisini bulun.

Problem 10.32 Eskiden parçacık fiziği deneylerinde hep şöyle bir yol izlenirdi: Bir parçacık (genellikle proton veya elektron) yüksek bir E enerjisine kadar hızlandırılır ve sonra durgun bir hedef parçacıkla çarpıştırılır:



Bu tür deneyler, enerjinin çoğu son parçacıkların kinetik enerjisine gittiği için, verimsiz olurlar. Bunun yerine her iki parçacığı E enerjisine hızlandırıp sonra çarpıtırabiliriz:



Böyle bir çarpışmada, parçacıklardan birinin sisteminde diğerinin E' enerjisi klasik mekanikte $4E$ olur (neden?); yani dört kat kazançlı oluruz. Fakat, *görelî mekanikte* kazanç muazzam olabilir. Her iki parçacığın M kütleli olduğu durumda

$$E' = \frac{2E^2}{Mc^2} - Mc^2 \quad (10.70)$$

olduğunu gösterin. Örnek olarak, $Mc^2 = 1 \text{ GeV}$ olan protonların $E = 30 \text{ GeV}$ enerjili olduğunu varsayalım. E' ne kadardır? Bu değer E nin kaç katıdır. ($1 \text{ GeV} = 10^9$ elektronvolt).

Problem 10.33 "Çift yokolması" denilen deney türünde, kütlesi m ve momentumu p_0 olan bir elektron, kütlesi aynı fakat yükü zıt olan durgun bir pozitronla çarpışıyor. İki parçacık yokolarak iki fotona dönüşüyor. (Neden bir fotona değil?) Fotonlardan biri geliş yönüyle 60° açıyla çıkıyorsa, enerjisi ne kadardır?

10.2.4 Görelî Dinamik

Newton'un birinci yasası görelilik postülatları içinde yer alır. İkinci yasayı şu şekilde yazalım:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (10.71)$$

Bu yasa, \vec{p} görelî momentum olmak koşuluyla, görelilik teorisinde de geçerlidir. İş tanımı yine kuvvetin yol boyunca integrali olur:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (10.72)$$

10.2. GÖRELİ MEKANİK

\vec{F} ve W bu şekilde tanımlanırsa, iş-enerji teoremi görelî mekanikte geçerli olur—yani, yapılan iş enerjideki artışa eşittir:

$$W = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{l} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} dt = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u} dt$$

İntegral içindeki ifadeye bir bakalım:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) \cdot \vec{u} = \frac{m\vec{u}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = \frac{dE}{dt} \quad (10.73)$$

Bu ifade yerine konulursa, iş-enerji teoremi bulunur:

$$W = \int \frac{dE}{dt} dt = E_{\text{son}} - E_{\text{ilk}} \quad (10.74)$$

Örnek 10.10: Sabit kuvvet altında hareket. m kütleli bir parçacık sabit F kuvveti etkisiyle, $t = 0$ anında orijinden ilk hızsız harekete başlıyor. x konumunu t zamanına bağlı olarak bulun.

Çözüm: (10.71) yasasını yazalım:

$$\frac{dp}{dt} = F \implies p = Ft + \text{sabit}$$

$t = 0$ anında $p = 0$ olduğuna göre bu sabit sıfır olur. Buna göre

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = Ft$$

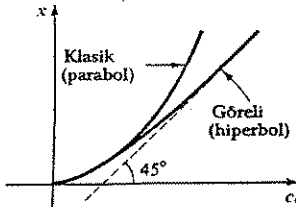
ifadesini u için çözeriz:

$$u = \frac{(F/m)t}{\sqrt{1+(Ft/mc)^2}} \quad (10.75)$$

Pay klasik mekanikten bulunan yanıtıdır ve $(F/m)t \ll c$ olduğunda yaklaşık doğru olur. Öte yandan, görelî payda u hızının daima c 'den küçük olmasını sağlar. Nitekim $t \rightarrow \infty$ olduğunda $u \rightarrow c$ olur.

Problemi tamamlamak için bir kez daha integral almak gerekir:

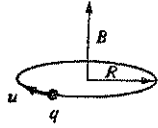
$$x = \frac{F}{m} \int_0^t \frac{t' dt'}{\sqrt{1+(Ft'/mc)^2}} = \frac{mc^2}{F} \sqrt{1+(Ft'/mc)^2} \Big|_0^t = \frac{mc^2}{F} \left[\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1 \right] \quad (10.76)$$



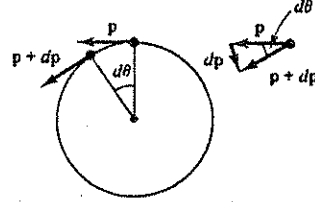
Şekil 10.31

Klasik mekanikteki $x = (F/2m)t^2$ parabolü yerine, görelî mekanikte bir hiperbol elde edilir (Şek. 10.31). Bu hareket, örneğin düzgün elektrik alanda yüklü bir parçacığın hareketi olabilir.

Örnek 10.11: Siklotron hareketi Yüklü bir parçacığın düzgün *magnetik* alandaki dairesel hareketine bakalım (Şek. 10.32). Merkeze yönelik magnetik kuvvet gerekli merkezci ivmeyi sağlar. Fakat dikkat edin—görelî mekanikte merkezci kuvvet μ^2/R değildir. Şek. 10.33'te görüldüğü gibi, $dp = p d\theta$ olduğundan



Şekil 10.32



Şekil 10.33

$$F = \frac{dp}{dt} = p \frac{d\theta}{dt} = p \frac{u}{r}$$

bulunur. (Klasik mekanikte $p = mu$ ve $F = \mu^2/R$ olur.) Buna göre,

$$quB = p \frac{u}{R}$$

veya

$$p = qBR \quad (10.77)$$

bulunur. Bu şekliyle görelî siklotron formülü klasik (5.3) formülüyle aynıdır—aradaki fark p nin görelî momentum olmasıdır.

Newton'un üçüncü yasası, ilk iki yasanın tersine, görelî mekanikte her zaman doğru olmayabilir. Nitekim iki cisim arasında uzay aralığı varsa, üçüncü yasa eşzamanlılığın görelî oluşuyla çelişir. Örneğin, t anında B cisminin A 'ya uyguladığı kuvvet $\vec{F}(t)$ ve A 'nın B 'ye uyguladığı kuvvet $-\vec{F}(t)$ olsun. Buna göre üçüncü yasa *bu referans sisteminde* geçerlidir. Fakat hareketli bir gözlemci, bu eşit ve zıt iki kuvvetin *farklı zamanlarda* uygulandığını ileri sürecektir. O halde, bu sistemde üçüncü yasa geçersiz olur. Fakat, yüzeyler arasında *aynı fiziksel noktalarda* uygulanan kuvvetler için üçüncü yasa geçerli olur.

Bir gözlemciden diğerine geçildiğinde \vec{F} kuvvetinin dönüşümü, hem pay ve hem payda dönüştüğü için, karmaşık olur. y -bileşeni için hesap yapılırsa

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dp_y}{\gamma dt - \frac{\gamma\beta}{c} dx} = \frac{(dp_y/dt)}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt})} = \frac{F_y}{\gamma(1 - \frac{\beta u_x}{c})} \quad (10.78)$$

(Burada γ ve β gözlemci hızına bağlı olup sabittir; \vec{u} parçacığın S gözlemcisine göre hızıdır.) z bileşeni benzer şekilde bulunur:

$$F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - \frac{\beta u_x}{c})}$$

x -bileşeni daha da karmaşık olur:

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\gamma dp_x - \gamma\beta dp^0}{\gamma dt - \frac{\gamma\beta}{c} dx} = \frac{\frac{dp_x}{dt} - \beta \frac{dp^0}{dt}}{(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt})} = \frac{F_x - \frac{\beta}{c} \frac{dE}{dt}}{(1 - \frac{\beta u_x}{c})}$$

dE/dt için daha önce bulunan (10.73) ifadesi kullanılırsa,

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{\beta}{c} (\vec{u} \cdot \vec{F})}{(1 - \frac{\beta u_x}{c})} \quad (10.79)$$

Ancak özel durumlarda bu ifade sadeleşir. Örneğin, parçacığın S sisteminde durgun olduğu bir anda, $\vec{u} = 0$ ve

$$\vec{F}'_{\perp} = \frac{1}{\gamma} \vec{F}_{\perp} \quad F'_{\parallel} = F_{\parallel} \quad (10.80)$$

yani, S' sisteminin hareketine paralel olan bileşen değişmez, dik bileşen γ ile bölünür.

\vec{F} 'nin böyle karmaşık dönüşmesi üzerine, öz hızı benzer bir "öz kuvvet" şöyle tanımlayabiliriz:

$$K^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} \quad (10.81)$$

Bu büyüklüğe *Minkowski kuvveti* denir; p^{μ} bir 4-vektör ve öz zaman invariant olduğundan, bu kuvvet de 4-vektör olur. K^{μ} 'nin uzay bileşenleri ile "klasik" kuvvet arasındaki ilişki şöyle olur:

$$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} \left(\frac{dt}{d\tau} \right) = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.82)$$

Sıfırıncı bileşen ise

$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} \quad (10.83)$$

Bu ifade, $1/c$ çarpanını saymazsak, parçacığın enerjisindeki artış oranı—veya, parçacığa verilen (öz) güç olur. Görelî dinamik, klasik kuvvet veya Minkowski kuvveti cinsinden formüle edilebilir. Minkowski kuvvetiyle bulunan ifadeler daha sade olur; fakat, pratikte bildiğimiz t zamanı cinsinden parçacığın yörüngesiyle ilgilendiğimiz için, klasik kuvvetle bulunan bağıntılar daha yararlı olur.

Klasik yasaları görelî dinamığa taşımak istediğimizde bazan kararsızlık olabilir. Örneğin, Lorentz kuvveti ifadesinde klasik kuvvet mi yoksa Minkowski kuvveti mi olmalıdır? Yani,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

mi alınmalıdır, yoksa

$$\vec{K} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

ifadesi mi daha doğrudur? Klasik fizikte t ile τ özdeş olduğundan, bu aşamada buna karar vermek mümkün değildir. Daha sonra göreceğimiz üzere, Lorentz kuvveti klasik kuvvet olarak yazılmalıdır.

Problem 10.34 Klasik mekanikte Newton'un ikinci yasasının bilinen ifadesi (m kütlesi sabit ise) $\vec{F} = m\vec{a}$ dır. Görelî $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ ifadesi bu kadar basit olmaz:

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[\vec{a} + \frac{\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{a})}{(c^2 - u^2)} \right] \quad (10.84)$$

olduğunu gösterin. Burada $\vec{a} = d\vec{u}/dt$ dir.

Problem 10.35 Sabit kuvvetin etkisi altında bir cisim yeteri kadar uzak bir ilk konumdan harekete başlarsa, ışıgın ona erişemeyeceğini gösterin.

Problem 10.36 "Öz ivme" bilinen yolla şöyle tanımlanır:

$$\alpha^\mu = \frac{d\eta^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (10.85)$$

(a) \vec{u} ve \vec{a} (klasik ivme) cinsinden α^0 ve $\vec{\alpha}$ bileşenlerini bulun.

(b) $\alpha_\mu \alpha^\mu$ çarpımını \vec{u} ve \vec{a} cinsinden ifade edin.

(c) $\eta^\mu \alpha_\mu = 0$ olduğunu gösterin.

(d) Görelî Newton yasasının (10.81) ifadesini α^μ cinsinden yazın. İnvariant $K^\mu \eta_\mu$ çarpımını hesaplayın.

Problem 10.37 \vec{u} ile \vec{F} arasındaki açı θ ise

$$K_\mu K^\mu = \left[\frac{1 - (u^2/c^2) \cos^2 \theta}{1 - u^2/c^2} \right] F^2$$

olduğunu gösterin.

Problem 10.38 Kütleli m ve yükü q olan bir parçacığın \vec{E} ve \vec{B} elektromagnetik alanı içinde ivmesinin

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \sqrt{1 - u^2/c^2} \left[\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} - \frac{\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{E})}{c^2} \right]$$

olduğunu gösterin. \vec{u} parçacığın hızıdır. (Yol gösterme: (10.84) formülünü kullanın.)

10.3 GÖRELİ ELEKTRODİNAMİK

10.3.1 Magnetizmanın Görelî Karakteri

Klasik mekanğin tersine, klasik elektromagnetik teori daha baştan görelilik teorisiyle uyumludur. Maxwell denklemleri ve Lorentz kuvveti yasası eylemsiz her referans sisteminde geçerlidirler. Tabii bir gözlemcinin elektrik karakterde gördüğü etkiyi diğer bir gözlemci magnetik olarak görebilir, ama sonuçta ikisinin öngördüğü parçacık hareketi aynı olur. On dokuzuncu yüzyılda Lorentz ve diğer bilim adamlarının bunu göremeyişi, elektromagnetik teoriden değil, kullandıkları klasik mekanikten kaynaklanıyordu. Şimdi Newton mekanğini düzelttikten sonra, görelî elektrodinamiğin tam ve tutarlı bir teorisine girebiliriz. Fakat şunu vurgulamak isterim: elektrodinamiğin kurallarını değiştirecek değiliz—sadece bu kuralları, görelî karakteri daha belirgin hale getiren bir formalizm içinde ifade edeceğiz. Bu arada, Lorentz dönüşümleri kullanarak, daha önce zorlukla elde ettiğimiz birçok sonucun nasıl daha kolay çıkarıldığını göreceğiz. Bu kısmın ana hedefi elektromagnetik teori yapısını daha derinden anlamamızı sağlamaktır; daha önce keyfi veya birbirleriyle ilişkisiz görünen yasaların görelî bakış açısında nasıl tutarlı bir birlik oluşturduğunu görmemizdir.

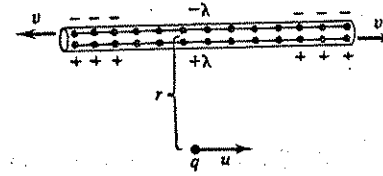
Önce size, elektrostatik ve görelilik teorisini var saydığımızda, magnetizmanın nasıl kaçınılmaz olduğunu göstermek istiyorum; özel olarak, akım geçen bir tel ile hareketli bir yük arasındaki kuvveti, magnetizma yasalarına başvurmadan nasıl çıkarabileceğimizi göstereceğim. Sağa doğru v hızıyla giden bir dizi pozitif yük olduğunu varsayalım. Bu yükler birbirine çok yakın olduğundan, bunların sürekli bir λ boyca yük yoğunluğu oluşturduklarını

10.3. GÖRELİ ELEKTRODİNAMİK

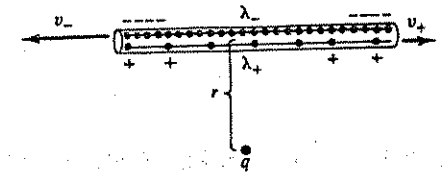
kabul edebiliriz. Bu pozitif diziyi çakışık olarak, sola doğru aynı v hızıyla giden bir $-\lambda$ yük yoğunluğu olsun. Buna göre, sağa doğru oluşan net akımın değeri

$$I = 2\lambda v \quad (10.86)$$

olur. Öte yandan, r uzaklıkta noktasal bir q yükü yine sağa doğru u hızıyla gidiyor olsun (Şek. 10.34). Boyca yük yoğunlukları birbirini sıfırladığından, bu S referans sisteminde q yükü üzerinde elektrik kuvvet yoktur.



Şekil 10.34



Şekil 10.35

Fakat aynı duruma, q yükünün hareketsiz olduğu (yani, sağa doğru u hızıyla giden) S' sisteminde baktığımızda çok farklı olur (Şek. 10.35). Einstein hız toplama kuralına göre, pozitif ve negatif yük dizilerinin hızları şimdi

$$v_{\pm} = \frac{v \mp u}{1 \mp vu/c^2} \quad (10.87)$$

olur. $v_- > v_+$ olduğundan, negatif yükler arasındaki diziliş uzaklığının Lorentz kısalması, pozitif yüklerinkine göre daha fazla olur; o halde, bu sistemde, telin net yükü negatiftir! S' sistemindeki boyca yük yoğunlukları şöyledir:

$$\lambda_{\pm} = \pm \gamma_{\pm} \lambda_0 \quad (10.88)$$

Burada

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\pm}^2/c^2}} \quad (10.89)$$

ve λ_0 pozitif yük yoğunluğunun durgun olduğu sistemdeki değeridir. Bunun S sistemindeki λ ile aynı olmadığına dikkat edelim. Pozitif yükler S sisteminde v hızıyla hareket ettiği için

$$\lambda = \gamma \lambda_0 \quad (10.90)$$

olur. Burada

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.91)$$

olur. γ_{\pm} üzerinde biraz işlem yapalım:

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(v \mp u)^2 \left(1 \mp \frac{vu}{c^2}\right)^{-2}}} = \frac{c^2 \mp uv}{\sqrt{(c^2 \mp uv)^2 - c^2(v \mp u)^2}} = \frac{c^2 \mp uv}{\sqrt{(c^2 - v^2)(c^2 - u^2)}} \quad (10.92)$$

Buna göre, S' sisteminde telin net yükü şöyle olur:

$$\lambda_{\text{top}} = \lambda_+ + \lambda_- = \lambda_0(\gamma_+ - \gamma_-) = \frac{-2\lambda_0 v}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.93)$$

Sonuç: Pozitif ve negatif yüklerin diziliş aralıklarının farklı Lorentz kışılması nedeniyle, bir sistemde nötr olan tel başka bir sistemde yüklü olacaktır.

Bu λ_{top} boyca yük yoğunluğu bir elektrik alan oluşturur:

$$E = \frac{\lambda_{\text{top}}}{2\pi\epsilon_0 r}$$

O halde, S' sisteminde q yükü üzerinde bir elektrik kuvvet oluşur:

$$F' = qE = -\frac{\lambda v}{\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{qu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.94)$$

Fakat, S' sisteminde q yükü üzerinde kuvvet varsa, S sisteminde de bir kuvvet olmalıdır; biz bunu kuvvetin dönüşüm formülünden hesaplayabiliriz. q yükü S' sisteminde durgun olduğundan, F' kuvveti u hızına diktir. S sistemindeki kuvveti (10.80) formülüyle hesaplarız:

$$F = \sqrt{1 - u^2/c^2} F' = -\frac{\lambda v}{\pi\epsilon_0 c^2} \frac{qu}{r} \quad (10.95)$$

Yükü tele doğru çeken bu kuvvet S' sisteminde elektriksel bir kuvvettir (yüklü tel ve durgun q yükü). Fakat, telin nötr olduğu S sisteminde elektriksel olmadığı açıktır. O halde, elektrostatik ve görelilik birlikte alındığında, başka türden bir kuvvetin varlığını gerektirir. Bu "başka kuvvet" magnetik kuvvettir. Nitekim, (10.95) formülünü biraz değiştirirsek, bildiğimiz bir ifade çıkar. $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$ alınır ve (10.86) denklemleri kullanılırsa

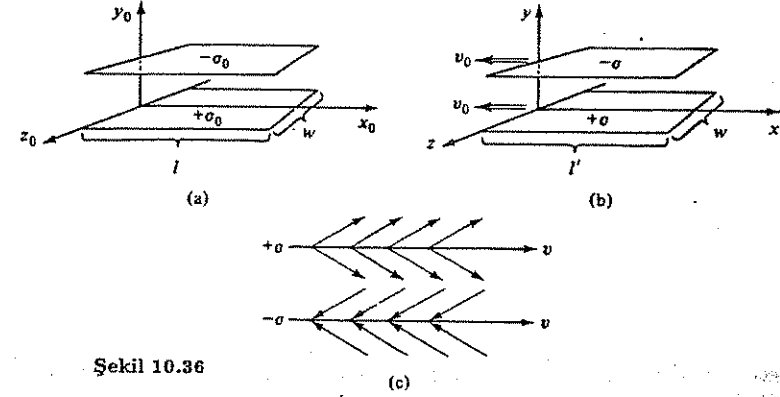
$$F = -\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right) qu \quad (10.96)$$

bulunur. Parantez içindeki ifade sonsuz doğrusal telin magnetik alanı olup, S sisteminde Lorentz kuvvet ifadesine indirgenir.

10.3.2 Elektromagnetik Alanın Dönüşümü

Yukarda değişik örneklerde gördüğümüz gibi, bir gözlemcinin elektrik alanı diğer gözlemcinin magnetik alanı olabilmektedir. Şimdi şu soruya yanıt arayalım: S sisteminde verilen \vec{E} ve \vec{B} alanları S' sistemine geçildiğinde nasıl dönüşürler? İlk tahminimize göre, \vec{E} 'nin bir 4-vektörün uzay bileşeni ve \vec{B} 'nin diğer bir 4-vektörün uzay bileşeni olacağını düşünüyorsanız yanılırsınız—durum daha karmaşıktır.

Önce, açık bir şekilde elektrik yükün korunumu olduğu varsayımını yaparak başlayalım. Kütle gibi, elektrik yükü de sabit bir sayı olup cismin ne kadar hızlı gittiğinden bağımsızdır. İkinci bir varsayım şudur: elektromagnetik alanların dönüşüm kuralları, nasıl oluştuklarına bakılmaksızın, aynıdır. Değişken akımın oluşturduğu elektrik alanla statik yüklerin oluşturduğu elektrostatik alan aynı şekilde dönüşür. Böyle olmasaydı, alan kavramını tümüyle bırakmamız gerekirdi, çünkü bir noktada elektrik ve magnetik alan verildiğinde, o nokta için tüm bilgi verilmiş demektir; başka bilgiye (elektromagnetik açıdan) gerek kalmaz.



Şekil 10.36

Bu iki varsayımdan sonra, en basit elektrik alanı gözönüne alalım: düzlem kapasitörün levhaları arasındaki düzgün elektrik alanı (Şek. 10.36a). Kapasitörün S_0 referans sisteminde hareketsiz ve yüzey yükünün $\pm\sigma_0$ olduğunu varsayalım. Buna göre,

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{j} \quad (10.97)$$

Şimdi aynı kapasitörü, sağa doğru v_0 hızıyla hareket eden S sisteminde inceleyelim (Şek. 10.36b). Bu sistemde levhalar sola doğru hareketli olup, elektrik alan yine

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j} \quad (10.98)$$

ifadesiyle verilir, ancak bu kez σ yük yoğunluğu farklıdır. (Bir dakika; tüm farklılık sahiden bu kadar mı? $E = \sigma/\epsilon_0$ ifadesi Gauss yasasından geliyordu; Gauss yasası ise, simetriye göre, alanın levhaya dik olduğunu söyler. Burada alanın levhaya dik olduğunu söyleyebilir miyiz? Ya Şek. 10.36c'deki gibi bir tarafa eğik ise? Buna şöyle cevap vereyim: eğik (değil ama) olsa bile, levhalar arasındaki alan $+\sigma$ ve $-\sigma$ alanlarının vektörel toplamı olduğundan, levhalara paralel bileşenler birbirini sıfırlar.)

Herbir levha üzerindeki toplam yük korunumludur. Ayrıca, levhanın harekete dik w kenarı sabit, fakat l kenar uzunluğu Lorentz kışılması sonucu

$$\frac{1}{\gamma_0} = \sqrt{1 - v_0^2/c^2} \quad (10.99)$$

çarpanı kadar kışalacaktır. Buna göre, birim yüzeydeki yük γ_0 kadar artar:

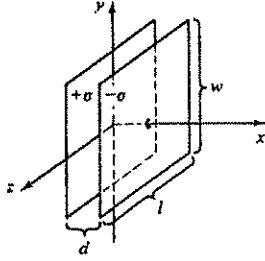
$$\sigma = \gamma_0 \sigma_0 \quad (10.100)$$

Böylece, harekete dik doğrultudaki elektrik alan da aynı miktarda artar:

$$E_{\perp} = \gamma_0 E_{0\perp} \quad (10.101)$$

Harekete paralel bileşenin nasıl değiştiğini bulmak istersek, kapasitörü hareket yönünde dik, yani yz -düzlemine paralel alalım (Şek. 10.37). Bu kez sadece levhalar arasındaki d uzaklığı kışalacak, l ve w kenar uzunlukları değişmeyecektir. Elektrik alan d uzaklığına bağlı olmadığından, sonucu yazabiliriz:

$$E_{\parallel} = E_{0\parallel} \quad (10.102)$$



Şekil 10.37

Örnek 10.12: Sabit hızlı noktasal yükün elektrik alanı. S_0 sisteminde noktasal bir q yükü orijinde hareketsizdir. $+x$ yönünde v_0 hızıyla giden bir S sisteminde bu yükün elektrik alanı ne olur?

Çözüm: S_0 sisteminde elektrik alan

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0^2} \hat{r}_0$$

veya,

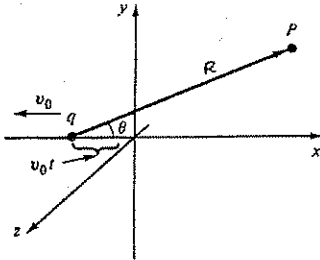
$$E_{x0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}, \quad E_{y0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qy_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}, \quad E_{z0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

olur. Yukarıda bulunan (10.101) ve (10.102) dönüşüm formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_y &= \gamma_0 E_{y0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_z &= \gamma_0 E_{z0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_0 z_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Bu ifadelerde hala S_0 sistemindeki (x_0, y_0, z_0) koordinatları yer almaktadır. Bunlar yerine, aynı noktanın S sistemindeki koordinatlarını yazmak isteriz. Ters Lorentz dönüşümlerini kullanalım:

$$x_0 = \gamma_0(x + v_0 t) = \gamma_0 R_x, \quad y_0 = y = R_y, \quad z_0 = z = R_z$$



Şekil 10.38

Burada \vec{R} , q yükünden P noktasına çizilen vektördür (Şek. 10.38). Buna göre (0 indisini de kaldırırsak)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma q \vec{R}}{(\gamma^2 R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(1 - v^2/c^2)}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \frac{\hat{R}}{R^2} \quad (10.103)$$

Bu ifade Bölüm 9'da gecikmeli potansiyellerden yola çıkılarak bulunmuştur. Burada çok daha kolay bir şekilde elde ettik.

Yukarıda bulduğumuz (10.101) ve (10.102) dönüşüm formülleri *genel* değildir; \vec{E} alanının dönüşümünü verdiği halde, \vec{B} alanı hakkında bir şey söylemez. Bunun nedeni açıktır: S_0 sisteminde statik bir yük dağılımından yola çıktığımız için magnetik alan yoktur.

Genel dönüşüm kuralını bulmak için hem elektrik ve hem de magnetik olan bir sistemden yola çıkmalıyız. Yukarıda kullandığımız S sistemi bu işi görür. Bu sistemde elektrik alanı bulmuştuk [(10.98) formülü]:

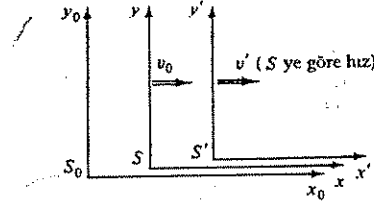
$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (10.104)$$

Bu sistemde v_0 hızıyla hareket eden yüzey yüklerinin oluşturduğu yüzey akım yoğunlukları şöyle olur:

$$\vec{K}_{\pm} = \mp \sigma v_0 \hat{i} \quad (10.105)$$

Sağ el kuralına göre, bu akımın oluşturduğu magnetik alan eksi z yönünde olup, şiddeti Ampere yasasıyla bulunur:

$$B_z = -\mu_0 \sigma v_0 \quad (10.106)$$



Şekil 10.39

Şimdi, üçüncü bir S' sistemi S ye göre v hızıyla sağa doğru gidiyor olsun (Şek. 10.39). Bu sistemde elektrik ve magnetik alanlar, tıpkı S sisteminde olduğu gibi

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_z = -\mu_0 \sigma' v' \quad (10.107)$$

şeklinde olur; ancak burada v' hızı, S' sisteminin S_0 sistemine göre hızıdır:

$$v' = \frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2}, \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \quad (10.108)$$

Yine, yüzey yükünün dönüşümü daha önce bulunan (10.100) formülüyle verilir:

$$\sigma' = \gamma' \sigma_0 \quad (10.109)$$

Şimdi yapılacak iş, (10.107) formüllerindeki \vec{E}' ve \vec{B}' alanlarını (10.104) ve (10.106) ile bulduğumuz \vec{E} ve \vec{B} cinsinden ifade etmektir. (10.100) ve (10.109) formülleri kullanılırsa

$$E'_y = \left(\frac{\gamma'}{\gamma_0}\right) \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B'_z = -\left(\frac{\gamma'}{\gamma_0}\right) \mu_0 \sigma v' \quad (10.110)$$

Parantez içindeki oran değişik yazılır:

$$\frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \frac{(1 + vv_0/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right) \quad (10.111)$$

Burada

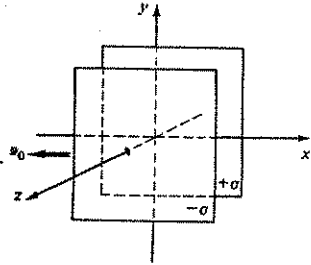
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.112)$$

bildiğimiz ifadedir. Buna göre,

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right) \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma \left(E_y - \frac{v}{c^2 \epsilon_0 \mu_0} B_z\right) \\ B'_z &= -\gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right) \mu_0 \sigma \left(\frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2}\right) = \gamma (B_z - \epsilon_0 \mu_0 v E_y) \end{aligned}$$

veya, $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\left. \begin{aligned} E'_y &= \gamma (E_y - v B_z) \\ B'_z &= \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) \end{aligned} \right\} \quad (10.113)$$



Şekil 10.40

Bu iki bileşenin dönüşüm kuralından sonra, şimdi de E_x ve B_y bileşenlerini bulmak için aynı kapasitörü bu kez xy düzlemine paralel olarak yerleştiririz. Buna göre, S sistemindeki alanlar şöyledir (Şek. 10.40):

$$E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = \mu_0 \sigma v_0$$

(B_y nin işaretini sağ el kuralıyla kontrol edin.) Yine aynı düşünce yöntemi izlenirse, tüm sonuçlarda $E_y \rightarrow E_z$ ve $B_z \rightarrow -B_y$ olur:

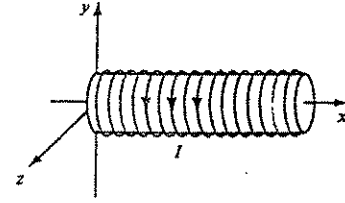
$$\left. \begin{aligned} E'_x &= \gamma (E_x + v B_y) \\ B'_y &= \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_x\right) \end{aligned} \right\} \quad (10.114)$$

x -bileşenleri, daha önce gördüğümüz gibi (kapasitör yz düzlemine paralel alınır):

$$E'_x = E_x \quad (10.115)$$

Bu sistemde magnetik alanın x -bileşeni olmadığından, B_x için dönüşüm kuralını bulamayız. Bunun yerine, daha değişik bir sistem gözönüne alalım: x -eksenine paralel uzun bir solenoid S sisteminde durgun olsun (Şek. 10.41). Bobin içindeki magnetik alanı biliyoruz:

$$B_x = \mu_0 n I \quad (10.116)$$



Şekil 10.41

10.3. GÖRELİ ELEKTRODİNAMİK

Burada n birim uzunlukta sarım sayısı ve I geçen akımdır. S' sistemine geçildiğinde boy kısalması olacağından, n artar:

$$n' = \gamma n \quad (10.117)$$

Fakat, diğer yandan zaman *genleşir*. Solenoit'e birlikte giden S kronometresi yavaşlar, buna göre S' sisteminde akım (yani, birim zamanda geçen yük)

$$I' = \frac{1}{\gamma} I \quad (10.118)$$

olup nI çarpanında γ kalmaz. Buna göre

$$B'_x = B_x$$

olup, \vec{E} alanında olduğu gibi, \vec{B} 'nin hareket yönündeki bileşeni değişmez.

Şimdi tüm bu dönüşüm formüllerini bir araya getirelim:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & E'_y &= \gamma (E_y - v B_z) & E'_z &= \gamma (E_z + v B_y) \\ B'_x &= B_x & B'_y &= \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_x\right) & B'_z &= \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) \end{aligned} \quad (10.119)$$

İki özel durum önemlidir:

1. Eğer S sisteminde $\vec{B} = 0$ ise,

$$\vec{B}' = \gamma \frac{v}{c^2} (E_z \hat{j} - E_y \hat{k}) = \frac{v}{c^2} (E'_z \hat{j} - E'_y \hat{k})$$

veya, $\vec{v} = v \hat{i}$ olduğundan

$$\vec{B}' = -\frac{\vec{v} \times \vec{E}'}{c^2} \quad (10.120)$$

2. Eğer S sisteminde $\vec{E} = 0$ ise,

$$\vec{E}' = -\gamma v (B_z \hat{j} - B_y \hat{k}) = -v (B'_z \hat{j} - B'_y \hat{k})$$

veya

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}' \quad (10.121)$$

Daha açık bir deyişle, bir sistemdeki herhangi bir noktada \vec{E} veya \vec{B} alanı sıfır ise, diğer sistemlerde elektromagnetik alanlar daha basit olarak (10.120) ve (10.121) formülleriyle bulunur.

Örnek 10.13: Düzgün doğrusal hareket yapan noktasal bir yükün magnetik alanını bulun.

Çözüm: Parçacığın durgun olduğu S_0 -sisteminde magnetik alan her yerde sıfırdır. Buna göre, v hızıyla giden bir S sisteminde

$$\vec{B} = -\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$$

olur. Bu yükün elektrik alanını Örnek 10.12'de bulmuştuk[(10.103) denklemi]. Bu ifade kullanılırsa, magnetik alan

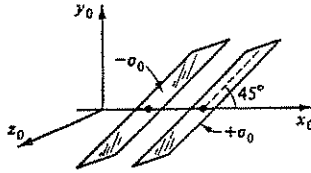
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv(1 - v^2/c^2) \sin \theta}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \frac{\vec{\phi}}{R^2} \quad (10.122)$$

olur; burada $\vec{\phi}$ gelen yüke baktığımızda, saat yönünün tersi yönde olur. Klasik limitte ($v^2 \ll c^2$), bu sonuç şöyle basitleşir:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{R}}{R^2}$$

Bu ifade, Biot-Savart yasasının fazla düşünmeden noktasal yüke uygulanmış halidir [bkz. (5.36) denklemi].

Problem 10.39 S_0 sisteminde hareketsiz olan bir düzlem kapasitörün levhaları x_0 eksenine 45° açı yapmakta ve levhalar üzerinde $\pm\sigma_0$ yüzey yükü bulunmaktadır (Şek. 10.42). Diğer bir S sistemi S_0 'a göre v hızıyla sağa doğru hareketlidir.



Şekil 10.42

- S_0 sistemindeki \vec{E}_0 elektrik alanını bulun.
- S sistemindeki \vec{E} elektrik alanını bulun.
- S sisteminde levhaların x -ekseniyle yaptığı açı ne kadardır?
- S sisteminde elektrik alan levhalara dik midir?

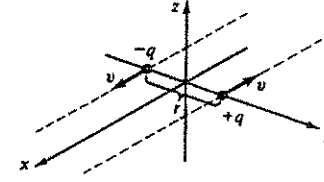
Problem 10.40 (a) Düzgün doğrusal hareket yapan noktasal yükün $\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = Q_{\text{ic}}/\epsilon_0$ Gauss yasasına uyduğunu, yükün merkezde olduğu R yarıçaplı bir küre yüzeyinde integral alarak gösterin.

(b) Düzgün doğrusal hareket yapan noktasal yükün Poynting vektörünü bulun. (Yük $+z$ yönünde v hızıyla gidiyor olsun; q yükü orijinden geçerken \vec{S} vektörünü hesaplayın.)

Problem 10.41 S sisteminde q_A yükü orijinde hareketsizdir. q_B yükü ise $y = d$ uzaklığında x -eksenine paralel bir hızla hareket etmektedir.

- q_B yükü y -ekseni üzerinden geçerken üzerine etkiyen elektromagnetik kuvvet ne olur?
- Şimdi aynı yükleri, sağa doğru v hızıyla giden S' sisteminde inceleyin. q_A yükü y' eksenini geçerken q_B üzerindeki kuvvet ne kadardır? [Bunu iki yolla hesaplayın: (i) (a) şıkındaki yanıtı ve kuvvetin dönüşüm formülünü kullanarak, (ii) S' sisteminde elektrik ve magnetik alanı hesaplayıp Lorentz kuvvetini kullanarak.]

Problem 10.42 Aralarında r uzaklığı bulunan iki $\pm q$ yükü aynı v hızlarıyla zıt yönlerde hareket etmektedirler. Birbirinin tam yanından geçerken $-q$ yükünün $+q$ yüküne uyguladığı kuvveti bulmak istiyoruz (Şek. 10.43). Aşağıdaki tabloda boş yerleri doldurun.



Şekil 10.43

	A sistemi (Şek. 10.43)	B sistemi (+q durgun)	C sistemi (-q durgun)
-q nun +q daki \vec{E} alanı			
-q nun +q daki \vec{B} alanı			
-q nun +q ya uyguladığı \vec{F}			

Problem 10.43 İki $\pm q$ yükü x -ekseni üzerinde karşı yönlerden sabit hızla orijine doğru yaklaşıyorlar. İki yük orijinde çarpışıp birbirine yapışıyor ve durgun bir nötr parçacık oluşturuyorlar. Çarpışmadan hemen önce ve sonra elektrik alanı yaklaşık olarak gösterin. (Elektromagnetik sinyalin ışık hızıyla yayıldığı hatırlayın.) Çarpışmadan sonraki elektrik alanı fiziksel olarak nasıl yorumlarsınız?

Problem 10.44 (a) $(\vec{E} \cdot \vec{B})$ skaler çarpımının görelî invariant olduğunu gösterin.

(b) $(E^2 - c^2 B^2)$ nin invariant olduğunu gösterin.

(c) Bir referans sisteminde *magnetik* alanın sıfır olduğu bir nokta vardır. Bu noktada *elektrik* alanın sıfır olduğu başka bir referans sistemi var mıdır?

Problem 10.45 Düzgün $\vec{E} = E_0 \hat{k}$ ve düzgün $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ alanlarının bulunduğu uzayda, bir q yükü orijinden ilk hızı bırakılıyor. Parçacığın yörüngesini bulmak amacıyla, önce $\vec{E} = 0$ olan referans sistemine geçin, yörüngeyi bu sistemde bulun ve sonra ilk sisteme dönüşüm yapın. $E_0 < cB_0$ olduğunu varsayın. Sonucu Örnek 5.2 ile karşılaştırın.

10.3.3 Alan Tansörü

Yukarda \vec{E} ve \vec{B} alanları için bulduğumuz dönüşüm bağıntıları, bunların iki ayrı 4-vektörün uzay bileşenleri gibi davranmadıklarını gösteriyor. Tersine, eylemsiz bir gözlemciden diğerine geçtiğimizde \vec{E} ve \vec{B} nin bileşenleri birbirine karışmaktadır. O halde, (10.119) dönüşüm bağıntılarına uyan ve altı bileşenli bu büyüklük ne olabilir? Yanıt: İkinci dereceden anti-simetrik bir tansör. 4-vektörlerin Lorentz dönüşümünü hatırlayalım:

$$a^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} a^{\nu} \quad (10.123)$$

(ν indisi üzerinden toplam alındığını unutmayalım.) Burada Λ Lorentz dönüşüm matrisidir. S' sistemi x -yönünde v hızıyla gidiyorsa

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.124)$$

Burada Λ^{μ}_{ν} μ . satır ve ν . sütun elemanıdır. İkinci dereceden (yani, iki indisi) bir tansör dönüşürken, herbir indis için birer Λ gerekir:

$$(t')^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\lambda} \Lambda^{\nu}_{\sigma} t^{\lambda\sigma} \quad (10.125)$$

Dört boyutta ikinci dereceden tansörün $4 \times 4 = 16$ elemanı vardır; bunu 4×4 bir tablo halinde yazalım:

$$t^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} t^{00} & t^{01} & t^{02} & t^{03} \\ t^{10} & t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ t^{20} & t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ t^{30} & t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{pmatrix}$$

Fakat, 16 elemanın herbiri farklı olmayabilir. Örneğin, *simetrik* tansör

$$t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu} \quad (\text{simetrik tansör}) \quad (10.126)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda köşegeni göre simetrik elemanlar eşit olur ($t^{01} = t^{10}$, $t^{02} = t^{20}$, $t^{03} = t^{30}$, $t^{12} = t^{21}$, $t^{13} = t^{31}$, $t^{23} = t^{32}$). 6 eleman tekrarlandığı için tansörün 10 farklı elemanı olabilir. Benzer şekilde, *antisimetrik* tansör

$$t^{\mu\nu} = -t^{\nu\mu} \quad (\text{antisimetrik tansör}) \quad (10.127)$$

tanımlanırsa, bunun 6 farklı elemanı olabilir; daha önceki 6 eleman eksi işaretli olarak tekrarlanır ve köşegen üzerindeki dört eleman (t^{00} , t^{11} , t^{22} , t^{33}) sıfırdır. Buna göre, en genel antisimetrik tansör şöyle olur:

$$t^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & t^{01} & t^{02} & t^{03} \\ -t^{01} & 0 & t^{12} & t^{13} \\ -t^{02} & -t^{12} & 0 & t^{23} \\ -t^{03} & -t^{13} & -t^{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Şimdi, (10.125) dönüşüm kuralının antisimetrik tansörü nasıl dönüştürdüğüne bakalım:

$$(t')^{01} = \Lambda_0^0 \Lambda_1^1 t^{\lambda\sigma}$$

Fakat, (10.124) denklemine göre $\lambda = 0, 1$ dışında $\Lambda_\lambda^0 = 0$ olacaktır; benzer şekilde $\sigma = 0, 1$ dışında $\Lambda_\sigma^1 = 0$ olur. O halde, çift toplamadan dört terim gelir:

$$(t')^{01} = \Lambda_0^0 \Lambda_1^1 t^{00} + \Lambda_0^0 \Lambda_1^1 t^{01} + \Lambda_1^0 \Lambda_0^1 t^{10} + \Lambda_1^0 \Lambda_1^1 t^{11}$$

Antisimetrik tansör için $t^{00} = t^{11} = 0$ ve $t^{01} = -t^{10}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$(t')^{01} = (\Lambda_0^0 \Lambda_1^1 - \Lambda_1^0 \Lambda_0^1) t^{01} = [\gamma^2 - (\gamma\beta)^2] t^{01} = t^{01}$$

bulunur. Diğer elemanların dönüşüm hesabını size bırakıyorum. Sonuçlar şöyledir:

$$\left. \begin{aligned} (t')^{01} &= t^{01} & (t')^{02} &= \gamma(t^{02} - \beta t^{12}) & (t')^{03} &= \gamma(t^{03} + \beta t^{31}) \\ (t')^{23} &= t^{23} & (t')^{31} &= \gamma(t^{31} + \beta t^{03}) & (t')^{12} &= \gamma(t^{12} - \beta t^{02}) \end{aligned} \right\} \quad (10.128)$$

Oysa bu ifadeler, elektromagnetik alan için bulduğumuz (10.119) dönüşüm formülleriyle aynı yapıdadır. Karşılıklı elemanlara bakarak $F^{\mu\nu}$ ile göstereceğimiz **alan tansörü** elemanları şöyle kurulabilir:

$$F^{01} = \frac{E_x}{c}, \quad F^{02} = \frac{E_y}{c}, \quad F^{03} = \frac{E_z}{c}, \quad F^{12} = B_z, \quad F^{31} = B_y, \quad F^{23} = B_x$$

Alan tansörünü bir tablo olarak gösterelim:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (10.129)$$

Böylece, Oersted tarafından başlatılan elektrik ve magnetik alanları birleştirme umudu, görelilik teorisıyla hedefine ulaşmış olmaktadır.

Alan tansörüne dikkatle bakarsanız, \vec{E} ve \vec{B} alanlarının farklı yerleştirildiklerini görürsünüz. (10.119) ifadelerinin ilk satırı (10.128) ifadelerinin ikinci satırı olarak alınmış, diğer satır da yer değiştirmiştir. Bunu böyle yapmak yerine, birinci satırları aynı şekilde yerleştirmek istersek $G^{\mu\nu}$ ile gösterilen **dual tansör** elde edilir:

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z/c & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix} \quad (10.130)$$

$G^{\mu\nu}$ tansörü $F^{\mu\nu}$ tansöründe $\vec{E}/c \rightarrow \vec{B}$ ve $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}/c$ değişimleri yapılarak elde edilebilir. Bu işlem (10.119) ifadelerini değiştirmez; her iki tansör de \vec{E} ve \vec{B} dönüşümlerini doğru olarak verirler.

Problem 10.46 (10.128) bağıntılarının son beş tanesini çıkarın.

Problem 10.47 Bir tansörün simetri özelliğinin (yani, simetrik veya antisimetrik oluşunun) Lorentz dönüşümü altında korunduğunu gösterin.

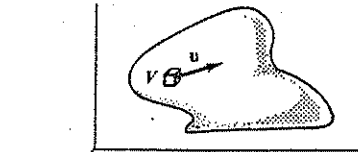
Problem 10.48 *Kontravariant* 4-vektörün sıfırinci bileşeninin işareti değişirse *kovariant* oluyordu. Aynı durum, tansörler için de geçerlidir: İndislerden biri alta geçtiğinde, indis sıfırinci ise işaret değişir. Buna göre, aşağıdaki tansör invariantları \vec{E} ve \vec{B} cinsinden hesaplayın:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

Sonuçları Problem 10.44 ile karşılaştırın.

Problem 10.49 z -ekseni doğrultusunda sonsuz doğrusal tel üzerinde λ boyca yük yoğunluğu vardır. Tel $+z$ yönünde v hızıyla hareket ediyor. $(x, 0, 0)$ noktasında alan tansörü ve dual tansörü kurun.

10.3.4 Tansör Gösteriminde Elektrodinamik



Şekil 10.44

Görelî notasyonda elektromagnetik alanları nasıl göstereceğimizi öğrendikten sonra, şimdi elektrodinamik yasalarını—Maxwell denklemleri ve Lorentz kuvvetini—aynı dilde ifade edebiliriz. Önce, ρ ve \vec{J} kaynaklarının nasıl dönüştüğüne bakalım. Hareketli bir yük dağılımı gözönüne alalım; küçük bir V hacmi içindeki Q yükü u hızıyla gidiyor olsun (Şek. 10.44). Bu hacim içindeki yük yoğunluğu

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

ve akım yoğunluğu

$$\vec{J} = \rho \vec{u}$$

olur. (Burada V içinde aynı hızla giden tek tip yük olduğunu varsayalım. Zıt yükler varsa $\vec{J} = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_-$ alınır, fakat düşünce yöntemi aynıdır.) Bu büyüklükleri yükün hareketsiz olduğu referans sistemindeki "öz" yük yoğunluğu ρ_0 cinsinden yazmak istiyoruz:

$$\rho_0 = \frac{Q}{V_0}$$

Burada V_0 durgun yük yoğunluğunun hacmidir. Lorentz kısalması sadece hareket yönündeki boyutu etkileyeceğinden

$$V = \sqrt{1 - u^2/c^2} V_0 \quad (10.131)$$

ve buna bağlı olarak

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \vec{J} = \frac{\rho_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.132)$$

olur. (10.43) ve (10.45) denklemleriyle karşılaştırsak, öz hız 4-vektörünün invariant ρ_0 ile çarpılmış olduğunu görürüz. O halde, yük yoğunluğu ve akım yoğunluğu birlikte bir 4-vektör oluştururlar:

$$J^\mu = \rho_0 \eta^\mu \quad (10.133)$$

Akım yoğunluğu 4-vektörü denilen bu büyüklüğün bileşenleri şöyle olur:

$$J^\mu = (c\rho, J_x, J_y, J_z) \quad (10.134)$$

Yerel yük korunumunu veren süreklilik denkleminin (5.25) ifadesini hatırlayalım:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Bu denklemi J^μ cinsinden yazabilmek istersek

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial J^i}{\partial x^i}$$

ve

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial J^0}{\partial t} = \frac{\partial J^0}{\partial x^0} \quad (10.135)$$

olur. $\partial \rho / \partial t$ terimini de sol tarafa alırsak

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (10.136)$$

bulunur; burada μ üzerinden toplama vardır. $(\partial J^\mu / \partial x^\mu)$ akım yoğunluğu 4-vektörünün dört-boyutlu diverjans olur. Buna göre, akım yoğunluğunun diverjansı sıfırdır.

Maxwell denklemlerine gelince, tümü şöyle özetlenebilir:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (10.137)$$

Burada ν üzerinden toplama vardır. Herbir ifade, μ indisinin aldığı herbir değere karşılık gelen, dört denklemi temsil eder. Önce $\mu = 0$ indisli denkleme bakalım:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \mu_0 J^0 = \mu_0 c\rho \end{aligned}$$

veya, $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ alınırsa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

bulunur. Bu, bildiğimiz Gauss yasasıdır.

$\mu = 1$ indisli denkleme bakalım:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ &= \left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{B} \right]_x = \mu_0 J^1 = \mu_0 J_x \end{aligned}$$

Bu ifadeyi $\mu = 2$ ve $\mu = 3$ indisli denklemlerle birleştirdiğimizde

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

bulunur. Bu, 4. Maxwell denklemdir.

(10.137) deki ikinci denklemin $\mu = 0$ bileşeni yazılırsa

$$\frac{\partial G^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial G^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial G^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial G^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial G^{03}}{\partial x^3} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Bu, üçüncü Maxwell denklemdir. $\mu = 1$ bileşenini yazalım:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{1\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial G^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial G^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial G^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial G^{13}}{\partial x^3} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} \right)_x = 0 \end{aligned}$$

$\mu = 2$ ve $\mu = 3$ benzer ifadeleriyle birleştirdiğimizde

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

olur. Bu, Faraday yasasıdır. Görüldüğü gibi, Maxwell'in karmaşık görünümlü dört denkleminin yerini basit iki denklem almaktadır.

Bir q yüküne etkiyen Minkowski kuvveti şöyle ifade edilir:

$$K^\mu = q \eta_\nu F^{\mu\nu} \quad (10.138)$$

Bunun $\mu = 1$ indisli bileşenini açalım:

$$\begin{aligned} K^1 &= q \eta_\nu F^{1\nu} = q(-\eta^0 F^{10} + \eta^1 F^{11} + \eta^2 F^{12} + \eta^3 F^{13}) \\ &= q \left[\frac{-c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(\frac{-E_x}{c} \right) + \frac{u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} B_z + \frac{u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} (-B_y) \right] = \frac{q [\vec{E} + (\vec{u} \times \vec{B})]_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned}$$

$\mu = 2$ ve $\mu = 3$ için bulunan ifadelerle birleştirirsek

$$\vec{K} = \frac{q[\vec{E} + (\vec{u} \times \vec{B})]}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.139)$$

olur. Buradan (10.82) bağıntısıyla \vec{F} kuvvetine geçilirse

$$\vec{F} = q[\vec{E} + (\vec{u} \times \vec{B})]$$

bildiğimiz Lorentz kuvveti elde edilir. O halde, (10.138) denklemi Lorentz kuvvetinin görelî notasyondaki ifadesi olur. (Sıfırncı bileşenin yorumunu Problem 10.53 olarak size bırakıyorum.)

Problem 10.50 \vec{D} ve \vec{H} alanlarıyla bir tansör kurun ve bu tansör cinsinden madde ortamında Maxwell denklemlerini ifade edin. Burada J^μ serbest akım yoğunluğu 4-vektörünü kullanın.

Problem 10.51 Süreklilik denkleminin (10.136) ifadesini Maxwell denklemlerinin (10.137) ifadesinden elde edin.

Problem 10.52 (10.137) deki ikinci denklemin $F^{\mu\nu}$ cinsinden şöyle ifade edilebileceğini gösterin:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (10.140)$$

Problem 10.53 Minkowski kuvvetinin (10.138) ifadesindeki sıfırncı bileşeni hesaplayın ve fiziksel anlamını yorumlayın.

10.3.5 Görelî Elektrodinamiğin Potansiyel Formülasyonu

Elektrik ve magnetik alanların skaler bir V ve vektörel bir \vec{A} potansiyeli cinsinden ifade edildiğini biliyoruz:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (10.141)$$

Kolayca görüldüğü gibi, V ve \vec{A} birlikte bir 4-vektör oluştururlar:

$$A^\mu = (V/c, A_x, A_y, A_z) \quad (10.142)$$

Bu 4-vektör potansiyeli cinsinden alan tansörü şöyle ifade edilir:

$$F^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) \quad (10.143)$$

(Kısmi türevin *kovariant* x_μ vektörüne göre alındığına dikkat edin. Bu noktayı Problem 10.54'de açacağız.) Bu ifadenin (10.141) denklemlerine eşdeğer olduğunu görmek için birkaç terimi hesaplayalım. Örneğin, $\mu = 0, \nu = 1$ için

$$F^{01} = \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^0} - \frac{\partial A^0}{\partial x^1} \right) = \left[-\frac{\partial A_x}{\partial(ct)} - \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial x} \right] = -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}V \right]_x = \frac{E_x}{c}$$

10.3. GÖRELİ ELEKTRODİNAMİK

Bu, ve $\nu = 2, 3$ için bulunacak ifadeler (10.141) deki birinci denklem olur. $\mu = 1, \nu = 2$ alındığında ise

$$F^{12} = \left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = B_z$$

olur; F^{13} ve F^{23} ile birlikte (10.141) deki ikinci denklemi buluruz.

Potansiyel ifadeleri "homojen" Maxwell denklemlerini (yani, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ve $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ denklemlerini, veya tansör ifadesiyle, $\partial G^{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$ denklemini) otomatik olarak sağlarlar. Homojen olmayan diğer iki denklem (tansör ifadesiyle, $\partial F^{\mu\nu}/\partial x^\nu = \mu_0 J^\mu$) şöyle ifade edilir:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \mu_0 J^\mu \quad (10.144)$$

Bu karmaşık ifadeyi indirgemek için, potansiyellerin ayar seçiminin keyfi olduğunu hatırlayalım. Bu amaçla, keyfi bir λ fonksiyonu alıp

$$A^{\mu'} = A^\mu + \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} \quad (10.145)$$

şeklinde değiştirdiğimizde, (10.143) denklemine göre, $F^{\mu\nu}$ değişmeyecektir. Bu, Bölüm 7'de incelediğimiz "ayar serbestliği"dir. Özel olarak, Lorentz ayarı [(7.72) denklemi]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

veya, görelî notasyonda

$$\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} = 0 \quad (10.146)$$

seçilirse, (10.144) denklemi şöyle basitleşir:

$$\square^2 A^\mu = -\mu_0 J^\mu \quad (10.147)$$

Burada \square^2 d'Alembertian operatörüdür:

$$\square^2 = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (10.148)$$

(10.144) denklemi (7.76) daki iki denklemin aynı çerçevede içinde ve daha basit olarak verilebilmektedir.¹

Problem 10.54 Metinde dikkat ettiyseniz, dört-boyutlu gradyan operatörü $\partial/\partial x^\mu$ *kovariant* bir 4-vektör gibi davranmaktadır. (Bu nedenle, daha kısa olarak ∂_μ ile gösterilir.) Örneğin, süreklilik denklemi $\partial_\mu J^\mu$ ifadesi iki vektörün invariant çarpımı gibidir. Buna karşılık gelen *kontravariant* gradyan $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$ olmalıdır. ϕ skaler bir fonksiyon ise, $\partial^\mu \phi$ nin kontravariant bir 4-vektör gibi davrandığını gösterin. (Zincir kuralını uygulayın.)

Problem 10.55 (10.143) potansiyel temsilinin $\partial G^{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$ denklemini otomatik olarak sağladığını gösterin. (Yol gösterme: Problem 10.52'ye bakın.)

¹ Bu işlemlerde *Coulomb* ayarı seçilirse sonuç felaket olur, çünkü $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ koşulu Lorentz dönüşümünde bozulur. Bu bakımdan, *Coulomb* ayarında A^μ gerçek bir 4-vektör olmaz.

! Problem 10.56 (9.116) Larmor formülünü ve özel göreliliği kullanarak, (9.119) Liénard formülünü çıkarın.

Problem 10.57 (9.126) Abraham-Lorentz formülünün en doğal görelî ifadesinin

$$K_{\text{rad}}^{\mu} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{d\alpha^{\mu}}{d\tau}$$

olacağı düşünülebilir. Bu, gerçekten bir 4-vektördür ve $v \ll c$ klasik limitinde Abraham-Lorentz formülüne gider.

(a) Fakat, bu ifadenin Minkowski kuvveti olamayacağını gösterin (Problem 10.36'ya bakın.)

(b) Bu ifadenin sağ tarafına, 4-vektör karakterini veya klasik limitini bozmadan, eklenecek bir düzeltme terimi, (a) şıkındaki itirazı ortadan kaldırır. Bu ek terimi bulun.

Problem 10.58 Görelî elektrodinamiğin (10.137) ve (10.138) yasalarını, magnetik yük içerecek şekilde genelleştirin. (Kısım 7.3.3 'ü tekrar okuyun.)

BÖLÜM 10 ÜZERİNE EK PROBLEMLER

Problem 10.59 S sistemine göre hareket eden bir S' sisteminin sabit hızı $\vec{v} = \beta c(\cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j})$ olarak veriliyor. (Eksenler birbirine paralel ve $t = t' = 0$ anında orijinler çakışmıştır.) Λ Lorentz dönüşüm matrisini [(10.29) denklemini] bulun.

Yanıt:
$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \cos\phi & -\gamma\beta \sin\phi & 0 \\ -\gamma\beta \cos\phi & \gamma(\cos^2\phi + \sin^2\phi) & (\gamma-1)\sin\phi \cos\phi & 0 \\ -\gamma\beta \sin\phi & (\gamma-1)\sin\phi \cos\phi & \gamma(\sin^2\phi + \cos^2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problem 10.60 $\pi + p \rightarrow K + \Sigma$ reaksiyonunun olabilmesi için pionun "eşik" (minimum) momentumu ne kadar olmalıdır? Başlangıçta p durumdur. Sayısal olarak $m_{\pi}c^2 = 150$, $m_Kc^2 = 500$, $m_p c^2 = 900$ ve $m_{\Sigma}c^2 = 1200$ MeV alın. (Yol gösterme: Minimum koşulunu bulmak için, çarpışmayı kütle-merkezi sisteminde inceleyin (Problem 10.28). [Yanıt: 1133 MeV/c]

Problem 10.61 Kütlesi m ve hızı v olan bir parçacık, durgun diğer bir özdeş parçacıkla elastik olarak çarpışıyor. Klasik mekanikte giden parçacıklar arasındaki θ açısı daima 90° olur. Bu açıyı görelî olarak, kütle merkezi sistemindeki ϕ saçılma açısı cinsinden hesaplayın. Belli bir v hızı için θ açısının minimum ve maksimum değerleri ne olur? (Yanıt: $\tan\theta = (2c^2/v^2)\gamma \sin\phi$)

Problem 10.62 x -yönünde sabit bir Minkowski kuvveti etkisiyle hareket eden bir cismin x konumunu t nin fonksiyonu olarak bulun. Yanıtınızı t nin kapalı bir fonksiyonu olarak bırakabilirsiniz.

(Yanıt: $(2Kt/mc) = z\sqrt{1+z^2} + \ln(z + \sqrt{1+z^2})$ ve $z = \sqrt{2Kx/mc^2}$)

! Problem 10.63 Herbirinin kütlesi m olan $\pm q$ yükleri d uzunlukta kütsüz bir çubuğun iki ucuna konularak bir elektrik dipol oluşturulmuştur. (d 'nin küçük olduğunu varsaymayın.)

(a) Dipol kendi eksenine dik doğrultuda (10.76) denkleminde verilen hareketi yaptığında, dipolün kendi üzerine uyguladığı kuvveti bulun. (Yol gösterme: (9.136) ifadesini uygun şekilde değiştirerek başlayın.)

Bu kuvvetin sabit (t den bağımsız) ve x -yönünde olduğuna dikkat edin. Buna göre, dipolün kendini besleyen ivmeli hareket yapabileceği anlaşılır! Bu enerji sizce nereden gelmektedir?

(b) Bu kendini besleyen F kuvvetini m , q ve d cinsinden bulun.

PROBLEMLER

(Yanıt: $(2mc^2/d)\sqrt{(\mu_0 q^2/8\pi md)^{2/3} - 1}$)

Problem 10.64 S sistemine göre x -yönünde v hızıyla gitmekte olan bir S' sisteminin orijininde ideal bir \vec{m} magnetik dipol momenti vardır. Buna göre, S' sisteminde vektör potansiyel [(5.79) denklemini]

$$\vec{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}'}{r'^2}$$

olup, V' elektrik potansiyeli sıfırdır.

(a) S sistemindeki V skaler potansiyelini bulun.

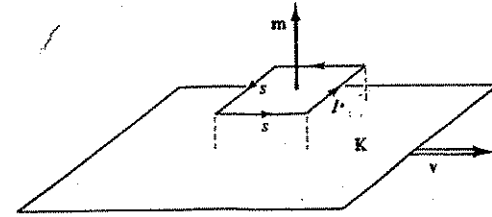
(b) Klasik limitte ($v \ll c$), S sistemindeki skaler potansiyelin

$$\vec{p} = \frac{\vec{v} \times \vec{m}}{c^2}$$

büyükte ve O' noktasında bulunan ideal bir elektrik dipol potansiyeli olduğunu gösterin.

(Yanıt: $(1/4\pi\epsilon_0)(\vec{R} \cdot (\vec{v} \times \vec{m})/c^2 R^2)(1 - v^2/c^2)/(1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta)^{3/2}$)

! Problem 10.65 Üzerinde düzgün $\vec{K} = K\hat{i}$ yüzey akım yoğunluğu bulunan sonsuz düzlemin üst tarafında hareketsiz bir $\vec{m} = m\hat{k}$ magnetik dipolü bulunmaktadır (Şek. 10.45)



Şekil 10.45

(a) Dipole etkiyen torku (6.1) formülüyle hesaplayın.

Şimdi yüzey akımının düzgün bir σ yüzey yük yoğunluğunun $\vec{v} = v\hat{i}$ hızıyla hareketinden kaynaklandığını düşünürsek $\vec{K} = \sigma\vec{v}$ olur. Ayrıca, magnetik dipolün de düzgün λ boyca yük yoğunluğunun bir kenarı s olan kare çerçevede aynı v hızıyla dönmelerinden kaynaklandığını varsayarsak $m = \lambda v s^2$ olur. Bu dağılımı x -yönünde v hızıyla giden bir S' referans sisteminde inceleyin. S' sisteminde yüzey yükü hareketsiz olduğundan magnetik alan oluşturmaz.

(b) S' sisteminde akım çerçevesinin bir elektrik dipol oluşturduğunu gösterin ve buna etkiyen torku (4.4) formülüyle hesaplayın.

Problem 10.66 Bir S referans sistemindeki belli bir noktada \vec{E} ve \vec{B} alanları birbirine dik veya paralel olmayıp, herhangi yönlere sahiptir. Eğer, S ye göre hareket eden bir S' sisteminin hızı

$$\frac{\vec{v}}{1 + v^2/c^2} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2 + E^2/c^2}$$

olarak seçilirse, bu noktada \vec{E}' ve \vec{B}' alanlarının paralel olacağını gösterin. İki alanın birbirine dik olacağı bir S'' sistemi var mıdır?

EKLER

Ek A. EĞRİSEL KOORDİNATLARDA VEKTÖR HESABI

GİRİŞ

Bu ekte vektör diferansiyel hesabının üç temel teoreminin ispatını vereceğim. Amacım düşünce yönteminin ana hatlarını göstermektir, yoksa her epsilon ve delta hesabın ayrıntılarına girmeyeceğim. Ayrıntılar matematik ders kitaplarında bulunabilir.

Konuyu genel tutmak amacıyla, eğrisel (u, v, w) koordinatları adını kullanacağım. Böylece gradyan, diverjans, rotasyonel ve Laplasyenin her koordinat sisteminde (Kartezyen, küresel, silindirik veya daha başka koordinatlarda) bulunmasına yarayacak ifadeler çıkaracağım.

NOTASYON

Uzayda bir nokta (u, v, w) koordinatları verilmekle belirtilmiş olur. Bu, Kartezyen koordinatlarda (x, y, z) ; küresel koordinatlarda (r, θ, ϕ) , veya silindirik koordinatlarda (r, ϕ, z) olabilir. Bu koordinat sisteminin *ortogonal* (dik) olduğunu varsayacağız; yani herbir koordinatın artış yönünde seçilen $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ birim vektörleri birbirine dik olacaktır (Kartezyen, küresel ve silindirik koordinatlarda bu doğrudur). Dikkat edilirse, (Kartezyen koordinatlar dışında) birim vektörler *konumun fonksiyonu* olurlar. Verilen bir noktadaki küçük bir yerdeğiştirme vektörü, bu $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ birim vektörleri ile (u, v, w) konumundan itibaren küçük (du, dv, dw) artışları cinsinden daima ifade edilebilir:

$$d\vec{l} = f du \hat{u} + g dv \hat{v} + h dw \hat{w} \quad (A.1)$$

Buradaki f, g, h her koordinat sistemine özgü ve konuma bağlı birer fonksiyondur. Örneğin, Kartezyen koordinatlarda $f = g = h = 1$, küresel koordinatlarda $f = 1, g = r, h = r \sin \theta$ ve silindirik koordinatlarda $f = h = 1, g = r$ olur. Daha sonra görüleceği üzere, bu üç fonksiyon bir koordinat sistemi hakkında bilmek istediğimiz herşeyi verirler.

GRADYAN

(u, v, w) noktasından $(u + du, v + dv, w + dw)$ noktasına küçük bir yerdeğiştirme sonucu, skaler bir $t(u, v, w)$ fonksiyonundaki artış zincir kuralıyla bulunur:

$$dt = \frac{\partial t}{\partial u} du + \frac{\partial t}{\partial v} dv + \frac{\partial t}{\partial w} dw \quad (A.2)$$

Bu ifadeyi bir skaler çarpım şeklinde yazabiliriz:

$$dt = \vec{\nabla} t \cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla} t)_u f du + (\vec{\nabla} t)_v g dv + (\vec{\nabla} t)_w h dw \quad (A.3)$$

Bunun doğru olabilmesi için

$$(\vec{\nabla} t)_u = \frac{1}{f} \frac{\partial t}{\partial u} \quad (\vec{\nabla} t)_v = \frac{1}{g} \frac{\partial t}{\partial v} \quad (\vec{\nabla} t)_w = \frac{1}{h} \frac{\partial t}{\partial w}$$

olarak seçilmelidir. O halde, skaler t fonksiyonunun *gradyanı* şöyle tanımlanır:

$$\vec{\nabla} t = \frac{1}{f} \frac{\partial t}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{g} \frac{\partial t}{\partial v} \hat{v} + \frac{1}{h} \frac{\partial t}{\partial w} \hat{w} \quad (A.4)$$

A. EĞRİSEL KOORDİNATLARDA VEKTÖR HESABI

397

Böylece, istediğimiz koordinat sisteminin f, g, h fonksiyonları Tablo A.1 den alınarak Kartezyen, küresel veya silindirik koordinatlarda gradyan ifadesini doğrudan yazabiliriz. Bu ifadeler kitabın ön kapağı içinde bulunabilir.

Tablo A.1

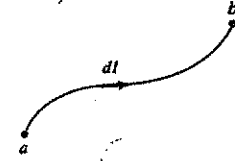
	u	v	w	f	g	h
Kartezyen	x	y	z	1	1	1
Küresel	r	θ	ϕ	1	r	$r \sin \theta$
Silindirik	r	ϕ	z	1	r	1

(A. 3) denkleminde göre, bir a noktasından diğer bir b noktasına gidildiğinde (Şek. A.1), t fonksiyonundaki *toplam* artış şöyle olur:

$$t(b) - t(a) = \int_a^b dt = \int_a^b (\vec{\nabla} t) \cdot d\vec{l} \quad (A.5)$$

Bu, gradyanın temel teoremidir. İntegralin a 'dan b 'ye gidilen yoldan bağımsız olduğuna dikkat edelim.

Şekil A.1



DİVERJANS

Şimdi şöyle bir vektör fonksiyon alalım:

$$\vec{V}(u, v, w) = V_u \hat{u} + V_v \hat{v} + V_w \hat{w}$$

(u, v, w) noktasında herbir koordinatı sonsuz küçük artırarak elde ettiğimiz prizma hacmini saran *kapalı* yüzeyi gözönüne alalım (Şek. A.2). Bu yüzey üzerinde $\oint \vec{V} \cdot d\vec{a}$ integralini hesaplamak istiyoruz. Koordinat sistemi ortogonal olduğundan, prizmanın sonsuz küçük $(f du)$, $(g dv)$ ve $(h dw)$ kenarları birbirine dik olacaktır. O halde, hacim

$$d\tau = (fgh) du dv dw \quad (A.6)$$

(Kenar uzunluklarının sadece du, dv, dw olmadığına dikkat edin—örneğin, w bir açı ise, dw uzunluk boyutunda bile olmaz. Doğru ifade (A.1) denkleminde gelir.)

Prizmanın *ön* yüzünde

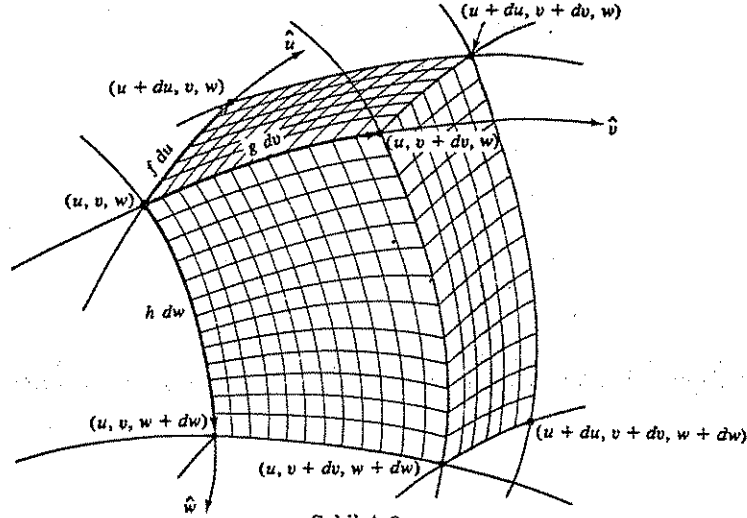
$$d\vec{a} = -(g dv)(h dw) \hat{u} = -(gh) dv dw \hat{u}$$

olduğundan, bu yüzde integrandın değeri şöyle olur:

$$\vec{V} \cdot d\vec{a} = -(gh V_u) dv dw$$

Arka yüzeyde işaret değişir ve bu kez $(gh V_u)$ integrandının u 'daki değil, $u + du$ 'daki değeri alınmalıdır. Diferansiyeli alınabilen her $F(u)$ fonksiyonu için

$$F(u + du) - F(u) = \frac{dF}{du} du$$



Şekil A.2

olduğundan, ön ve arka yüzeyin integrale toplam katkısı şöyle olacaktır:

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} (ghV_u) \right] du dv dw = \frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial u} (ghV_u) d\tau$$

Benzer şekilde, sol ve sağ yüzeylerin toplam katkısı

$$\frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial v} (fhV_v) d\tau$$

Son olarak, alt ve üst yüzeylerin toplam katkısı

$$\frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial w} (fgV_w) d\tau$$

olur. O halde, toplam yüzey integrali yazılabilir:

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{fgh} \left[\frac{\partial}{\partial u} (ghV_u) + \frac{\partial}{\partial v} (fhV_v) + \frac{\partial}{\partial w} (fgV_w) \right] d\tau \quad (A.7)$$

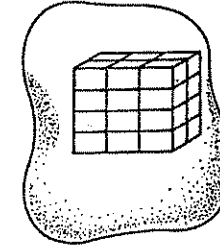
$d\tau$ hacim elemanı önündeki katsayı eğrisel koordinatlarda *diverjansın* tanımındır:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{fgh} \left[\frac{\partial}{\partial u} (ghV_u) + \frac{\partial}{\partial v} (fhV_v) + \frac{\partial}{\partial w} (fgV_w) \right] \quad (A.8)$$

Buna göre, (A.7) denklemi şöyle olacaktır (sonsuz küçük aralık için $\int F du = F du$ alabiliriz):

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{a} = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) d\tau \quad (A.9)$$

Bu, diverjans teoremidir. O halde, Tablo A.1'deki katsayıları kullanarak her koordinat sisteminde diverjansı hesaplayabilirsiniz. Bu ifadeler ön kapak içinde verilmiştir.



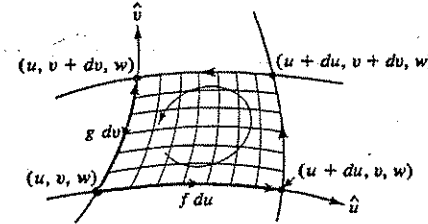
Şekil A.3

(A.9) denklemi diverjans teoreminin ispatı sayılmaz, çünkü sonsuz küçük bir hacim alınmıştır. Gerçi, sonlu bir hacim çok sayıda küçük parçaların toplamı olarak düşünülür (Şek. A.3) ve her birine (A.9) denklemi uygulanabilir. Bu parçaların toplamı alındığında, dış yüzeyde bir integral yanısıra, çok sayıda iç yüzey integrali çıkar. Fakat bu yüzey integrallerinde, komşu iki yüzey üzerinde normal vektörler zıt yönde olduğundan, bunlar ikiye gruplar halinde birbirini sıfırlar. O halde, (A.9) formülü sonlu hacimler için de geçerlidir.

ROTASYONEL

Şek. A.4 'de kapalı bir eğri şöyle oluşturulmuştur: Bir (u, v, w) noktasından başlayıp w koordinatı sabit tutulmuş, u ve v koordinatları sonsuz küçük miktarlarda artırılarak dikdörtgen bir çerçeve elde edilmiştir. Bu kapalı eğri üzerinde şöyle bir integrali ele alalım:

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{l}$$



Şekil A.4

Kenarlar sonsuz küçük olduğundan, bu dikdörtgenin alan elemanı

$$d\vec{a} = (f du)(g dv) \vec{w} = (fg) du dv \vec{w} \quad (A.10)$$

olur. (Koordinat sistemi (u, v, w) sırasına göre ortogonal ise, şekilde \vec{w} vektörü sayfa düzlemi dışına olur. $d\vec{a}$ bu yönde seçildikten sonra, eğri üzerinde pozitif gidiş yönü saat yönü tersine olmak zorundadır.)

Egrinin alt kenarında uzunluk elemanı

$$d\vec{l} = f du \vec{u}$$

ve bu kenarın integrale katkısı

$$\vec{V} \cdot d\vec{l} = (fV_u) du$$

olur. Üst kenarda işaret değişir ve fV_u terimi $(v+dv)$ değerinde hesaplanır. Bu iki kenar birlikte alındığında

$$[-(fV_u)_{v+dv} + (fV_u)_v] du = - \left[\frac{\partial}{\partial v} (fV_u) \right] du dv$$

olur. Benzer şekilde sağ ve sol kenarların birlikte katkısı bulunur:

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(gV_v) \right] du dv$$

Böylece eğrisel integrale toplam katkı yazılabilir:

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \left[\frac{\partial}{\partial u}(gV_v) - \frac{\partial}{\partial v}(fV_u) \right] du dv = \frac{1}{fg} \left[\frac{\partial}{\partial u}(gV_v) - \frac{\partial}{\partial v}(fV_u) \right] \hat{w} \cdot d\vec{a} \quad (A.11)$$

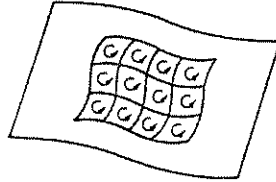
Sağ tarafta $d\vec{a}$ nın katsayısı \vec{V} 'nin rotasyonelinin w bileşenini tanımlar. Diğer u ve v bileşenleri de benzer şekilde tanımlanırsa, rotasyonel vektörü şöyle olur:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{gh} \left[\frac{\partial}{\partial v}(hV_w) - \frac{\partial}{\partial w}(gV_v) \right] \hat{u} + \frac{1}{fh} \left[\frac{\partial}{\partial w}(fV_u) - \frac{\partial}{\partial u}(hV_w) \right] \hat{v} + \frac{1}{fg} \left[\frac{\partial}{\partial u}(gV_v) - \frac{\partial}{\partial v}(fV_u) \right] \hat{w} \quad (A.12)$$

Bu tanıma göre, (A.11) denklemi şöyle ifade edilir:

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{a} \quad (A.13)$$

Bu, Stokes teoremidir. Tablo A.1'deki parametreler kullanılarak her koordinat sisteminde rotasyonel ifadesi bulunabilir.



Şekil A.5

(A.13) denklemi Stokes teoreminin genel ispatı sayılmaz, çünkü sonsuz küçük bir yüzey alınmıştır. Fakat, sonlu bir yüzeyi çok küçük parçalara böler (Şek. A.5) ve herbir parçaya (A.13) denklemini uygulayabiliriz. Bu küçük yüzey parçalarının katkıları toplandığında, içte kalan eğrisel integraller, komşu iki kenar arasında zıt yönde gidildiği için, ikiye ikiye birbirini sıfırlar. Sonunda, tüm yüzeyi çevreleyen dış eğri üzerinde bir integral kalır.

LAPLASYEN

Skaler bir fonksiyonun Laplasyeni "gradyanın diverjansı" olarak tanımlanır. Buna göre, (A.4) ve (A.8) denklemleri ard arda uygulanarak genel formül bulunur:

$$\nabla^2 t = \frac{1}{fgh} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{gh}{f} \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{fh}{g} \frac{\partial t}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{fg}{h} \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right] \quad (A.14)$$

Yine, Tablo A.1'deki katsayıları kullanarak, kartezyen, küresel ve silindirik koordinatlarda Laplasyen ifadelerini bulabilirsiniz.

Vektör diferansiyel operatörlerin değişik koordinatlarda ifadeleri ön kapak içinde bir tablo halinde gösterilmiştir.

B. BİRİMLER

Ek B. BİRİMLER

Bu kitapta kullandığımız SI (veya, "rasyonel" MKS) birim sisteminde Coulomb yasası şöyle ifade edilir:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \hat{R} \quad (\text{MKS}) \quad (B.1)$$

Mekanik büyüklükler metre, kilogram, saniye birimleriyle ve elektrik yükü coulomb birimiyle ölçülür. Gauss (veya, CGS) birim sisteminde, Coulomb yasasının önündeki sabit yük birimi içine katılır. Buna göre,

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{R^2} \hat{R} \quad (\text{CGS}) \quad (B.2)$$

Gauss sisteminde mekanik büyüklükler santimetre, gram, saniye ve elektrik yükü "elektrostatik yük birimi" (veya, statcoulomb) ile ölçülür. Bu denklemlere göre statcoulomb birimi $\text{dyne}^{1/2}$ -em birimine eşdeğerdir.

Elektrostatik formülleri MKS sisteminden CGS sistemine çevirmek zor değildir. Bunun için şu değişikliğin yapılması yeterlidir:

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi}$$

Örneğin, elektrik alanda depolanan enerji için bulduğumuz (2.39) formülü

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad (\text{MKS})$$

CGS sisteminde şöyle yazılır:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 d\tau \quad (\text{CGS})$$

Fakat, madde ortamındaki formülleri CGS sistemine çevirmek bu kadar kolay değildir; çünkü geçirgenlik, duyguluk, vb. gibi kavramların tanımları farklıdır. Bunlar için Tablo B.1'e bakabilirsiniz.

Bu kitapta Biot-Savart yasasını şöyle ifade etmiştik:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \hat{R}}{R^2} \quad (\text{MKS}) \quad (B.3)$$

CGS sisteminde bu yasa şöyle ifade edilir:

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{R}}{R^2} \quad (\text{CGS}) \quad (B.4)$$

Burada c ışık hızı olup, akım statcoulomb/saniye biriminde ölçülür. CGS sisteminde magnetik alan birimi (gauss) pratikte çok kullanışlıdır. MKS sistemindeki magnetik alan birimi (tesla) laboratuvar koşullarına göre çok büyük olmaktadır ($1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gauss}$).

Gauss (CGS) birim sisteminin en yararlı özelliği elektrik ve magnetik alanların aynı birimde olmasıdır. Buna göre, MKS sisteminde Lorentz kuvveti

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{MKS}) \quad (B.5)$$

ifadesine göre, MKS sisteminde E/B oranı hız biriminde olur. Oysa, CGS sisteminde bu ifade

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad (\text{CGS}) \quad (\text{B.6})$$

olup, magnetik alan birimini c ile ölçeklenmiş olarak kullanır. Böylece, elektrik ve magnetizma arasındaki paralel yapı daha belirgin olur. Örneğin, elektromagnetik alanda depolanan enerji ifadesi

$$W = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau \quad (\text{MKS}) \quad (\text{B.7})$$

iken, CGS sisteminde ϵ_0 ve μ_0 'lardan temizlenmiş olur:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) d\tau \quad (\text{CGS}) \quad (\text{B.8})$$

Tablo B.1 'de SI ve CGS birimleri karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Kitabın arka iç kapağında ise, her iki birim sisteminde elektromagnetik teoremin temel denklemleri sıralanmıştır. Bu ikisi dışında Heaviside-Lorentz sistemi adında üçüncü bir birim sistemi vardır. Bunun için J.D. Jackson'un *Classical Electrodynamics*, 2. baskı (Wiley, 1975) adlı eserine bakabilirsiniz.

Tablo B.1 BİRİMLER VE DEĞİŞTİRME ÇARPANLARI

Tabloda (üsler dışında) kullanılan 3 rakamı,
ışık hızının tam değeri olan $c = 2.99792458$ yerine geçer.

	SI (MKS)		Gauss (CGS)
Uzunluk	metre (m)	10^2	santimetre (cm)
Kütle	kilogram (kg)	10^3	gram (g)
Zaman	saniye (s)	1	saniye
Kuvvet	newton (N)	10^5	dyne
Enerji	Joule (J)	10^7	erg
Güç	watt (W)	10^7	erg/saniye
Yük	coulomb (C)	3×10^9	statcoulomb (esb)
Akım	ampere (A)	3×10^9	statampere (esb/s)
Elektrik alan	volt/metre	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$	statvolt/cm
Potansiyel	volt (V)	$\frac{1}{300}$	statvolt
Deplasman	coulomb/metre ²	$12\pi \times 10^5$	statcoulomb/cm ²
Direnç	ohm (Ω)	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	saniye/santimetre
Sığa	farad (F)	9×10^{11}	santimetre
Magnetik alan	tesla (T)	10^4	gauss
Magnetik akı	weber (Wb)	10^8	maxwell
H	ampere/metre	$4\pi \times 10^{-3}$	oersted
İndüktans	henry (H)	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	saniye ² /santimetre

İNDEKS

Abraham-Lorentz formülü, 334-339
akı kurah, 217
akım, 155-159

bağlı akımlar, 194

Ampere yasası, 167-173

atomik polarizabilite katsayısı, 121, 147

ayar dönüşümleri, 245

Coulomb ayanı, 246

Lorentz ayanı, 247

bağlı yükler, 125

basamak fonksiyonu (θ), 40

betatron, 226

Biot-Savart yasası, 160

boşluğun geçirgenliği (ϵ_0), 46

bremsstrahlung (frenleme radyasyonu), 333

Cauchy denklemi, 301

Child-Langmuir yasası, 84

Clausius-Mossotti formülü, 149

Compton saçılması, 373

Coulomb yasası, 46

Curie noktası, 206

d'Alembertian operatörü, 247

dalga denklemi, 265-269

dalga polarizasyonu, 272

değişken ayrımı yöntemi, 96-110

değişmez interval, 363

deplasman akımı, 237

deri kalınlığı, 290

diamagnetizma, 189

dielektrik sabiti, 134

dielektrikler, 121

bağlı yükler, 125

elektrik alan, 130

enerji, 143

Gauss yasası, 132

lineer ortamlar, 134

polarizasyon, 125

Dirac delta fonksiyonu, 36-43

direnç, 211

dispersiyon, 296-303

diverjans, 17, 397

diverjans (Gauss) teoremi, 25

dört-vektörler, 360

akım yoğunluğu, 390

enerji-momentum, 370

kontravariant, 362

kovariant, 362

durgun enerji, 370

durgun kütle, 369

duygunluk

elektrik, 134

magnetik, 202

düal tansör, 389

dünya çizgisi, 364

Earnshaw teoremi, 88

eğrisel koordinatlar, 32-36, 396

Einstein hız toplama kurah, 347

elektrik alan, 46-60

alan çizgileri, 51

dielektrik içinde, 130

elektrik deplasman vektörü, 132

elektrik dipol, 112-117

elektrik dipol radyasyonu, 309-314

elektromagnetik alan tansörü, 387

elektromagnetik dalgalar, 276-296

yansıma ve geçme, 282-284, 288-296

elektromagnetik indüksiyon, 220-227

elektromotor kuvveti (emk), 214-220

elektrostatik potansiyel, 60-67

enerji

dielektrik ortamda, 143

magnetik alanda, 232

yük dağılımı için, 70

espotansiyel yüzey, 61

eszanamlılık, 348

eylemsiz referans sistemi, 343

farad (mga birimi), 81

Faraday yasası, 220-227

faz geçişleri, 207

faz hızı, 296

faz sabiti, 269

ferromagnetik domenler, 204

ferromagnetizma, 204

Fresnel denklemleri, 287

Galileo dönüşümleri, 356

Gauss yasası, 51-60

dielektrik ortamda, 132

gecikmeli potansiyeller, 306

geçirgenlik

elektrik, 134

magnetik, 202

görelî enerji, 369

görelî kütle, 369

görelilik ilkesi, 344

görüntü yöntemi, 92-95
 gradyan, 13, 386
 gradyan teoremi, 23
 grup hızı, 297
 H alanı, 199
 Hall olayı, 187
 Helmholtz bobini, 188
 henry (indüksiyon birimi), 229
 histerezis, 206
 iletkenler, 74-80, 90
 indüksiyon, 227
 ışık, 70
 ışık konisi, 364
 kanonik momentum, 248
 kapasitörler, 80-82
 kararlı akım, 159
 kırılma indisi, 266
 kuadrupol, 113
 küresel koordinatlar, 32
 Langevin formülü, 150
 Laplace denklemi, 64, 86
 genel örnekler, 85-91
 tek çözüm teoremleri, 88-91
 Laplasyen, 21, 400
 Larmor formülü, 320, 331
 Legendre polinomları, 106
 Lenz kuralı, 221
 Liénard formülü, 332
 Lorentz dönüşümleri, 355-360
 Lorentz kısıtlaması, 352
 Lorentz kuvveti, 152
 magnetik akı, 217
 magnetik alan, 198
 magnetik dipol, 181, 182, 189
 magnetik dipol radyasyonu, 314-317
 magnetik monopol, 238
 magnetizasyon, 194
 Maxwell denklemleri, 238
 madde ortamında, 239
 sınır koşulları, 241
 Maxwell gerilme tansörü, 254
 Meissner etkisi, 263
 Michelson-Morley deneyi, 346
 Minkowski kuvveti, 377
 momentum korunumu, 256
 multipol açılımı, 112-118
 nabla (∇) operatörü, 16
 Neumann formülü, 228
 ohm (Ω), direnç birimi, 211
 Ohm yasası, 210
 öz hız, 367
 öz zaman, 366

öz direnç, 209
 iletkenlik katsayısı, 209
 paramagnetizma, 190
 plazma frekansı, 303
 Poisson denklemi, 64
 polar moleküller, 123
 polarizabilite tansörü, 123
 polarizasyon, 125
 polarizasyon akımı, 240
 Poynting teoremi, 250
 Poynting vektörü, 251
 radyasyon
 elektrik dipol, 309-314
 güç, 330
 Liénard-Wiechert potansiyelleri, 321-325
 magnetik dipol, 314-317
 radyasyon tepkisi, 334-339
 Rodrigues formülü, 106
 rotasyonel, 18, 399
 sağ-el kuralı, 7
 senkrotron radyasyonu, 333
 sınır koşulları, 241
 elektrostatik, 67
 Laplace denklemi, 88
 magnetostatik, 179
 sikloid hareketi, 153
 siklotron hareketi, 152, 376
 silindirik koordinatlar, 35
 sinüsel dalga, 269
 skaler potansiyel, 243
 Snell yasası, 285
 solenoid, 163
 Stokes (rotasyonel) teoremi, 28
 süperiletken, 263
 sürekli yük dağılımları, 47
 süreklilik denklemi, 158
 tansörler, 12
 tesla, magnetik alan birimi, 160
 toplanabilirlik ilkesi, 45
 toroit, 170
 transformator, 231
 uzay-zaman diagramları, 364
 vektör potansiyel, 174-179, 243
 vektörler, 5-12
 çarpım kuralları, 19
 dönüşümler, 11
 skaler çarpım, 6
 üçlü skaler çarpım, 10
 vektörel çarpım, 7
 yük korunumu, 158
 zaman genişlemesi, 349
 zıt emk, 230

ELEKTRODİNAMİĞİN TEMEL DENKLEMLERİ

	SI (MKS)	Gauss (CGS)
MAXWELL DENKLEMLERİ		
Boşlukta :	$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$
Madde içinde :	$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$
D ve H :	$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \\ \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \end{cases}$
Lineer ortamda :	$\begin{cases} \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, & \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{M} = \chi_m \vec{H}, & \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{P} = \chi_e \vec{E}, & \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{M} = \chi_m \vec{H}, & \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \end{cases}$
LORENTZ KUVVETİ :	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$
ENERJİ ve GÜÇ :		
Enerji :	$W = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}) d\tau$	$W = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) d\tau$
Poynting vektörü :	$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})$
Larmor formülü :	$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$	$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$